

教育学部算数科内容科目における指導 — 帰納的推論の過程に着目して —

福岡教育大学教職大学院 有元 康一

Koichi Arimoto

Graduate School of Education, University of Teacher Education Fukuoka

1 はじめに

本研究では、ある大学の教育学部（初等教育教員養成課程）において、算数科の教育内容科目における数学ソフトウェアの効果的教育利用について、本年度（2022年度）前期の授業を振り返り今後への示唆とする。有元[1]は、同様の教育利用の観点で、昨年度（2021年度）に実施した同科目における、コラッツ予想を取り上げた授業に関して検討を行った。本研究ではこの内容を再検討し、さらに他の内容においても数学ソフトウェアの活用が効果的となる題材について検討した。その結果、コラッツ予想を含めた整数の題材に加えて、関数とその題材になり得ると考えられた。以下にその実践について述べる。

2 効果的な利用 -帰納的推論過程-

数学ソフトウェアの効果的な利用の観点から考察すると、数学における帰納的な推論の場面においてPCやタブレット端末等のICT機器を使用することが1つの有効な利用法であると考えられる。本研究では、この点に着眼する。例えば、「実数 x に対してある性質が成り立つ」という命題を $p(x)$ で表すとき、活動の流れの一例として以下のようなになる。

1. ある x に対して、命題 $p(x)$ が成り立つことを確かめる、
2. いくつかの x に対して、命題 $p(x)$ が成り立つことを確かめる（PC等の活用）、
3. 任意の x に対して、命題 $p(x)$ が成り立つことを予想する、
4. 3でたてた予想が正しいことを証明（説明）する。

上記の2において数学ソフトウェアを活用することを想定している。その他の1, 3, 4は個人が行う部分となる。また、1~3が帰納的な推論過程となっている。

3 授業科目の構成

対象とする授業科目について述べる。ある大学の教育学部初等教育教員養成課程2年生を主な対象とする教育内容科目であり、科目名は「小専算数」である。この講義では、普段の学生への連絡はGoogle社が提供しているGoogle Classroomを活用している。このClassroomに本科目専用の「クラス」を作成し、そこへ連絡事項等を記載して連絡を行っている。

3.1 授業の目標および概要

シラバスでは、授業の目標と概要について次のように述べている：

小学校教師になる上で最低限必要な専門的素養として、指導内容に関する数学的立場からの教材研究ができるようにすることを目標とする。そのために、本授業では、算数科の各領域における典型的事例をとりあげながら、教授学、心理学、記号論などからの原理を基にした教材研究の講義・演習を行う。予習・復習を含めて、授業への積極的な取り組みを求める。なお、「主体的・対話的で深い学び」という考え方と、それらの知識を関連づけた説明、また授業者が教育現場で関わっているアクティブ・ラーニングの実践例（失敗例を含む）などの紹介を説明に用い、アクティブ・ラーニングに関する概念の理解を促す。

3.2 授業内容

全 15 回の授業内容を表 1 に示す。小学校算数科においては、「A 数と計算」、「B 図形」、「C 測定（下学年）」、「C 変化と関係（上学年）」および「D データの活用」の 5 つの領域が設定されている [2]。C で表示されている領域が「測定」と「変化と関係」の 2 つあるが、それぞれ下学年（1 年～3 年）、上学年（4 年～6 年）に割り当てられている。各領域に 2～3 回の授業時間を割り当て、それぞれの 1 回目の授業では学習指導要領の内容を踏まえた各学年における指導内容等について解説し、2～3 回目の授業では指導内容の背景となる数学の内容について解説している。表 1 において「指導内容の概観」が学年毎の指導内容などの学習指導要領で述べられている教育の内容に相当する。

表 1: 全 15 回の授業内容

第 1 回～第 3 回 「数と計算」領域 ・ 指導内容の概観 ・ 整数とその計算 ・ 小数・分数とその計算 ・ 概数・概算	第 10 回～第 12 回 「変化と関係」領域 ・ 指導内容の概観 ・ 関数の考え ・ 比例と反比例
第 4 回～第 6 回 「図形」領域 ・ 指導内容の概観 ・ 図形の概念とその構成 ・ 平面図形と空間図形 ・ 図形の計量	第 13 回～第 14 回 「データの活用」領域 ・ 指導内容の概観 ・ データの整理とその分析
第 7 回～第 9 回 「測定」領域 ・ 指導内容の概観 ・ 量の概念と測定	第 15 回 まとめ ・ 振り返り

4 整数に関する内容

4.1 本時の授業内容

授業全 15 回のうち、第 3 回の授業で次に挙げる整数に関する話題を扱った。内容は昨年度と同様だが、昨年度より時間をかけて計算機科学に関する話題に触れ、拡充して実施した。

【実施日時】(A クラス) 2022 年 4 月 25 日 (月) 第 2 時限
(B クラス) 2022 年 5 月 6 日 (金) 第 4 時限

- 素数について
- ピタゴラス数について
- コラッツ予想 (角谷予想) について

以下に、ICT 活用の観点から具体的な講義や演習内容について述べる。

4.2 素数について (話題 1)

素数の定義を解説し、学生に素数の例を挙げさせ、素因数分解とその一意性について解説した。素数のイメージをより明確にもたせるために、整数の世界における素因数分解と化学の世界における化学式を比較し、整数における素数は化学における原子と共通していることを指摘した。また、公開鍵暗号について触れ、計算機科学との接点について触れた。最後に、素数が無限にあることの証明を行った。公開鍵暗号については昨年度触れなかったが、本年度計算機科学との関係から触れた。以下に学生に配付した授業資料を提示する。

【素数の定義】

正の整数で 1 とその数自身しか正の約数をもたない数。ここで、1 は素数としない。換言すれば、素数とは正の整数で正の約数がちょうど 2 個である数のことである。素数でない正の整数を合成数という。

【素数の例】

2 から 30 までの整数で素数をすべて挙げてみよう。

【素因数分解とその一意性】

正の整数を素数だけの積で表すことを素因数分解するという。
その表し方は積の順序を除いて一通りである (素因数分解の一意性)。

※ 整数の世界における素因数分解と、化学の世界における化学式は共通している。

$$12 = 2^2 \times 3, \quad \text{水} = \text{H}_2\text{O}$$

※ 大きな数の素因数分解の困難性を根拠に、公開鍵暗号が活用されており、現在のインターネットを含む科学技術における安全性を支えている。しかし、量子コンピュータの出現などによる技術の向上により、今後どうなるだろうか。

【素数はいくつあるのだろうか？】 素数が無限にあることの証明

4.3 ピタゴラス数について（話題2）

三平方の定理 ($a^2 + b^2 = c^2$) を満たす整数解 (a, b, c) をピタゴラス数であることを述べ、例えば (3, 4, 5), (5, 12, 13) があり、無数に存在していることを伝えた。また、このピタゴラス数を求める公式も明らかにされていることを解説した。この話題ではPC等の端末を活用していないが、これをPC等を活用して計算させることも一つの展開例となるだろう。

4.4 コラッツ予想について（話題3）

PC等の活用の視点からはこの部分がメインの活動となる。昨年度は、コラッツ予想の内容を解説して、授業の最後に各自の学生番号の末位2桁についてこの予想が成り立つことを確認させ、次時の始めに、表計算ソフトを使って1から99まで成り立つことを私が確認した結果、計算回数が多かった数（例えば27が111回、54が112回など）を紹介するだけの活動であった。本年度は学生に各自のノートパソコンやスマートフォン端末を持参するように指示し、Excelのファイルは、Google Classroomの本授業科目用のクラスでダウンロードできるようにした。

4.4.1 講義内容

まず、コラッツ予想について次の内容を解説した [3]。任意の正の整数 a_1 が与えられたとき、 $n \geq 1$ に対して次のように定義されるものをコラッツ・アルゴリズムと呼ぶ。

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n/2 & a_n \text{が偶数のとき,} \\ 3a_n + 1 & a_n \text{が奇数のとき.} \end{cases}$$

上で定義したコラッツ・アルゴリズムは、有限回の計算で1に達する。この予想をコラッツ予想と呼ぶ。この予想は現在未解決である。

初等教育教員養成課程の学生にとっては難しく感じる人もいると思うため、次のように具体例を挙げて解説した。

$$13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

4.4.2 演習内容

演習では、まず各自の学生番号の末位2桁についてコラッツ予想が成り立つことを計算させた。その次に、他の数例について同様に成り立つかを調べさせた。最後に、各自の端末にダウンロードした Excel ファイルを活用して、任意の整数について成り立つかを確認させた。作成にあたり [4] を参考にした。具体的には次の手順で演習を行った。

課題

- (1) 各自の学生番号の末位2桁に対して、コラッツ予想が成り立つことを確認してみよう。
- (2) 他の正の整数でも成り立つだろうか？ 2~3個の数について計算してみよう。
- (3) Google Classroom に本科目専用のクラス内から Excel ファイルをダウンロード（図1）して、他の正の整数について調べてみよう。

回数	1	2	3	4	5													
1																		
2	1		1	10	2	16												
3	2			5	1	8												
4	3			16			4											
5	4				8			2										
6	5				4			1										
7	6				2													
8	7				1													
9	8																	

図 1: 学生にダウンロードさせたコラッツ・アルゴリズムに関する Excel の画面

ここで、セル B3 には「=IF(OR(B2=1,B2='')='',IF(MOD(B2,2)=0,B2/2,B2*3+1))」と入力していることを伝え、簡単な数式を使った処理については使えるようにしておくように伝えた。その後に、指導者が計算結果を提示した（図 2）。

回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	1	1	10	2	16	3	22	4	28	5	34	6	40	7	46	8	52	9	58	10	64	11	70	12	76	13	82
2	2	5	1	8	10	11	2	14	16	17	3	20	22	23	4	26	28	29	5	32	34	35	6	38	40	41	
3	3	16		4	5	34	1	7	8	52	10	10	11	70	2	13	14	88	16	16	17	106	3	19	20	124	
4	4	8		2	16	17		22	4	26	5	5	34	35	1	40	7	44	8	8	52	53	10	58	10	62	
5	5	4		1	8	52		11	2	13	16	16	17	106		20	22	22	4	4	26	160	5	29	5	31	
6	6	2		4	26	34		1	40	8	8	8	52	53		10	11	11	2	2	13	80	16	88	16	94	
7	7	1			2	13		17		20	4	4	26	160		5	34	34	1	1	40	40	8	44	8	47	
8	8				1	40		52		10	2	2	13	80		16	17	17			20	20	4	22	4	142	
9	9					20		26		5	1	1	40	40		8	52	52			10	10	2	11	2	71	
10	10					10		13		16			20	20		4	26	26			5	5	1	34	1	214	
11	11					5		40		8			10	10		2	13	13			16	16	1	107		107	
12	12					16		20		4			5	5		1	40	40			8	8	52	322		322	
13	13					8		10		2			16	16			20	20			4	4	26	161		161	
14	14					4		5		1			8	8			10	10			2	2	13	484		484	
15	15					2		16					4	4			5	5			1	1	40	242		242	
16	16					1		8					2	2			16	16					20	121		121	
17	17					4		4					1	1			8	8					10	364		364	
18	18					2		2									4	4					5	182		182	
19	19					1		1									2	2					16	91		91	
20	20																1	1					8	274		274	
21	21																						4	137		137	
22	22																						2	412		412	
23	23																						1	206		206	

図 2: 指導者が提示したコラッツ・アルゴリズムに関する Excel の画面

図2では、ある正の整数に対してコラッツ・アルゴリズムを適用した計算の過程が（縦方向の）列に示されている。

5 関数に関する内容

5.1 本時の授業内容

授業全15回のうち、第12回の授業で次に挙げる関数に関する話題を扱った。

【実施日時】（Aクラス）2022年7月4日（月）第2時限
（Bクラス）2022年7月8日（金）第4時限

- 反比例について（1次関数については前回すでに扱っている）
- 2次関数の最大値、最小値について
- 2次関数のグラフについて

この回の内容は、Aグループの授業終了後に若干内容を修正して、Bグループの授業を行った。以下に、2次関数の内容で、ICT活用の観点からBグループの具体的な講義や演習内容について述べる。

5.2 2次関数の最大値、最小値について（話題1）

関数を俯瞰する立場から、2次関数の定義を振り返り、最大値、最小値を求める。

練習問題 次の2次関数に、最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(1) $y = 2(x - 3)^2 + 4$ (2) $y = -2x^2 - 4x$

練習問題 関数 $y = x^2 - 4x + 1$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値、最小値を求めよ。

5.3 2次関数のグラフについて（話題2）

ここでは、関数グラフソフトである GRAPES を活用した2次関数のグラフについて実施した授業内容を述べる。このソフトを開発した友田 [5] は、「2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと係数」についての解説を GRAPES とパワーポイントでしており、特に係数 b の解説にページを割いている。この講義では、GRAPES-light Web版 [6] を活用して2次関数のグラフを描いた。以下単に「GRAPES」と書く。講義では、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において、 a や c の値を変化させた場合については比較的簡単に推論できる。実際、次の手順で進めた。

考察 次の2次関数で、それぞれ a や c の値を変化させると、グラフはようになるだろうか？

(1) $y = ax^2 + x + 1$ (a の値を変化させる)

(2) $y = x^2 + x + c$ (c の値を変化させる)

次に b の値を変化させた場合について次の手順で考察した。このアイデアは佐藤・内田・有元 [7] を参考にした。また、文部科学省 [8] にも関連する記述がある。

課題 2次関数 $y = x^2 + bx + 1$ で b の値を変化させると、グラフはようになるだろうか？

- (1) まず、各自で考えてみよう。
- (2) GRAPES で描かれたグラフ（残像）を見て、何か気づくことはあるだろうか。
- (3) 各自で GRAPES を使ってグラフを描いてみよう。
- (4) 今までの活動で、どのような事柄が成り立つと推測できるだろうか。
- (5) (4) で推測した事柄が成り立つことを説明してみよう。

b の値を変化させたときの性質について、まず各自で考え、次に指導者が PC を操作し、 b の値を変化させた場合のそれぞれのグラフを残像を累積させて教室前面に設置したスクリーンに提示した。その後、学生に性質を推論させ、学生各自の端末を使ってグラフを表示させて改めて推論するように促した。そして、頂点の軌跡が放物線を描くことを予想した（図3）うえで、それが正しいことを説明するように促し、全体で確認した。

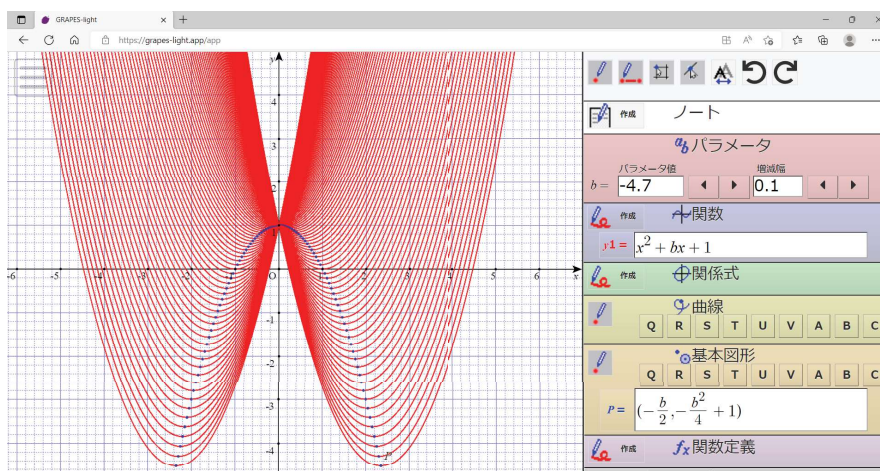


図 3: GRAPES を活用した画面

$y = x^2 + bx + 1 = (x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + 1$ より 放物線の頂点の座標は $(-\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4} + 1)$ である。いま、 $-\frac{b}{2} = X$ とおくと、 $-\frac{b^2}{4} + 1 = -X^2 + 1$ となる。ここで b はすべての実数値をとることを考えているから、 $-\frac{b}{2} = X$ もすべての実数値をとり、 b と X は1対1に対応している。したがって、頂点の軌跡は放物線 $y = -x^2 + 1$ 全体である。

6 結語

この授業では、学生は各自が高等学校までで学んできた内容を俯瞰的に捉え直す内容もあり、小学校から高等学校までの算数・数学の学習内容の系統的なつながりを実感する学生も多い。帰納的な推論で得た結論はいつも正しいとは限らないが、このような推論過程を学生が意識しながら数学の内容について深く理解することも、小学校教員にとって必要であると考え、帰納的推論の過程において、ある命題の真偽についての予想を立てる際に数学ソフトウェアを活用することは有効であり、PCにおいて必要な計算や図示等を行ったうえで、その命題が真であることを予想し、それを証明するという流れは問題解決の1つの方法であろう。

謝辞

著者による RIMS 共同研究「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」における講演に対して、有益な御助言をいただきました先生方に御礼を申し上げます。

参考文献

- [1] 有元康一：「GIGA スクール構想」の実現に向けた数学科教材開発に関する研究 -表計算ソフトの活用からの「第一歩」-, 数理解析研究所講究録 2208, 京都大学数理解析研究所, pp.77-84, 2021.
- [2] 文部科学省：「小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 算数編」, 日本文教出版, 2018.
- [3] 小松尚夫 訳：初等整数論 9 章 第 2 版, 森北出版, p.30, 2008.
James J.Tattersall: *Elementary Number Theory in Nine Chapters [Second Edition]*, Cambridge University Press, 2005.
- [4] デジタルワールド：なんでも数式で解いてみる「コラッツの問題」-エクセル関数の使い方, <https://dw230.jp/f/508/>(2021 年 8 月 6 日最終閲覧)
- [5] 友田勝久：関数グラフソフト GRAPES 7.80 「指導案」.
<https://tomodak.com/grapes/>(2022 年 8 月 19 日最終閲覧)
- [6] 友田勝久：GRAPES-light Web 版.
<https://grapes-light.app/>(2022 年 8 月 20 日最終閲覧)
- [7] 佐藤禎大・内田幹貴・有元康一：「高等学校数学科における効果的な ICT の活用について-「社会人基礎力」の育成を視野に入れて-」, 数理解析研究所講究録（本冊子）, 京都大学数理解析研究所, 投稿中.
- [8] 文部科学省：算数・数学科の指導における ICT の活用について,
https://www.mext.go.jp/content/20200914-mxt_jogai01-000009772_001.pdf
(2022 年 8 月 21 日最終閲覧)