On linear independence of multiple zeta values in positive characteristic

琉球大学・理学部数理科学科　三柴 善範
Yoshinori Mishiba
Department of Mathematical Sciences,
University of the Ryukyus

1　はじめに

本稿は，2022 年 5 月に開催された研究集会「多重ゼータ値の諸相」において筆者が行った講演の内容をまとめたものである．具体的には，正標数多重ゼータ値が張るベクトル空間に対する Thakur の基底予想について，Chieh-Yu Chang 氏および Yen-Tsung Chen 氏との共同研究 [7] で得られた結果を紹介している．

まずは標数 0 における状況を復習しよう．インデックス $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ で $s_1 \geq 2$ となるものに対し，多重ゼータ値は

$$\zeta(\mathfrak{s}) := \sum_{n_1 > \cdots > n_r \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}} \in \mathbb{R}$$

で表される実数のことであった．$\mathrm{wt}(\mathfrak{s}) := \sum_i s_i$ を $\mathfrak{s}$ の重さ，$\mathrm{dep}(\mathfrak{s}) := r$ を $\mathfrak{s}$ の深さという．また，$\mathrm{wt}(\mathfrak{s}) = \mathrm{dep}(\mathfrak{s}) = 0$ となる唯一のインデックスを $\emptyset$ で表し，$\zeta(\emptyset) := 1$ とおく．以下では，$\mathrm{wt}(\mathfrak{s}) = w$ のとき $\zeta(\mathfrak{s})$ を重さ w の多重ゼータ値と呼ぶことにする．$w \geq 0$ に対し，重さ w の多重ゼータ値が $\mathbb{Q}$ 上張るベクトル空間を $\mathfrak{Z}_w$ としよう．$\mathfrak{Z}_w$ の次元については，Zagier [23] により次の予想が与えられている:

予想 1.1 (Zagier の次元予想)**.** 任意の $w \geq 0$ に対し，$\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{Z}_w = d_w$ が成り立つ．ここで，d_w は

$$d_0 := 1, \quad d_1 := 0, \quad d_2 := 1, \quad d_w := d_{w-2} + d_{w-3} \ (w \geq 3)$$

で定まる数である．

Goncharov [11]，寺杣 [18]，Deligne-Goncharov [10] は，任意の $w \geq 0$ に対して $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{Z}_w \leq d_w$ が成り立つことを示した．しかし，逆側の不等式を示すのは難しい問題と考えられており，今のところ未解決である．

次に，$\mathfrak{Z}_w$ の基底を考えよう．$\mathcal{I}_w^{\mathrm{H}}$ を重さ w のインデックスで各成分が 2 または 3 からなるもの全体のなす集合とすると ($\mathcal{I}_0^{\mathrm{H}} = \{\emptyset\}$)，$\#\mathcal{I}_w^{\mathcal{H}} = d_w$ が成り立つことが確認できる．このとき，Hoffman [14] は次を予想した:

予想 1.2 (Hoffman の基底予想)**.** 任意の $w \geq 0$ に対し，$\zeta(\mathfrak{s})$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathcal{H}})$ は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathfrak{Z}_w$ の基底になる．

Brown [2] は，任意の $w \geq 0$ に対して $\zeta(\mathfrak{s})$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathcal{H}})$ が $\mathfrak{Z}_w$ を生成することを示した．しかし，これらが $\mathbb{Q}$ 上線型独立であるかどうかはやはり未解決である．また，任意に与えた重さ w の多重ゼータ値を，これら生

成元の線型結合で具体的に表すアルゴリズムも知られていない．以下では，予想 1.1, 1.2 の正標数の関数体類似を証明した論文 [7] の内容を紹介する．

2 正標数多重ゼータ値

q を素数 p の冪，θ を変数とする．$A := \mathbb{F}_q[\theta]$ を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の 1 変数多項式環，$k := \mathbb{F}_q(\theta)$ を A の商体，$k_\infty := \mathbb{F}_q((1/\theta))$ を k の無限素点に関する完備化とする．これらは $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ の正標数類似となる．この設定の下で，正標数の関数体上の多重ゼータ値を考えよう．

$\mathcal{I} := \bigsqcup_{r \geq 0} \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ をインデックス全体のなす集合とする．インデックス $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}$ に対し，Thakur は [19] において正標数 (∞ 進) 多重ゼータ値 $\zeta_A(\mathfrak{s})$ を次で定義した ($s_1 = 1$ でも収束する):

$$\zeta_A(\mathfrak{s}) := \sum_{\substack{a_i \in A\colon \text{monic} \\ \deg a_1 > \cdots > \deg a_r}} \frac{1}{a_1^{s_1} \cdots a_r^{s_r}} \in k_\infty.$$

標数 0 のときと同様に，重さ w の正標数多重ゼータ値が k 上張るベクトル空間を

$$\mathcal{Z}_w := \langle \zeta_A(\mathfrak{s}) \mid \mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w \rangle_k \subset k_\infty$$

と定義する．ここで，$\mathcal{I}_w \subset \mathcal{I}$ は重さ w のインデックス全体からなる部分集合を表す．$\mathcal{Z}_w$ の次元については，Todd [22] により次の予想が与えられた (元となる学位論文の公開は 2015 年):

予想 2.1 (Todd の次元予想)**.** 任意の $w \geq 0$ に対し，$\dim_k \mathcal{Z}_w = d'_w$ が成り立つ．ここで，d'_w は

$$d'_w := \#\mathcal{I}_w \ (0 \leq w < q), \quad d'_q := \#\mathcal{I}_q - 1, \quad d'_w := \sum_{i=1}^{q} d'_{w-i} \ (w > q)$$

で定まる数である．

次に，$\mathcal{Z}_w$ の基底を考えよう．各 $w \geq 0$ に対し

$$\mathcal{I}_w^{\mathrm{T}} := \{(s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}_w \mid 1 \leq s_i \leq q \ (\forall i),\ s_r < q\}$$

とおくと ($\mathcal{I}_0^{\mathrm{T}} = \{\emptyset\}$)，$\#\mathcal{I}_w^{\mathrm{T}} = d'_w$ が成り立つことが確認できる．このとき，Thakur [21] は次を予想した:

予想 2.2 (Thakur の基底予想)**.** 任意の $w \geq 0$ に対し，$\zeta_A(\mathfrak{s})$ ($\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}}$) は k ベクトル空間 $\mathcal{Z}_w$ の基底になる．

Ngo Dac [17] は，任意の $w \geq 0$ に対して $\zeta_A(\mathfrak{s})$ ($\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}}$) が $\mathcal{Z}_w$ を生成すること，特に $\dim_k \mathcal{Z}_w \leq d'_w$ が成り立つことを示した．さらにその証明から，任意の正標数多重ゼータ値が与えられたときに，それを $\zeta_A(\mathfrak{s})$ ($\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}}$) の A 上の線型結合で表すアルゴリズムも得られている．一方で，[17] では線型独立性に関する部分的な結果も示されているが，Thakur の基底予想の完全な解決には至っていなかった．このような背景の下，筆者は Chang 氏および Chen 氏と共同で，[7] においてこれらの予想を肯定的に解決した．

定理 2.3 ([7])**.** 予想 2.1, 2.2 は正しい．

注意 2.4. [7] の発表と同時期に，[15] において別のグループも同様の結果の証明を発表した．[15] ではさらに，原田 [13] により定義された正標数交代多重ゼータ値が張る空間の基底も与えている．一方で，[7] では各アルゴリズムをより具体的に記述しており，($\#\mathcal{I}_w - d'_w$) 個の独立な k 線型関係式を明示的に与えている．これは，関係式の生成系に対する Todd [22] による予想 (ただし ‘$\mathscr{B}^*$ 版’) の肯定的な解決を意味する．

定理 2.3 の応用として，v 進多重ゼータ値が張る空間の次元の上からの評価を得ることができる．このことを説明しよう．$v \in A$ を既約でモニックな多項式とし，k_v で k の v 進完備化を表す．筆者は Chang 氏との共同研究 [8] において，v 進多重ゼータ値 $\zeta_A(\mathfrak{s})_v \in k_v$ を定義した．$\mathcal{Z}_{v,w} \subset k_v$ を重さ w の v 進多重ゼータ値が k 上張るベクトル空間とする．さらに，$\mathcal{Z} \subset k_\infty$ (resp. $\mathcal{Z}_v \subset k_v$) を全ての正標数 ($\infty$ 進) 多重ゼータ値 (resp. v 進多重ゼータ値) が k 上張るベクトル空間とする．このとき，$\zeta_A(\mathfrak{s})$ を $\zeta_A(\mathfrak{s})_v$ に対応させる well-defined な k 線型写像 $\mathcal{Z} \twoheadrightarrow \mathcal{Z}_v$ が存在する ([8])．さらに，この全射は積と可換であることが [6] において示されている．よって，$\mathcal{Z}_w \cdot \mathcal{Z}_{w'} \subset \mathcal{Z}_{w+w'}$ ([20]) および $\zeta_A(q-1)_v = 0$ ([12]) と合わせると，次の系を得る:

系 2.5. 任意の $w \geq 0$ に対し，$\dim_k \mathcal{Z}_{v,w} \leq d'_w - d'_{w-(q-1)}$ が成り立つ．ただし，$n < 0$ のときは $d'_n := 0$ と定める．

注意 2.6. [6] では系 2.5 の不等式は等式になると予想しているが，今のところ証明されていない．また，$\mathcal{Z}_{v,w}$ を k 上生成するような $(d'_w - d'_{w-(q-1)})$ 個の v 進多重ゼータ値も見つかっていない．

本稿の残りでは，定理 2.3 の証明の概略を紹介する．証明のポイントは，正標数多重ゼータ値の代わりに Carlitz 多重ポリログを考えることである．$\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}$ に対し，Chang は [4] において Carlitz 多重ポリログを

$$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(z_1, \ldots, z_r) := \sum_{d_1 > \cdots > d_r \geq 0} \frac{z_1^{q^{d_1}} \cdots z_r^{q^{d_r}}}{L_{d_1}^{s_1} \cdots L_{d_r}^{s_r}}$$

で定義した．ここで，$d \geq 0$ に対して $L_d := \prod_{1 \leq i \leq d}(\theta - \theta^{q^i}) \in A$ とおいた．以下では，この関数の特殊値 $\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) := \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(1, \ldots, 1) \in k_\infty$ を考える (実際に収束する)．また，インデックスの集合も $\mathcal{I}_w^{\mathrm{T}}$ とは別に

$$\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}} := \{(s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}_w \,|\, q \nmid s_i \ (\forall i)\}$$

を考える ($\mathcal{I}_0^{\mathrm{ND}} = \{\emptyset\}$)．このとき，$\#\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}} = \#\mathcal{I}_w^{\mathrm{T}}$ であることが確認できる．この集合は，[17] で $w \leq 2q-2$ の場合に Thakur の基底予想を証明する際に用いられたものである．定理 2.3 の証明は，大きく 2 つのステップに分かれる:

ステップ 1　任意の $w \geq 0$ に対し，$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ ($\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}}$) は k ベクトル空間 $\mathcal{Z}_w$ を生成する．

ステップ 2　任意の $w \geq 0$ に対し，$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ ($\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}}$) は k 上線型独立である．

注意 2.7. 定理 2.3 がこの 2 つのステップから導かれることは明らかであろう．ここで，[17] の結果から，ステップ 1 の代わりに「任意の $w \geq 0$ と $\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}}$ に対し，$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) \in \mathcal{Z}_w$」という弱い主張を示せば十分であるように思える．しかし，ステップ 2 の証明でステップ 1 の結果を使うので，ステップ 1 をこのような主張にする必要がある．

3　ステップ 1 の証明の概略

$\mathcal{Z}_w$ の部分空間を $\mathcal{Z}_w^{\mathrm{T}} := \langle \zeta_A(\mathfrak{s}) \,|\, \mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}} \rangle_k$ で定め，さらに $\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ を使って生成される k_∞ の k 部分空間を以下のように定義する:

$$\mathcal{L}_w := \langle \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) \,|\, \mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w \rangle_k, \quad \mathcal{L}_w^{\mathrm{T}} := \langle \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) \,|\, \mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}} \rangle_k, \quad \mathcal{L}_w^{\mathrm{ND}} := \langle \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) \,|\, \mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}} \rangle_k.$$

各空間の関係は次の図式のようになる:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_w & & \mathcal{L}_w & \\
\mathcal{Z}_w^{\mathrm{T}} \arrow[u, hook, "(1)"] \arrow[r, dotted, dash, "(2)"] & \mathcal{L}_w^{\mathrm{T}} \arrow[ur, hook, "(3)"] & & \mathcal{L}_w^{\mathrm{ND}} \arrow[ul, hook', "(4)"']
\end{tikzcd}$$

上の図式の (1), (2), (3), (4) が全て等号になることを示せば，ステップ 1 が証明されたことになる．

(1) ここが等号であることは，[17] の主結果そのものである．

(2) インデックス $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}$ で $s_i \leq q$ $(\forall i)$ となるものに対して，$\zeta_A(\mathfrak{s}) = \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ が成り立つことが知られている (例えば [19])．特に，(2) の点線は等号になる．

(3) ここが等号であることは，(1) の議論の 'Li 版' を考えることで示される．[7] では，'Li 版' と [17] における 'ζ_A 版' の両方を同時に扱う形で証明している．ただし，[17] の議論を大幅に簡略化し，かつアルゴリズムをより明示的に与えている．

(4) $m \geq 0$ に対し，$q^{\{m\}} := (q, \ldots, q)$ で q を m 個並べたインデックスを表す．$\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}}$ の要素と $\mathcal{I}_w^{\mathrm{T}}$ の要素は,

$$\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}} \ni \mathfrak{s} = (m_1 q + n_1, \ldots, m_r q + n_r) \longleftrightarrow \mathfrak{s}' = (q^{\{m_1\}}, n_1, \ldots, q^{\{m_r\}}, n_r) \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}} \quad (m_i \geq 0,\ 1 \leq n_i < q)$$

により 1 対 1 に対応している．$\mathfrak{s} = (m_1 q + n_1, \ldots, m_r q + n_r) \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}}$ のときに (3) で与えた明示的なアルゴリズムを適用すると，$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ は

$$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) = (-1)^{m_1 + \cdots + m_r} \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}'}(\mathbf{1}) + L_1 \sum_{\mathfrak{n} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}}} a_{\mathfrak{n}} \mathrm{Li}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{1}) \quad (\exists a_{\mathfrak{n}} \in \mathbb{F}_p[L_1])$$

という形で表されることが分かる ($L_1 = \theta - \theta^q$)．このことから，(3) のアルゴリズムで $\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}})$ を $\mathrm{Li}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{1}) = \zeta_A(\mathfrak{n})$ $(\mathfrak{n} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{T}})$ の $\mathbb{F}_p[L_1]$ 上の線型結合で表したときの係数行列は，$\mathrm{Mat}_{d'_w}(k)$ において可逆となる．

4 ステップ 2 の証明の概略

$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}})$ が k 上線型独立であることを，重さ $w \geq 0$ に関する帰納法で証明する．$w = 0$ のときは，$\mathcal{I}_0^{\mathrm{ND}} = \{\emptyset\}$ かつ $\mathrm{Li}_{\emptyset}(\mathbf{1}) = 1$ より成り立つ．

$w \geq 1$ とし，$w' < w$ に対しては $\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_{w'}^{\mathrm{ND}})$ が k 上線型独立であると仮定する．$\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}}$ の部分集合 $\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0}$ を

$$\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0} := \{(s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}} \mid s_2, \ldots, s_r \text{は } q-1 \text{ で割り切れる}\}$$

により定める．また，$\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathcal{I}$ と $M \subset \mathcal{I}$ に対して

$$\mathscr{I}(\mathfrak{s}) := \{\emptyset, (s_1), (s_1, s_2), \ldots, (s_1, \ldots, s_r)\} \text{ かつ } \mathscr{I}(M) := \bigcup_{\mathfrak{s} \in M} \mathscr{I}(\mathfrak{s})$$

とおく．

以上の準備の下で，線型独立性を証明しよう．t を新たな変数とし，k 上の線型関係式

$$\sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}}} \alpha_{\mathfrak{s}}(\theta) \mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) = 0 \quad (\alpha_{\mathfrak{s}} = \alpha_{\mathfrak{s}}(t) \in \mathbb{F}_q(t))$$

が与えられたとする．このとき，帰納法の仮定，$\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1})$ の周期的解釈 [4]，ABP-criterion [1]，および [4], [5], [9], [16] で使われた手法を用いると，

$$\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}} \setminus \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0} \text{ ならば } a_{\mathfrak{s}} = 0$$

が成り立つ．さらに，$\varepsilon = \sum_i c_i\theta^i \in \mathbb{F}_q(t)[\theta]$ $(c_i \in \mathbb{F}_q(t))$ に対して $\varepsilon^{(1)} := \sum_i c_i\theta^{qi}$ と定めると，

$$\varepsilon_{\mathfrak{s}}^{(1)} = \varepsilon_{\mathfrak{s}}(t-\theta)^{w-\mathrm{wt}(\mathfrak{s})} + \sum_{\substack{s'>0 \\ (\mathfrak{s},s')\in\mathscr{I}(\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0})}} \varepsilon_{(\mathfrak{s},s')}(t-\theta)^{w-\mathrm{wt}(\mathfrak{s})} \quad (\mathfrak{s} \in \mathscr{I}(\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0})) \tag{E_w}$$

かつ

$$\varepsilon_{\mathfrak{s}} = \alpha_{\mathfrak{s}} \quad (\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0})$$

を満たす多項式の組 $(\varepsilon_{\mathfrak{s}})_{\mathfrak{s}\in\mathscr{I}(\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0})} \in (\mathbb{F}_q(t)[\theta])^{\mathscr{I}(\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0})}$ が存在することが示される．$\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0}$ のときにも $\alpha_{\mathfrak{s}} = 0$ となることを示すには，次の補題を用いる (証明は省略):

補題 4.1. 連立方程式 (E_w) の $(\mathbb{F}_q(t)[\theta])^{\mathscr{I}(\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0})}$ における解全体を $\mathscr{X}_w$ とする．このとき $\mathscr{X}_w$ は $\mathbb{F}_q(t)$ ベクトル空間をなし，$(q-1) \nmid w$ のとき $\mathscr{X}_w = \{0\}$，$(q-1) \mid w$ のとき $\dim_{\mathbb{F}_q(t)} \mathscr{X}_w = 1$ となる．

この補題は w に関する帰納法で示される．$(q-1) \mid w$ のときには，生成元の形まで特定しながら議論を行うことが重要となる．補題 4.1 より，$(q-1) \nmid w$ のときは任意の $\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0}$ に対して $\alpha_{\mathfrak{s}} = 0$ となる．以下，$(q-1) \mid w$ とする．ここで，$\widetilde{\pi} \in \sqrt[q-1]{-\theta} \cdot k_\infty^\times$ を Carlitz 周期とすると，Carlitz [3] により $\widetilde{\pi}^w \in \zeta_A(w) \cdot k^\times \subset \mathcal{Z}_w$ となることが示されている．ステップ 1 より $\mathcal{Z}_w = \mathcal{L}_w^{\mathrm{ND}}$ なので，

$$\sum_{\mathfrak{s}\in\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}}} \beta_{\mathfrak{s}}(\theta)\,\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) = \widetilde{\pi}^w$$

を満たす $\beta_{\mathfrak{s}} = \beta_{\mathfrak{s}}(t) \in \mathbb{F}_q(t)$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}})$ が存在する．$\alpha_{\mathfrak{s}}$ に対する議論と同様にして，$\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}} \setminus \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0}$ ならば $\beta_{\mathfrak{s}} = 0$ であることが従い，さらに連立方程式 (E_w) の解 $(\varepsilon'_{\mathfrak{s}}) \in (\mathbb{F}_q(t)[\theta])^{\mathscr{I}(\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0})}$ が存在して任意の $\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0}$ に対して $\varepsilon'_{\mathfrak{s}} = \beta_{\mathfrak{s}}$ となる．ここで，$\widetilde{\pi} \neq 0$ より $\beta_{\mathfrak{s}}$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0})$ の少なくとも 1 つは 0 でないので，補題 4.1 よりある $\gamma \in \mathbb{F}_q(t)$ が存在して $(\varepsilon_{\mathfrak{s}}) = \gamma(\varepsilon'_{\mathfrak{s}})$ となる．よって

$$0 = \sum_{\mathfrak{s}\in\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0}} \alpha_{\mathfrak{s}}(\theta)\,\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) = \gamma(\theta) \sum_{\mathfrak{s}\in\mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0}} \beta_{\mathfrak{s}}(\theta)\,\mathrm{Li}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{1}) = \gamma(\theta)\widetilde{\pi}^w$$

となり，$\gamma = 0$ および $\alpha_{\mathfrak{s}} = 0$ $(\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_w^{\mathrm{ND}_0})$ が得られる．

謝辞

研究集会を主催し，筆者に講演の機会を与えてくださった世話人の田坂浩二氏に感謝いたします．本研究は JSPS 科研費 JP18K13398 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] G. W. Anderson, W. D. Brownawell and M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special* Γ*-values in positive characteristic*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 1, 237–313.

[2] F. Brown, *Mixed Tate motives over* $\mathbb{Z}$, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 949–976.

[3] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. **1** (1935), no. 2, 137–168.

[4] C.-Y. Chang, *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic*, Compositio Math. **150** (2014), 1789–1808.

[5] C.-Y. Chang, *Linear relations among double zeta values in positive characteristic*, Camb. J. Math. **4** (2016), no. 3, 289–331.

[6] C.-Y. Chang, Y.-T. Chen and Y. Mishiba, *Algebra structure on multiple zeta values in positive characteristic*, Camb. J. Math. **10** (2022), no. 4, 743–783.

[7] C.-Y. Chang, Y.-T. Chen and Y. Mishiba, *On Thakur's basis conjecture for multiple zeta values in positive characteristic*, `https://arxiv.org/abs/2205.09929`.

[8] C.-Y. Chang and Y. Mishiba, *On a conjecture of Furusho over function fields*, Invent. math. **223** (2021), 49–102.

[9] C.-Y. Chang, M. A. Papanikolas and J. Yu, *An effective criterion for Eulerian multizeta values in positive characteristic*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **21** (2019), no. 2, 405–440.

[10] P. Deligne and A. B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 1, 1–56.

[11] A. B. Goncharov, *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, `https://arxiv.org/abs/math/0103059`.

[12] D. Goss, *v-adic zeta functions, L-series, and measures for function fields. With an addendum*, Invent. Math. **55** (1979), no. 2, 107–119.

[13] R. Harada, *Alternating multizeta values in positive characteristic*, Math. Z. **298** (2021), no. 3–4, 1263–1291.

[14] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[15] B. H. Im, H. Kim, K. N. Le, T. Ngo Dac and L. H. Pham, *Zagier-Hoffman's conjectures in positive characteristic*, `https://arxiv.org/abs/2205.07165`.

[16] Y.-L. Kuan and Y.-H. Lin, *Criterion for deciding zeta-like multizeta values in positive characteristic*, Exp. Math. **25** (2016), no. 3, 246–256.

[17] T. Ngo Dac, *On Zagier-Hoffman's conjectures in positive characteristic*, Ann. of Math. (2), **194** (2021), no. 1, 361–392.

[18] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149** (2002), no. 2, 339–369.

[19] D. S. Thakur, *Function field arithmetic*, World Scientific Publishing, River Edge NJ, 2004.

[20] D. S. Thakur, *Shuffle relations for function field multizeta values*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 11, 1973–1980.

[21] D. S. Thakur, *Multizeta values for function fields: a survey*, J. Théor. Nombres Bordeaux **29** no. 3 (2017), 997–1023.

[22] G. Todd, *A Conjectural Characterization for* $\mathbb{F}_q(t)$*-Linear Relations between Multizeta Values*, J. Number Theory **187**, 264–287 (2018).

[23] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in ECM volume, Progress in Math., **120** (1994), 497–512.