

Visual Padé approximations for Riemann zeta values

杉本 和希・室井 龍二・山崎 敬太・鷺尾 勇介・
川島 誠・鷺尾 夕紀子・鈴木 潔光・利根川 聡・平田 典子
K. Sugimoto, R. Muroi, K. Yamazaki, Yusuke Washio,
M. Kawashima, Yukiko Washio, K. Suzuki, S. Tonegawa and N. Hirata-Kohno
Nihon University (日本大学)

1 Introduction

本稿においては, Riemann zeta 関数の 3 における値 $\zeta(3)$ に対し, R. Apéry [2] による $\zeta(3)$ の無理数性の証明で構成された近似列と, Apéry の証明を簡略化した F. Beukers [4] の考察に現れる近似列を示し, その近似の精度を視覚的に比較することを目的とする.

また, $\zeta(3)$ を直接, Mathematica という数学ソフトウェアでの `convergent` というコマンドで連分数展開して得られた n 次近似分数の列 (この近似列では無理数性を証明することはできない) の精度とも比較したい.

Riemann zeta 関数は多重対数関数の 1 における極限值として表されるが, 対数関数の一般化である多重対数関数の値に対して, 無理数性及び, \mathbb{Q} 上の一次独立性の結果を示した成果 [6, 7, 8, 10] の手法を踏まえ, ICT の活用による視覚的素材の提供という視点から, 複数の近似列の速度を比べるのである.

2 Hermite-Padé 近似による無理数性の証明のしくみ

整数全体の集合を \mathbb{Z} , 有理数全体の集合を \mathbb{Q} とおく. また実数全体の集合を \mathbb{R} , 複素数全体の集合を \mathbb{C} と記す.

m を正整数とする. 次数が m 次で係数が全て整数の一元多項式に対し, 方程式

$$a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_{m-1} X + a_m = 0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0)$$

を考える. この方程式の解を m 次の代数的数と呼ぶ. 代数的数全体の集合を $\overline{\mathbb{Q}}$ と表す. 代数学の基本定理より, 代数的数は必ず複素数 \mathbb{C} に含まれるため, $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ である. 代数的数の全体は加減乗除で閉じており, 体という集合を成す.

有理数 $a \in \mathbb{Q}$ は方程式 $X - a = 0$ の解であることから, 有理数は 1 次の代数的数, つまり $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ である. 有理数ではない実数を無理数と呼ぶ.

複素数 \mathbb{C} が非可算集合である一方, 代数的数 $\overline{\mathbb{Q}}$ は可算集合であることから代数的数 $\overline{\mathbb{Q}}$ と複素数 \mathbb{C} は集合としては一致しない. 従って代数的数ではない複素数が必ず存在する. この \mathbb{C} から

$\overline{\mathbb{Q}}$ を除いた残りの集合 $\mathbb{C} - \overline{\mathbb{Q}}$ の元を超越数と言う。超越数は非可算無限個存在する。超越数は必ず無理数であるが、無理数には $\sqrt{5}$ のような代数的な無理数もあり得る。

超越数の例を作ることや、与えられた数が超越数であることを示すことは、一般的には簡単ではない。また無理数の例に関しても、代数的方程式を満たさない数については、無理数性の証明は容易ではない。しかし e や π 、また $\log 3$ などは超越数従って無理数であることが証明されている [3] [12].

e が無理数であることの証明には、指数関数 $\exp(z)$ が収束の早い Taylor 展開、即ち無限級数表示を持つことが本質的に効いている。他の関数、例えば対数関数では、Taylor 展開の収束が遅いため、指数関数と同じ証明は走らない。

まず、最も簡単な e の無理数性の証明を述べよう。本稿では n は 1 以上の整数とする。

命題 2.1. $e \notin \mathbb{Q}$.

命題 2.1の証明

まず $e \in \mathbb{Q}$ を仮定。Taylor 展開より $\mathbb{Q} \ni e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ である。

十分大きい n に対して、 $n!e \in \mathbb{Z}$ が言える (e は有理数と仮定しているので、例えば e の分母以上の n の階乗 $n!$ なら良い)。また $2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + 1 \in \mathbb{Z}$ である。

従って $\mathbb{Z} \ni n!e - (2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + 1)$ であるが、一方、この数は

$$n!e - (2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + 1) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \dots \rightarrow 0$$

を満たす。即ち、 $T_n \cdot e \in \mathbb{Z}$ となる整数列 $S_n, T_n \in \mathbb{Z}$ が存在し、 $\mathbb{Z} \ni T_n \cdot e - S_n \rightarrow 0$ かつ $T_n \cdot e - S_n \neq 0$ となる番号 n が無限個あり、この n に対し $0 < T_n \cdot e - S_n < 1$ であるが、 $T_n \cdot e - S_n \in \mathbb{Z}$ であったことから 0 と 1 の間に整数が存在 \implies 矛盾となって、証明完了する。 \square

実数 θ の無理数性を示すためには、次の手順で証明するのが一般的である。

命題 2.2 (無理数性の判定条件). $\theta \in \mathbb{R}$ とする。

(i) $T_n \cdot \theta - S_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) かつ

(ii) 無限個の n に対し、 $|T_n \cdot \theta - S_n| > 0$

を満たす整数列 S_n, T_n が存在 $\implies \theta \notin \mathbb{Q}$ である。

命題 2.2の証明

$\theta = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 1$) と仮定。 $\forall n$ で $T_n \cdot \theta - S_n \neq 0$ になるよう n を取り直すと、 $|T_n \cdot b\theta - bS_n|$ は正整数となり 1 以上、つまり

$$1 \leq |T_n \cdot b\theta - bS_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となって矛盾。 $\therefore \theta \notin \mathbb{Q}$. \square

命題 2.2 を用いて $\theta \notin \mathbb{Q}$ を示すには $\theta - \frac{S_n}{T_n} \rightarrow 0$ のみでは不十分で、 S_n, T_n は整数列でなければならぬ。

実数を有理数で近似する連分数展開の類似として、解析関数を有理関数で近似するパデ近似 (Hermite-Padé 近似) と呼ばれる手法がある。これは命題 2.2 が適用できるような **整数列** を作るために有効な手法である。解析関数を近似する有理関数列に有理数を代入し、分母を払って **整数列** を構成するのである。このパデ近似の手法が適用されるならば、命題 2.2 の整数列 S_n, T_n を構成して無理数性を得ることも望める。パデ近似は常に具体的に構成可能とは限らないが、[6, 7, 8, 10] では多重対数関数及びその一般化に対し、パデ近似の整数列が構成されており、無理数性や代数体上での一次独立性 (ただし超越性はこの我々の結果からは従わない) は出版済である。

なお、我々は Riemann zeta 関数の奇数値に対する新しい無理数性は得ていない。また、パデ近似が完全 (perfect) と呼ばれる場合 [14, I], [15] の近似列ならば、 T_n と S_n は定数倍を除いて一意に定まることが知られている [14, II]。

さて、Riemann zeta 関数 $\zeta(s)$ は以下で定義される関数である。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

この関数は複素数で定義できるが、本稿では s を実数に限る。 $s > 1$ で収束する。対数関数の一般化である s 重対数関数

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s} \quad (|z| < 1)$$

と比べると ($s = 1$ のとき、この多重対数関数は通常対数関数 $\text{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ になる)、 $s > 1$ の場合に

$$\lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_s(z) = \zeta(s)$$

となることが分かる。また、

$$\lim_{z \rightarrow -1} \text{Li}_s(z) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s)$$

となることも知られている。

3 $\zeta(3)$ に対する Apéry の収束列

1978 年の講演において、R. Apéry は以下の定理を述べた。

定理 3.1 (R. Apéry [2]). $\zeta(3)$ は無理数である。

証明のために Apéry は以下の有理数列 $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ を構成した。数列 $\frac{a_n}{b_n}$ が $\zeta(3)$ に収束して、なおかつ漸化式

$$(n+1)^3 X_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)X_n + n^3 X_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1)$$

を満たすように作ったのである。Apéry がどうやって思いついたかという説明はないが、その数列は以下で与えられる。漸化式を満たすこと、命題 2.2(ii) の収束性など、 $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ を示すた

めに用いられた事実の証明は全て [11] において再検証されている。この漸化式の特性多項式は $X^2 - 34X + 1$ である。そして a_n, b_n は以下で定義される：

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}} \right),$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2.$$

d_n は 1 から n までの最小公倍数で、素数定理を用いた次節の補題 4.2 より $\log d_n \sim n$ である。

$c_n = 2d_n^3$ とおくと以下の**整数列**（有理数列ではない）

$$T_n := c_n b_n \quad \& \quad S_n := c_n a_n$$

が構成される。 $X^2 - 34X + 1 = 0$ の 2 解において、絶対値の大きいほうの解 $17 + 12\sqrt{2} = 33.970562\dots$ の n 乗に $d_n^3 \sim e^{3n} = 20.085536^n \dots$ を乗じた数を α^n とおき、 $X^2 - 34X + 1 = 0$ の 2 解において、絶対値の小さいほうの解 $17 - 12\sqrt{2} = \frac{1}{17 + 12\sqrt{2}} = 0.02942725\dots$ の n 乗に d_n^3 を乗じた数を β^{-n} とすると、Poincaré の定理（もしくは Poincaré-Perron の定理）と呼ばれる漸化式の性質 [1] [13] [17] より以下が成立する。

$$|T_n| = 2\alpha^{n+o(n)}$$

$$|T_n \zeta(3) - S_n| = 2\beta^{-n+o(n)} \quad (\text{十分大きな全ての } n \text{ に対して, } 1 \text{ より小さい}).$$

概ね $\alpha = 682.3\dots$, $\beta^{-1} = 0.5\dots$ である。

さて $\zeta(3)$ が有理数、即ち $\zeta(3) = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 1$) と仮定する。今、無限個の n に対し $|T_n \cdot \zeta(3) - S_n| \neq 0$ が成立。ゆえに、 b 倍して分母を払った $|T_n \cdot b\zeta(3) - bS_n|$ は非ゼロ正整数となり、常に 1 以上。

一方、 $1 \leq |T_n \cdot b\zeta(3) - bS_n| < 2b \cdot (0.5\dots)^n \rightarrow 0$ となるので矛盾。

$$\therefore \zeta(3) \notin \mathbb{Q}. \quad \square$$

ここで、 $\zeta(3)$ に対する Apéry の収束列は

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \zeta(3) \quad (n \rightarrow \infty) \text{ である.}$$

4 $\zeta(3)$ に対する Beukers の収束列

Apéry [2] の $\zeta(3)$ の無理数性の証明に対し、1979 年に与えられた Beukers [4] の別証明を述べ、そこに現れる数列の収束を可視化してみよう。この Beukers [4] の別証明に関しては、様々な場に引用や翻訳などの出版がなされていることをお断りしておく。

d_n を前節と同様、1 から n までの整数の最小公倍数とする。 \int_0^1 とは $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon}$ を意味するものとする。

定理 3.1 の証明のために Beukers による以下の補題 [4] を用意する。

補題 4.1. $0 \leq r, s \in \mathbb{Z}$ とする。

(i) $r > s$ のとき $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx dy \in \mathbb{Q}$ であり、その分母は d_r^2 の約数。

(ii) $r = s$ のとき $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} dx dy = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \dots - \frac{1}{r^2}$ が成立。

また $r = 0$ のとき $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \zeta(2)$ となる。

(iii) $r > s$ のとき $\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s dx dy \in \mathbb{Q}$ であり、その分母は d_r^3 の約数。

(iv) $r = s$ のとき $\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log xy}{1-xy} x^r y^r dx dy = 2 \left\{ \zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \dots - \frac{1}{r^3} \right\}$ が成立。

また $r = 0$ のとき $-\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} dx dy = \zeta(3)$ 。

また 1 から n までの最小公倍数 d_n に関しては、素数定理より $n \rightarrow \infty$ に対し $d_n = e^{n+o(n)}$ が成立する。本稿では任意の n に対し $d_n < 3^n$ 程度の粗い評価で十分であるが、 d_n の精密な評価 [18] も以下に述べておこう。

補題 4.2. 正整数 n に対し、 $\varepsilon(n) = (\log n)^{1/2} \exp\{-\sqrt{(\log n)/R}\}$ ただし $R = \frac{515}{(\sqrt{546} - \sqrt{322})^2}$ とおく。このとき任意の正整数 n に対し、

$$n\{1 - \varepsilon(n)\} \leq \log d_n \leq n\{1 + \varepsilon(n)\}.$$

補題 4.2 の証明

J. B. Rosser, L. Schoenfeld による素数定理の精密版 [18] の主張である。ここで $n \rightarrow \infty$ に対し $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ であるが、上記の評価は任意の正整数 n で成立する。 \square

定理 3.1: $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ の証明

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} P_n(x) P_n(y) dx dy \tag{1}$$

を考える。ここで P_n は Legendre 多項式つまり、 $n! P_n(x) = \left\{ \frac{d}{dx} \right\}^n x^n (1-x)^n$ であり、また $x^n (1-x)^n$ の零点は 0 と 1 のみであることを注意しよう。

補題 4.1 から $A_n \in \mathbb{Z}, B_n \in \mathbb{Z}$ が存在して、上記の積分 (1) は $d_n^{-3} (A_n + B_n \zeta(3))$ と等しい。

一方、補題 4.2 から、 $d_n^{-3} \sim \exp(-3n + o(n))$ ($n \rightarrow \infty$ のときに $o(n) \rightarrow 0$) である。ここで

$$\int_0^1 \frac{1}{1 - (1 - xy)z} dz = \left[-\frac{1}{1 - xy} \log |1 - (1 - xy)z| \right]_0^1 = \frac{-\log xy}{1 - xy}$$

より (1) 式は

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{(1 - (1 - xy)z)} dx dy dz$$

と表せる。 x に関し n 回部分積分して $\int \frac{(xyz)^n (1 - x)^n P_n(y)}{(1 - (1 - xy)z)^{n+1}} dx dy dz$ と変形し、 $w = \frac{1 - z}{1 - (1 - xy)z}$ と置き換えると

$$(1) \text{ 式} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1 - x)^n (1 - w)^n \frac{P_n(y)}{1 - (1 - xy)w} dx dy dw$$

を得る。 y に関し n 回部分積分すると

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1 - x)^n y^n (1 - y)^n w^n (1 - w)^n}{(1 - (1 - xy)w)^{n+1}} dx dy dw \quad (2)$$

となる。ここで式 $x(1 - x)y(1 - y)w(1 - w)(1 - (1 - xy)w)^{-1}$ は $x = y$ のときに最大値を取る。

任意の $0 \leq x, y, w \leq 1$ に対し、 $\frac{x(1 - x)y(1 - y)w(1 - w)}{1 - (1 - xy)w} \leq (\sqrt{2} - 1)^4$ となることより

$$\begin{aligned} (2) \text{ 式} &\leq (\sqrt{2} - 1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - (1 - xy)w} dx dy dw \\ &= (\sqrt{2} - 1)^{4n} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1 - xy} dx dy = 2(\sqrt{2} - 1)^{4n} \zeta(3). \end{aligned}$$

積分 (2) は非ゼロであることに注意すると

$$0 < |A_n + B_n \zeta(3)| d_n^{-3} \leq 2\zeta(3)(\sqrt{2} - 1)^{4n} \quad \text{となり、} d_n < 3^n \text{ から}$$

$$0 < |A_n + B_n \zeta(3)| \leq 2\zeta(3) d_n^3 (\sqrt{2} - 1)^{4n} \leq 2\zeta(3) 27^n (\sqrt{2} - 1)^{4n} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \rightarrow 0.$$

$\zeta(3)$ が有理数、即ち $\zeta(3) = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 1$) と仮定する。下記の $|bA_n + b \cdot B_n \zeta(3)|$ は、正整数つまり 1 以上であるため、

$$1 \leq |bA_n + b \cdot B_n \zeta(3)| \leq b \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n \rightarrow 0 \text{ となって矛盾.}$$

$$\therefore \zeta(3) \notin \mathbb{Q}. \quad \square$$

ここで、 $\zeta(3)$ に対する Beukers の収束列は $-\frac{A_n}{B_n}$ である (実際には A_n は負で、 B_n が正)。即ち

$$-\frac{A_n}{B_n} \rightarrow \zeta(3) \quad (n \rightarrow \infty).$$

ちなみに、現時点での証明済の**事実**は、 $1 \leq k \in \mathbb{Z}$ に対して正偶数 $2k$ での値 = 有理数 $\times \pi^{2k}$ であるため全て超越数 (従って無理数)。また正奇数では $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ が証明済である。

予想としては正奇数 $2k + 1$ での値 = すべて無理数であり、なおかつおそらく超越数であろうと考えられている。しかし 5 以上の奇数については、無理数性も知られていない。

5 $\zeta(3)$ に近づく 3 種類の有理数列の可視化

n を横軸とし, Apéry の数列を表にした. b_n は元々整数列であった. $2d_n^3 a_n$ は整数列になる.
また $\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}$ に記載されている数値は近似値である.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	6	$\frac{351}{4}$	$\frac{62531}{36}$	$\frac{11424695}{288}$	$\frac{35441662103}{36000}$	$\frac{20637706271}{800}$	$\frac{963652602684713}{1372000}$
$2d_n^3 a_n$	12	1404	750372	137096340	425299945236	11144361386340	104074481089949004
b_n	5	73	1445	33001	819005	21460825	584307365
$\frac{a_n}{b_n}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{351}{292}$	$\frac{62531}{52020}$	$\frac{11424695}{9504288}$	$\frac{35441662103}{29484180000}$	$\frac{20637706271}{17168660000}$	$\frac{963652602684713}{801669704780000}$
$\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}$	0.0020569	$\frac{2.10864}{10^6}$	$\frac{1.96774}{10^9}$	$\frac{1.77747}{10^{12}}$	$\frac{1.55431}{10^{15}}$	0.000...	0.000...

n	8	9	10
a_n	$\frac{43190915887542721}{2195200}$	$\frac{1502663969043851254939}{2667168000}$	$\frac{43786938951280269198311}{2667168000}$
$2d_n^3 a_n$	23323094579273069340	18031967628526215059268	525443267415363230379732
b_n	16367912425	468690849005	13657436403073
$\frac{a_n}{b_n}$	$\frac{43190915887542721}{35930841355360000}$	$\frac{1502663969043851254939}{1250077234358967840000}$	$\frac{43786938951280269198311}{36426677336311407264000}$
$\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}$	0.000...	0.000...	0.000...

n を横軸とする. Beukers の有理数列 $-\frac{A_n}{B_n}$ を表にしよう.

n	1	2	3	4	5	6
$-\frac{A_n}{B_n}$	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{2201}{1836}$	$\frac{554075}{460944}$	$\frac{295135429}{245538000}$	$\frac{3540595709}{2945448000}$

n	7	8	9	10
$-\frac{A_n}{B_n}$	$\frac{1135102235191}{944300952000}$	$\frac{6985444486148267}{5811242777424000}$	$\frac{2780600301196446467}{2313201948223824000}$	$\frac{13904827794092478881}{11567528756640360000}$

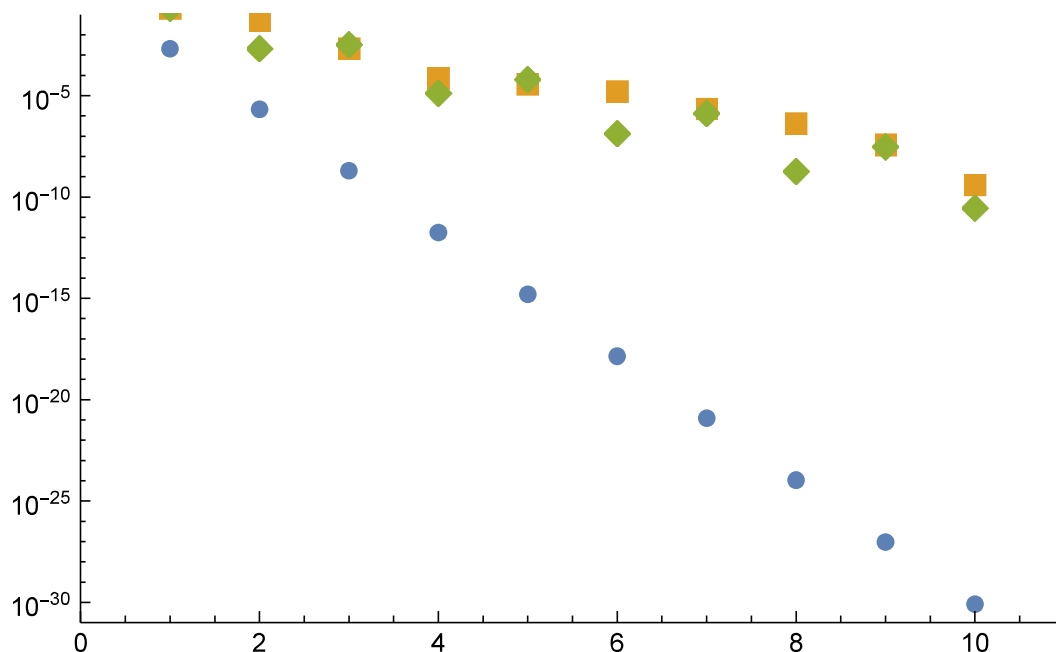
グラフの青色の点は Apéry の有理数列 $\frac{a_n}{b_n}$ と $\zeta(3)$ との差 $(\frac{a_n}{b_n} - \zeta(3))$ の絶対値である.

グラフの緑色の点は Beukers の有理数列 $-\frac{A_n}{B_n}$ と $\zeta(3)$ との差 $(-\frac{A_n}{B_n} - \zeta(3))$ の絶対値である.

そして実験的な近似分数 (正則連分数としての数学的な証明はされていない形である), 即ち Mathematica におけるコマンド `convergent` によって $\zeta(3)$ の値を連分数展開して得られた n 次近似分数列 $\frac{p_n}{q_n}$ と $\zeta(3)$ との差が オレンジの点である.

Apéry の有理数列 $\frac{a_n}{b_n}$ の収束の速さは、見事である。Beukers は $n = 10$ 迄ではあるが実験的な連分数とほぼ同じに見える。

なお残念だが、我々が $\zeta(5)$ に対し構成した近似列では、 $\zeta(5)$ の無理数性は示せていない。



謝辞 本研究は JSPS 科研費 基盤 (C) 21K03171 の助成を頂いている。

参考文献

- [1] K. Alladi and M. L. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew. Math., **318**, (1980), 137–155.
- [2] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$* , Journées arithmétiques de Luminy, Astérisque no. 61, (1979), 11–13.
- [3] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge Univ. Press, 1975.
- [4] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$* , Bull. London Math. Soc., **11**, (1979), 268–272.
- [5] G. V. Chudnovsky, *On the method of Thue-Siegel*, Annals of Math., **117**, (1983), 325–382.
- [6] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Can polylogarithms at algebraic points be linearly independent?*, Mosc. J. Comb. Number Theory, **9**, no. 4, (2020), 389–406.

- [7] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear Forms in Polylogarithms*, Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa, Classe di Scienze, series 5, **23** (3), (2022), 1447–1490.
- [8] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear independence criteria for generalized polylogarithms with distinct shifts*, Acta Arithmetica (2023), in press.
- [9] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Recent Developments on Polylogarithms and Period Conjecture*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, in press.
- [10] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Generalized hypergeometric G -functions take linear independent values*, preprint, arXiv:2203.00207 .
- [11] E. Reyssat, *Irrationalité de $\zeta(3)$ selon Apéry*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres, **20**, no. 1 1978/79, exposé no. 6, p.1–p.6.
- [12] N. I. Fel'dman & Yu. V. Nesterenko (authors), A. N. Parshin & I. R. Schfarevich (eds.), Number Theory IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol 44, 1998.
- [13] A. O. Gel'fond, *Calcul des différences finies*, Dunod, Paris, 1963.
- [14] H. Jager, *A multidimensional generalization of the Padé table. I, II, III, IV, V, VI*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, **67**, Indag. Math., **26**, (1964), 193–198, 199–211, 212–225, 227–239, 240–244, 245–249.
- [15] K. Mahler, *Perfect systems*, Compos. Math., **19**, (1968), 95–166.
- [16] E. M. Nikisin and V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, American Math. Society, 1991.
- [17] M. Pituk, *Asymptotic behavior of a Poincaré recurrence system*, J. Approx. Theory **91** (2) (1997) 226–243.
- [18] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math., **6**, (1962), 64–94.
- [19] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Shaper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$* , Math. Comp., **29**, (1975), 243–269.
- [20] C. L. Siegel, *Transcendental Numbers*, Annals of Mathematics Studies, **16**, Princeton University Press, Princeton, 1949.
- [21] C. Viola and W. Zudilin, *Linear independence of dilogarithmic values*, J. Reine Angew Math., **736**, (2018), 193–223.