複シャッフル方程式の解の構成について

木村 藍貴 (東北大学)
Aiki Kimura (Tohoku University)
田坂 浩二 (愛知県立大学)
Koji Tasaka (Aichi Prefectural University)

1　序文

多項式の列からなる複シャッフル方程式の解空間を解明するために，Brown [1] や Ecalle [3] によって，線形複シャッフル方程式の解空間から同型 (と予想される) 写像が独立に構成されている．今回，Brown による写像の構成法をもとに，mould における新たな Lie 代数射の枠組みが得られたので報告する．また，Ecalle が構成した同型写像を，今回得られた枠組みを使って再解釈する取り組みについての計算結果も紹介する．

2　複シャッフル方程式

可換な変数 $x_1,\dots,x_d,\ x_1^{-1},\dots,x_d^{-1}$ と $(x_i-x_j)^{-1}$ $(1\le i<j\le d)$ で生成される有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の d 変数有理関数環を $\mathcal{O}_d$ とし，$\mathcal{O}\coloneqq\prod_{d\ge 0}\mathcal{O}_d$ とおく．本稿では $\mathcal{O}$ の元 $f=(f^{(d)})_{d\ge 0}$ を *mould*, $f^{(d)}$ を f の *depth* d 部分とよぶ．特に，depth 0 部分が 0 である mould 全体の集合を $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ として，その部分空間 $\mathcal{L}_{\mathcal{O},k}$ を

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O},k}\coloneqq\left\{f=(0,f^{(1)},f^{(2)},\dots)\in\prod_{d\ge 0}\mathcal{O}_d\ \middle|\ \deg f^{(d)}=k-d\quad(\forall d\ge 1)\right\}$$

で定義する．ただし，$0\in\mathbb{Q}$ の次数は任意に設定できるものとし，斉次多項式 f,g に対し，$\deg f/g=\deg f-\deg g$ とする．このとき，$\mathcal{L}_{\mathcal{O}}=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{L}_{\mathcal{O},k}$ であり，$f\in\mathcal{L}_{\mathcal{O},k}$ ならば f は *weight* k であるという．また，$\mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(d)}\coloneqq\{f\in\mathcal{L}_{\mathcal{O}}\mid 0\le r<d,\ f^{(r)}=0\}$ とする．

線形空間 $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ は次の伊原括弧積 $\{,\}$ で閉じて Lie 代数となることが知られている [1, §9]. 伊原括弧積 $\{,\}$ は伊原作用 $\underline{\circ}$ を用いて，$\{f,g\}\coloneqq f\,\underline{\circ}\,g-g\,\underline{\circ}\,f$ と定義される Lie 括弧積で，各 depth d 部分は次で与えられる:

$$(f\,\underline{\circ}\,g)^{(d)}(x_1,\dots,x_d)=\sum_{r+s=d}(f^{(r)}\,\underline{\circ}\,g^{(s)})(x_1,\dots,x_{r+s}).$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
&(f^{(r)} \mathbin{\underline{\circ}} g^{(s)})(x_1,\dots,x_{r+s}) \\
&:= \sum_{i=0}^{s} f^{(r)}(x_{i+1}-x_i,\dots,x_{i+r}-x_i) g^{(s)}(x_1,\dots,x_i,x_{i+r+1},\dots,x_{r+s}) \\
&\quad + (-1)^r \sum_{i=1}^{s} f^{(r)}(x_{i+r}-x_{i+r-1},\dots,x_{i+r}-x_i) g^{(s)}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+r},\dots,x_{r+s}).
\end{aligned}
$$

定義からわかるように，$\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ に属する有理関数の極の位置は伊原括弧積のもとでも保たれる．

調和積とシャッフル積

インデックス (正整数の組み) $\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{N}^r$ ごとに $[\boldsymbol{n}]=[n_1,\dots,n_r]$ なる記号を導入し，その有理数係数の有限和 $\sum_{\boldsymbol{n}} c_{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{n}]$ からなる $\mathbb{Q}$-ベクトル空間を $\mathcal{R}:=\bigoplus_{r\geq 0}\mathbb{Q}[\mathbb{N}^r]$ と表す．ただし，$\mathbb{Q}[\mathbb{N}^0]=\mathbb{Q}[\emptyset]$ である．$\mathcal{R}$ には単位的結合積を

$$
[n_1,\dots,n_r][m_1,\dots,m_s]=[n_1,\dots,n_r,m_1,\dots,m_s]
$$

と定めておく．有理関数環 $\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_d)$ の帰納極限を $K:=\varinjlim_{d}\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_d)$ とし，$\mathcal{R}_K=\mathcal{R}\otimes_{\mathbb{Q}}K$ とおく．

異なる正整数の組み $\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_r)$ および $f\in\mathcal{O}$ に対し，$f([\boldsymbol{n}]):=f^{(r)}(x_{n_1},\dots,x_{n_r})$ と定め，この記号を K-線形に拡張しておく．ただし，$f([\emptyset])=f^{(0)}$ である．例えば，

$$
f\left([1,2]+[2,1]+\frac{[1]-[2]}{x_1-x_2}\right)=f^{(2)}(x_1,x_2)+f^{(2)}(x_2,x_1)+\frac{f^{(1)}(x_1)-f^{(1)}(x_2)}{x_1-x_2} \tag{2.1}
$$

のように扱う．インデックス $\boldsymbol{n}$ の成分に重複がある場合，$f([\boldsymbol{n}])$ は意味を持つとは限らないが，以降の議論でそのようなインデックスは f の引数として扱われないことに注意しておく．

K-双線形写像 $*:\mathcal{R}_K\times\mathcal{R}_K\to\mathcal{R}_K$ を次の帰納的規則で定める:

- 任意の $\boldsymbol{n}$ に対し，$[\emptyset]*[\boldsymbol{n}]=[\boldsymbol{n}]*[\emptyset]=[\boldsymbol{n}]$,
- 任意の $\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_r)$, $\boldsymbol{m}=(m_1,\dots,m_s)$ に対し，

$$
[\boldsymbol{n}]*[\boldsymbol{m}]=\begin{cases} 0 & n_r=m_s, \\ \big([\boldsymbol{n}_-]*[\boldsymbol{m}]\big)[n_r]+\big([\boldsymbol{n}]*[\boldsymbol{m}_-]\big)[m_s] \\ \quad +\big([\boldsymbol{n}_-]*[\boldsymbol{m}_-]\big)\big([n_r]-[m_s]\big)\frac{1}{x_{n_r}-x_{m_s}} & n_r\neq m_s. \end{cases}
$$

ただし，$\boldsymbol{n}_-=(n_1,\dots,n_{r-1})$, $\boldsymbol{m}_-=(m_1,\dots,m_{s-1})$ である．

式 (2.1) は $f([1]*[2])$ の展開式に他ならない．

$\mathbb{Q}$-双線形写像 $ш:\mathcal{R}\times\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ を次の帰納的規則で定める:

- 任意の $\boldsymbol{n}$ に対し，$[\emptyset] ⧢ [\boldsymbol{n}] = [\boldsymbol{n}] ⧢ [\emptyset] = [\boldsymbol{n}]$,
- 任意の $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r)$, $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_s)$ に対し，

$$[\boldsymbol{n}] ⧢ [\boldsymbol{m}] = \big([\boldsymbol{n}_-] ⧢ [\boldsymbol{m}]\big)[n_r] + \big([\boldsymbol{n}] ⧢ [\boldsymbol{m}_-]\big)[m_s].$$

例えば，$f([1] ⧢ [2,3]) = f^{(3)}(x_1, x_2, x_3) + f^{(3)}(x_2, x_1, x_3) + f^{(3)}(x_2, x_3, x_1)$ となる．

$\mathbb{Q}$-線形写像 $\sharp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $f \mapsto f^\sharp$ を各 depth における次の変数変換で定義する:

$$(f^\sharp)^{(0)} \coloneqq f^{(0)}, \quad (f^\sharp)^{(d)}(x_1, \ldots, x_d) = f^{(d)}(x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_d) \quad (d \geq 1).$$

逆変換 $\flat : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $f \mapsto f^\flat$ は

$$(f^\flat)^{(0)} \coloneqq f^{(0)}, \quad (f^\flat)^{(d)}(x_1, \ldots, x_d) = f^{(d)}(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_d - x_{d-1}) \quad (d \geq 1)$$

である．実際，$(f^\sharp)^\flat = (f^\flat)^\sharp = f$ となる．

これらの記号は，多重ゼータ値

$$\zeta(k_1, \ldots, k_d) \coloneqq \sum_{0 < m_1 < \cdots < m_d} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_d^{k_d}} \quad (k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N}, k_d \geq 2)$$

の調和積およびシャッフル積を母関数で表示する際に便利である．まず，$\zeta_*(\boldsymbol{k}) \coloneqq Z_{\boldsymbol{k}}^*(0)$ および $\zeta^{⧢}(\boldsymbol{k}) \coloneqq Z_{\boldsymbol{k}}^{⧢}(0)$ を正規化多重ゼータ値 (cf. [9]; 多重ゼータ値のインデックスが逆順に注意) とする．$\mathcal{P} = \prod_{d \geq 0} \mathbb{Q}[[x_1, \ldots, x_d]]$ とおいて，$\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ の元 $Z_* = (1, Z_*^{(1)}, Z_*^{(2)}, \ldots)$ および $Z_{⧢} = (1, Z_{⧢}^{(1)}, Z_{⧢}^{(2)}, \ldots)$ を

$$Z_*^{(d)}(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{k_1, \ldots, k_d \geq 1} \zeta_*(k_1, \ldots, k_d) x_1^{k_1 - 1} \cdots x_d^{k_d - 1},$$
$$Z_{⧢}^{(d)}(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{k_1, \ldots, k_d \geq 1} \zeta_{⧢}(k_1, \ldots, k_d) x_1^{k_1 - 1} \cdots x_d^{k_d - 1}$$

により定める．このとき，任意の異なる正整数の組み $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$ に対し，

$$\begin{aligned} Z_*([\boldsymbol{n}] * [\boldsymbol{m}]) &= Z_*([\boldsymbol{n}]) Z_*([\boldsymbol{m}]), \\ Z_{⧢}^\sharp([\boldsymbol{n}] ⧢ [\boldsymbol{m}]) &= Z_{⧢}^\sharp([\boldsymbol{n}]) Z_{⧢}^\sharp([\boldsymbol{m}]) \end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つ．最初の等式が調和積，二つ目の等式がシャッフル積に対応する．

複シャッフル方程式の解空間

定義 2.1. 次の (i), (ii) をみたす mould $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ の集合を $\mathfrak{dm}_{\mathcal{O}}$ とする:

(i) $f^{(1)}(-x_1) = f^{(1)}(x_1)$,

(ii) 任意の整数 $d \geq 2$ と $i = 1, 2, \ldots, d-1$ に対し，

$$f^\sharp([1, \ldots, i] ⧢ [i+1, \ldots, d]) = f([1, \ldots, i] * [i+1, \ldots, d]) = 0. \tag{2.3}$$

方程式 (2.3) は，多重ゼータ値の調和積とシャッフル積の母関数表示 (2.2) に由来しているため，複シャッフル方程式とよばれている．定義から $\mathfrak{dm}_{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ の部分空間となる．解空間 $\mathfrak{dm}_{\mathcal{O}}$ は Brown [1, Definition 9.1] の定義を拝借している．ただし，そこでは $\mathfrak{pdmr}$ と表記されており，実際には (i) の条件が書かれておらず誤植があることに注意されたい．

定義 2.2. 次の (i), (ii) をみたす mould $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ の集合を $\mathfrak{ls}_{\mathcal{O}}$ とする:

(i) $f^{(1)}(-x_1) = f^{(1)}(x_1)$,
(ii) 任意の整数 $d \geq 2$ と $i = 1, 2, \ldots, d-1$ に対し，

$$f^{\sharp}([1,\ldots,i] ш [i+1,\ldots,d]) = f([1,\ldots,i] ш [i+1,\ldots,d]) = 0. \tag{2.4}$$

方程式 (2.4) を線形複シャッフル方程式とよぶ．線形複シャッフル方程式は weight と depth の組みごとに独立した方程式であるゆえ，$d \geq 2$ および $k \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\mathfrak{ls}^{d}_{\mathcal{O},k} = \{f^{(d)} \in \mathcal{O}_d \mid \deg f^{(d)} = k - d \text{ かつ } 1 \leq i < d \text{ に対し (2.4) をみたす}\}$$

とおくと，

$$\mathfrak{ls}_{\mathcal{O}} = \prod_{d \geq 0} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{ls}^{d}_{\mathcal{O},k}$$

となる．ただし，$\mathfrak{ls}^{1}_{\mathcal{O},k} = \{f^{(1)} \in \mathcal{O}_1 = \mathbb{Q}[x_1^{\pm 1}] \mid \deg f^{(1)} = k-1, f^{(1)}(-x_1) = f^{(1)}(x_1)\}$ および $\mathfrak{ls}^{0}_{\mathcal{O},k} = \{0\}$ である．

解空間 $\mathfrak{dm}_{\mathcal{O}}$ は複シャッフル Lie 代数，$\mathfrak{ls}_{\mathcal{O}}$ は線形複シャッフル Lie 代数とよばれる．名前の通り，これらはそれぞれ Lie 代数になることが知られる．

定理 2.3. 解空間 $\mathfrak{dm}_{\mathcal{O}}$ と $\mathfrak{ls}_{\mathcal{O}}$ は，伊原括弧積 $\{,\}$ のもとで，どちらも Lie 代数である．

定理 2.3 の原型は，Racinet [13] による多項式 mould，正確には非可換冪級数の場合の結果である．その証明の概略は [5, Appendix] にもあり，別証明 [4] もある．これらは我々の方程式とは異なり，“正規化複シャッフル方程式”の解空間を扱っているという違いがあることに注意しておく．一般の mould に対する定理 2.3 は [12, Theorem 1.2] で述べられているが，その証明[1]は近年，整備が進みつつある Ecalle 理論 [3] を拠り所としている[2]．Ecalle 理論では，まず $\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{al}}}$ が ari-bracket についての Lie 代数であること (完全な証明は [6, Proposition 1.25]) から始め，Lie 代数同型写像 $\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{al}}} \cong \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{il}}}$ が存在するという強い結果 (cf. [14, Theorem 7.2], [15, Theorem 4.6.1]) を経由することで，$\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{il}}}$ が ari-bracket についての Lie 代数であることが示される．我々の解空間との関係は，

$$\mathfrak{ls}^{\sharp}_{\mathcal{O}} \subset \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{al}}} \quad \text{および} \quad \mathfrak{dm}^{\sharp}_{\mathcal{O}} \subset \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{il}}}$$

となっている．実際の Ecalle 理論では，有理関数の極は指定されておらず，また正規化複シャッフル方程式の解空間を扱っていることに注意しておく．[12] では，ari-bracket と $\sharp$

[1][12, Remark 4.7] で別証明について触れているが，これには確かめなくてはいけないことがまだあって，現状では不完全である．

[2]Ecalle 理論では，一部主張の証明が不完全な（誰もが読める形で残されていない）ものもあり，引用する場合は注意が必要である．最近の整備状況は [6,7,10,11,14,15] などを参照されたい．

で変換した伊原括弧積の同値性に関する結果 [12, Theorem 5.3] を使うことで，Ecalle による Lie 代数同型写像 $\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{al}}} \cong \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{il}}}$ から Lie 代数同型写像

$$\chi_E : \mathfrak{ls}_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{dm}_{\mathcal{O}} \tag{2.5}$$

を得ており，これが具体的に

$$\chi_E(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{ad}^n({\phi_0}^{\flat})(f)$$

で計算されることを示している．ただし，$\phi_0 = \log_{\mathrm{ari}}(pal) \in \mathcal{L}_{\mathcal{O},0}$ ([12, §3] を参照) であり，$\mathrm{ad}^0(g)(f) = f$，$\mathrm{ad}^n(g)(f) = \{\mathrm{ad}^{n-1}(g)(f), g\}$ である．定理 2.3 は，$\mathfrak{ls}_{\mathcal{O}}$ が伊原括弧積についての Lie 代数であること，および (2.5) の帰結として得られる．

定理 2.3 は複シャッフル方程式に関する最も基本的な結果であり，最近でも証明の簡素化や別のアプローチが行われている．以下で紹介する Brown による一連の予想群もその一つで，彼の予想を解決することで定理 2.3 の別証明が得られうる．

Brown 予想

Brown [1] による予想を紹介しよう．mould $\psi_0 = (0, \psi_0^{(1)}, \psi_0^{(2)}, \ldots) \in \mathcal{L}_{\mathcal{O},0}$ を，

$$\psi_0^{(r)} = \frac{2}{r(r+1)} \sum_{i=0}^{r-1} (r-i) \prod_{0 \le j \le r,\, j \ne i} \frac{1}{(x_j - x_i)} \qquad (r \ge 1)$$

とする．ただし，$x_0 = 0$．非零元 $f^{(d)} \in \mathcal{O}_d$ に対し，$f = (0, \ldots, 0, f^{(d)}, 0, \ldots) \in \mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(d)}$ とおいて，$\chi_B(f) \in \mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ を帰納的に次で定義する:

$$\chi_B(f)^{(d+r)} \coloneqq \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^{r} \{\psi_0^{(i)}, \chi_B(f)^{(d+r-i)}\} \quad (r \ge 1).$$

ただし，$\chi_B(f)^{(i)} = 0 \quad (0 \le i < d)$ および $\chi_B(f)^{(d)} = f^{(d)}$ とする．これを，$\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ の $\mathbb{Q}$-線形写像に拡張しておく．この写像 χ_B について，Brown の提唱する予想 [1, Theorem 14.4] は以下のように述べられる．

予想 2.4. 写像 χ_B は伊原括弧積 $\{,\}$ についての Lie 代数同型写像であろう．

$$\chi_B : \mathfrak{ls}_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{dm}_{\mathcal{O}}.$$

[12] では，(2.5) における Ecalle の同型写像 $\chi_E : \mathfrak{ls}_{\mathcal{O}} \to \mathfrak{dm}_{\mathcal{O}}$ と χ_B を比較することにより，予想 2.4 に対する部分的な結果を得ている．

命題 2.5 ([12]). 任意の $f \in \mathfrak{ls}_{\mathcal{O}}$ に対し，

$$\chi_B(f) \equiv \chi_E(f) \mod \mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(d+4)}.$$

ただし，d は $f^{(d)}$ が非ゼロとなる最小の正整数である．

命題 2.5 と Ecalle 理論の帰結として，χ_B によって，$\mathfrak{ls}_{\mathcal{O},k}^{d}$ の元ごとに depth $d+3$ 部分まで複シャッフル方程式 (2.3) を満たすものが得られることがわかる．

3　主結果とその応用

主結果

予想 2.4 は次の二つの主張が成り立つことと同値である (cf. [12, §5.2]):

(B1) 線形写像 $\chi_B : \mathcal{L}_\mathcal{O} \to \mathcal{L}_\mathcal{O}$ は Lie 代数射である．すなわち，任意の $f, g \in \mathcal{L}_\mathcal{O}$ に対し，$\{\chi_B(f), \chi_B(g)\} = \chi_B\bigl(\{f, g\}\bigr)$ が成り立つ．

(B2) 任意の $f \in \mathfrak{ls}_\mathcal{O}$ に対し，$\chi_B(f) \in \mathfrak{dm}_\mathcal{O}$．

本稿の主結果は (B1) の肯定的な解決である．これを述べるため，写像 χ_B の帰納的な定義において，ψ_0 を任意の mould $\psi \in \mathcal{L}_\mathcal{O}$ に置き換えて得られる $\mathbb{Q}$-線形写像を

$$\chi_\psi : \mathcal{L}_\mathcal{O} \to \mathcal{L}_\mathcal{O}$$

とおく．定義から明らかに $\chi_{\psi_0} = \chi_B$ である．Lie 代数 $\mathcal{L}_\mathcal{O}$ 上の Lie 代数射からなる $\mathbb{Q}$-ベクトル空間を $\mathrm{End}(\mathcal{L}_\mathcal{O})$ とする．

命題 3.1. 任意の $\psi \in \mathcal{L}_\mathcal{O}$ に対し，$\chi_\psi \in \mathrm{End}(\mathcal{L}_\mathcal{O})$ が成り立つ．

証明には，シャッフル型の multiple polylogarithm に関するシャッフル積の理論が鍵となる (詳細は論文にまとめる予定である)．ここから直ちに次がわかる．

系 3.2. (B1) は正しい．

これにより予想 2.4 は (B2) を残すのみになったが，これは今の所難しいようである．

複シャッフル Lie 代数の同型写像と weight 0 の mould

Lie 代数 $\mathfrak{ls}_\mathcal{O}$ から $\mathfrak{dm}_\mathcal{O}$ への Lie 代数同型写像からなる集合を $\mathrm{Isom}(\mathfrak{ls}_\mathcal{O}, \mathfrak{dm}_\mathcal{O})$ とする．$\mathrm{End}(\mathcal{L}_\mathcal{O})$ の部分集合である．これまでに扱ってきた Ecalle の同型写像 χ_E や (予想 2.4 を認めれば) Brown の写像 χ_B がその具体例である．以下では，$\mathrm{Isom}(\mathfrak{ls}_\mathcal{O}, \mathfrak{dm}_\mathcal{O})$ そのものの構造を決定するという問題[3]を議論する．特に，$\chi_\psi : \mathfrak{ls}_\mathcal{O} \to \mathfrak{dm}_\mathcal{O}$ の形で記述される Lie 代数同型写像の mould ψ の特徴付けという問題に焦点を絞る．

問題 3.3. 集合 $\{\psi \in \mathcal{L}_\mathcal{O} \mid \chi_\psi \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{ls}_\mathcal{O}, \mathfrak{dm}_\mathcal{O})\}$ を決定せよ．

これについて，mould ψ が 同型写像 $\chi_\psi \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{ls}_\mathcal{O}, \mathfrak{dm}_\mathcal{O})$ を与える必要条件として，depth 1 部分が $\psi^{(1)} = \frac{1}{x_1}$ をみたすことが確かめられる (証明は直接計算による)．

命題 3.4. $f \in \mathfrak{ls}_\mathcal{O}$ に対し，d を $f^{(d)}$ が非ゼロとなる最小の正整数とする．このとき，$\chi_\psi(f)$ が depth $d+1$ の複シャッフル方程式 (2.3) を満たすための必要十分条件は，$\psi \in \mathcal{L}_\mathcal{O}$ の depth 1 部分が $\psi^{(1)} = \frac{1}{x_1}$ となることである．

[3] 筆者たちはこの問題が明確に書かれている文献を知らないが，我々が original というわけではない．

命題3.4および weight 0 の mould ψ_0 が複シャッフル方程式(2.3)をみたすという Brown の観察 [1, Theorem 14.2] を合わせると，次のような予想にいたる．

予想 3.5. 次の (i), (ii) をみたす mould $\psi \in \mathcal{L}_{\mathcal{O},0}$ の集合を $\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ とする[4]:

(i) $\psi^{(1)} = \dfrac{1}{x_1}$,

(ii) 任意の整数 $d \geq 2$ と $i = 1, 2, \ldots, d-1$ に対し，

$$\psi^{\sharp}([1,\ldots,i] \sqcup\!\sqcup [i+1,\ldots,d]) = \psi([1,\ldots,i] * [i+1,\ldots,d]) = 0.$$

このとき，$\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}} \overset{?}{=} \{\psi \in \mathcal{L}_{\mathcal{O}} \mid \chi_\psi \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{ls}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{dm}_{\mathcal{O}})\}$ が成り立つ．すなわち，

$$\psi \in \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}} \overset{?}{\Longleftrightarrow} \chi_\psi \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{ls}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{dm}_{\mathcal{O}}).$$

予想3.5は問題3.3の解答といえるが，予想を確信するほどの理論的/数値的根拠があるわけではなく，間違っている可能性が高いことを申し添えておく．問題の出発点を明確にするために，あえて予想という形で述べた．予想3.5の信憑性はさておき，解集合 $\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ は重要な研究対象になりうる．以下，基本的な情報をまとめておく．

まず，$\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(d)} := \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{(d)}$ とおく．$\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}} = \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(1)} \supset \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(2)} \supset \cdots$ となる．$d \geq 2$ ならば，

$$\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(d)} = \mathfrak{dm}_{\mathcal{O}}^{(d)} \cap \mathcal{L}_{\mathcal{O},0}$$

であり，$\mathbb{Q}$-ベクトル空間となる．$\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(1)}$ は $\mathbb{Q}$-ベクトル空間でないが，任意の $\psi \in \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ と $\psi' \in \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(2)}$ について，その和は $\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ の元である:

$$\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}} \times \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(2)} \longrightarrow \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}, \quad (\psi, \psi') \longmapsto \psi + \psi'.$$

他方，$\psi, \psi' \in \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ ならば，$\psi - \psi' \in \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(2)}$ であることから，$\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ の元は modulo $\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(2)}$ で一意的に決まる (その depth 1 部分は $1/x_1$ であった)．二つの元 $\psi, \psi' \in \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ が modulo $\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(2)}$ で 0 でなければ，$\{\psi, \psi'\} \not\subset \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ であることもわかる．ゆえに，解集合 $\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ は Lie 代数ではない．一方，$\bullet \in \{B, E\}$ に対し，

$$\chi_\bullet : \prod_{d \geq 0} \mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^{d} = \mathfrak{ls}_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{L}_{\mathcal{O},0} \longrightarrow \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$$

であるので ($\bullet = B$ は予想)，weight 0 かつ depth d の線形複シャッフル方程式の解 $\mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^{d}$ ごとに，$\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(d)}$ の元を構成することができる (Parity result より，奇数 $d \geq 1$ に対し，$\mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^{d} = \{0\}$ であることに注意)．したがって，$\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(2)}$ は空でない．しかしながら，modulo $\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(2)}$ で 0 でない $\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ の元は一つも知られておらず，$\psi_0 \overset{?}{\in} \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ ([1, Theorem 14.2]) が予想されているのみである．

[4] Isom ではなく，LSOM のドイツ小文字である．良い記号が思いつかず，単に連結して $\mathfrak{lsdm}$ と表記してみたところ，それなら見た目が Isom に似ているという洒落で，この記号におちついた．ただし，Lie 代数をドイツ小文字で表す慣例もあるので，$\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ それ自身は Lie 代数でないことから，若干紛らわしい記号かとも思う（$\mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(2)}$ は Lie 代数）．

Ecalleの同型写像を分解する

予想3.5を信ずれば，Ecalleの同型写像 χ_E について，

$$\chi_E = \chi_\phi$$

となる $\phi \in \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}$ の存在が期待される．ここでは，ϕ の明示公式に関する研究の進捗を報告する．

まず，$\chi_B \neq \chi_E$ であること ([12, Theorem 1.3]) の証明から次の事実がわかる．

命題 3.6 ([12])**.** 整数 $d = 1, 2, 3$ に対し，$\phi^{(d)} = \psi_0^{(d)}$ となる．また，

$$\phi^{(4)} = \psi_0^{(4)} - \frac{1}{30} Q_4^{(4)}$$

が成り立つ．ただし，

$$Q_4^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \coloneqq \sum_{i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}} \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+3} - x_i)(x_{i+3} - x_{i+2})(x_{i+4} - x_i)} \in \mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^4.$$

depth 5 以上の ϕ の表示について，今回新たに得られた結果は以下である．

命題 3.7. 整数 $1 \leq d \leq 5$ に対し，

$$\phi^{(d)} = \psi_0^{(d)} - \frac{1}{30} \chi_B \left(Q_4\right)^{(d)}$$

であり，$\phi^{(6)} \neq \psi_0^{(6)} - \frac{1}{30} \chi_B \left(Q_4\right)^{(6)}$ が成り立つ．ただし，$Q_4 = (0, 0, 0, 0, Q_4^{(4)}, 0, \ldots)$.

予想2.4によれば $\chi_B(Q_4) \overset{?}{\in} \mathfrak{lsom}_{\mathcal{O}}^{(4)}$ であることに注意しておく．depth 6 部分 $\phi^{(6)} - \psi_0^{(6)} + \frac{1}{30} \chi_B \left(Q_4\right)^{(6)} \in \mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^6$ がどのように表示できるかは未解決であるが，以下のような特徴付けが得られている．

整数 $\ell \geq 0$ および $d \geq 0$ に対し，次の空間を考えよう．

$$\mathfrak{P}_\ell \mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^d = \{ f^{(d)} \in \mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^d \mid p_d^\ell f^{(d)} \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_d] \}.$$

ただし，

$$p_d = \prod_{j=1}^d x_j \prod_{1 \leq i < j \leq d} (x_i - x_j).$$

すなわち，$\mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^d$ の元のすべての極での位数を高々 ℓ 位に限定したもの ($\mathfrak{P}_\ell$ はフィルトレーション) である．このとき，

- $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^2 = \{0\}$,
- $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^4 = \mathbb{Q} Q_4^{(4)}$

であり，未解決な depth 6 部分は $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^6$ の一次元空間の基底として現れている．実際の計算では実数の精度計算を利用しているため，$\mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^6$ が本当に1次元であるかは確かめられていない．$\mathfrak{P}_\ell \mathfrak{ls}_{\mathcal{O},0}^d$ は有限次元であるが，この基底や次元を決定する問題はまだ大部分が未解決である．似たシチュエーションの問題（有理関数の極の位数に関するフィルトレーションについての次元を計算する問題）については，[2, Appendix] にいくつか結果があることを述べておく．

謝辞

木村は当該 RIMS 研究集会での発表にあたり，東北大学の大野泰生先生から旅費支援をいただきましたことに感謝いたします．本研究の遂行にあたり，木村は東北大学人工知能エレクトロニクス卓越大学院プログラムおよび JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2114，田坂は科研費 (18H01110，20K14294) による助成を受けています．

参考文献

[1] F. Brown, *Anatomy of an associator*, arXiv:1709.02765v1.

[2] F. Brown, *Zeta elements in depth 3 and the fundamental Lie algebra of the infinitesimal Tate curve*, Forum Math. Sigma 5 (2017), e1, 56 pp.

[3] J. Ecalle, *ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas: un premier bilan*, J. Théor. Nombres Bordeaux, 15 (2003), no. 2, 411–478.

[4] B. Enriquez, H. Furusho, *A stabilizer interpretation of double shuffle Lie algebras.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2018, no. 22, 6870–6907.

[5] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, Ann. of Math., Vol. 174 (2011), No. 1, 341–360.

[6] H. Furusho and N. Komiyama, *Kashiwara-Vergne and dihedral bigraded Lie algebras inmouldtheory*, to appear in Ann. Fac. Sc. Toulouse, arXiv:2003.01844.

[7] H. Furusho and N. Komiyama, *Notes on Kashiwara–Vergne and double shuffle Lie algebras*, arXiv:2211.09444.

[8] Y. Ihara, *The Galois representation arising from* $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ *and Tate twists of even degree, Galois groups over* $\mathbb{Q}$, 299–313, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 16, Springer, New York, 1989.

[9] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.

[10] 小見山 尚, MOULD 理論入門, RIMS Kôkyûroku No.2160, 126–170.

[11] N. Komiyama, *On properties of adari(pal) and ganit(pic)*, preprint, arXiv:2110.04834.

[12] N. Matthes and K. Tasaka, *On Ecalle's and Brown's polar solutions to the double shuffle equations modulo products*, Kyushu J. Math., 73(2) (2019), 337–356.

[13] G. Racinet, *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 95 (2002), 185–231.

[14] A. Salerno and L. Schnepps, *Mould theory and the double shuffle Lie algebra structure*, Periods in Quantum Field Theory and Arithmetic, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 314 (2020), Springer, 399–430.

[15] L. Schneps, *ARI,GARI, ZIG and ZAG: An introduction to Ecalle's theory of multiple zeta values*, arXiv:1507.01534v1.

Aiki Kimura
Mathematical Institute, Tohoku University, Sendai 980-8578, JAPAN
E-mail address: aiki.kimura.t2@dc.tohoku.ac.jp

Koji Tasaka
Department of Information Science & Technology, Aichi Prefectural University, Nagakute 480-1198, JAPAN
E-mail address: tasaka@ist.aichi-pu.ac.jp