楕円曲線の退化と深さフィルトレーション

寺杣友秀

目次

1. 多重ゼータ値の深さフィルトレーション

1.1. **Broadhurst-Kreimer の予想.** $\mathcal{Z}$ をモチーフ的多重ゼータ値で $\mathbf{Q}$ 上生成される環とし、$\overline{\mathcal{Z}}$ を $\mathcal{Z}$ をモチビックゼータ値 $\zeta_M(2)$ で生成されたイデアルによる剰余環とする。このとき $\mathcal{Z}$ にはいる重さによる次数付けは $\overline{\mathcal{Z}}$ 上の次数付けを誘導する。その次数 N 部分を $\overline{\mathcal{Z}_N}$ と書く。この上に深さによるフィルトレーション $\overline{\mathcal{Z}}_N^{\leq d}$ を考え、そのフィルトレーションにともなう次数加群を

$$\overline{\mathcal{Z}}_N^d = \overline{\mathcal{Z}}_N^{\leq d}/\overline{\mathcal{Z}}_N^{\leq d-1}$$

とおく。この次元に関しては、次の Broadhurst-Kerimer 予想がある。

$$\Phi(s,t) = \sum_{N,d} (\dim_{\mathbf{Q}} \overline{\mathcal{Z}}_N^d) s^N t^d = \frac{1}{1 - \mathbf{O}t + \mathbf{S}t^2 - \mathbf{S}t^4}$$

ここで、

$$\mathbf{O}(s) = \frac{s^3}{1-s^2}, \quad \mathbf{S}(s) = \frac{s^{12}}{(1-s^4)(1-s^6)}$$

である。ここで注目すべき点は母関数 $\mathbf{S}(s)$ は楕円尖点形式の次元に関する母関数となっている点である。ここに現れる $\Phi(s,t)$ を BK 母関数と呼ぶことにしよう。この報告の目的は予想されている BK 母関数をたよりにモチーフ的ガロア群にはいるであろう混合楕円モチーフからのフィルトレーションと深さフィルトレーションの関係を Deligne cohomology の観点から明らかにしようとする試みである。この報告には、いくつかの問題が提起されているが、線形代数の問題ともいえる、問題 5.3 が最も本質的である。松本眞氏、リチャード・ハイン氏には議論を通じて様々な関連することを教えていただいたことをここで感謝いたします。また、関連する話題としてカル・ガングル・シュネプスによ

り、類似の組み合わせ論的なフィルトレーションの構成法がなされていることを注意しておく。

2. 楕円曲線の退化と基本群

2.1. 基本群の Betti 実現. $\mathcal{M}_{1,k}$ を種数が 1 の曲線とその上の k 個の点 $(E, s_1, \dots, s_k)$ のもモジュライ空間とする。ここで

$$\mathcal{M}_{1,3} \xrightarrow{f_{23}} \mathcal{M}_{1,2} \xrightarrow{f_{12}} \mathcal{M}_{1,1}$$

というモジュライの列を考えてそれらの安定コンパクト化を

$$\overline{\mathcal{M}_{1,3}} \xrightarrow{f_{23}} \overline{\mathcal{M}_{1,2}} \xrightarrow{f_{12}} \overline{\mathcal{M}_{1,1}}$$

とする。さらに $f_{13} = f_{12} \circ f_{23}$ とする。$\overline{\mathcal{M}_{1,2}} \to \overline{\mathcal{M}_{1,1}}$ は普遍楕円曲線族の blow up と見ることができる。その普遍切断 s_1 を

$$\overline{\mathcal{M}_{1,1}} \xrightarrow{s_1} \overline{\mathcal{M}_{1,2}}$$

とおく。$\infty_1 \in \overline{\mathcal{M}_{1,1}} - \mathcal{M}_{1,1}$ とする。このとき $f_{12}^{-1}(\infty_1)$ は結節点をもつ有理曲線 E_∞ となっている。その特異点を ∞_2 とおく。∞_2 の十分小さい近傍では $f_{12}^{-1}(\infty_1)$ は二つの成分 D_1, D_2 をもつ因子となる。

$\overline{\mathcal{M}_{1,3}} \to \overline{\mathcal{M}_{1,2}}$ は 2 点が印付けされた楕円曲線の普遍族で普遍切断を

$$\overline{\mathcal{M}_{1,2}} \xrightarrow{s_1, s_2} \overline{\mathcal{M}_{1,3}}$$

とおく。さらに $f_{23}^{-1}(\infty_2)$ とすると、これは二つの有理曲線 C_1, C_2 を成分としてもつ安定曲線で普遍切断 s_1, s_2 はそれぞれ C_1, C_2 の非特異なところで交わっている。

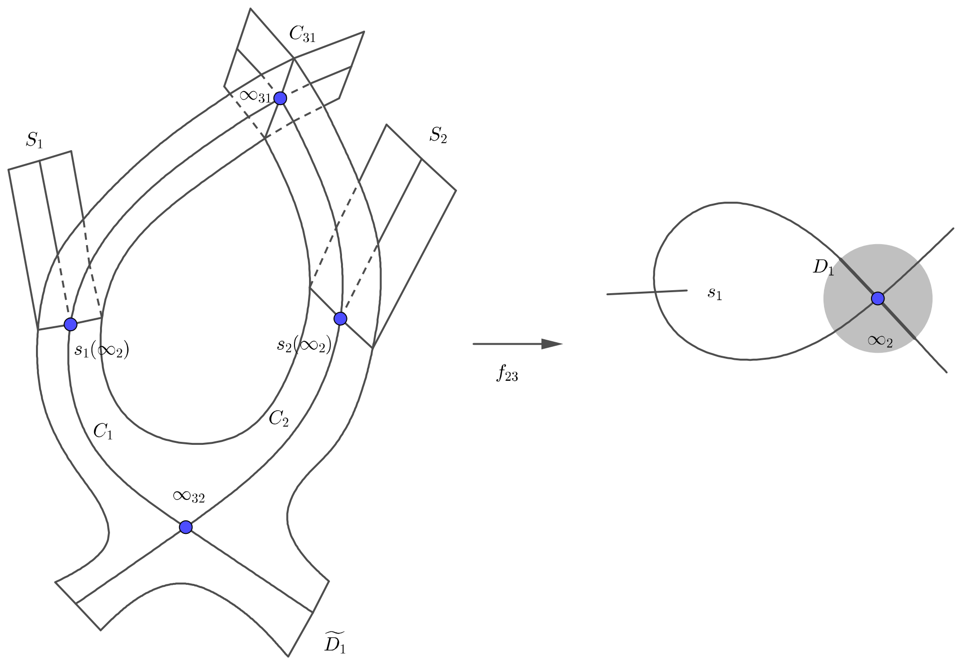

Figure 1. $\widetilde{D_1}, S_1, S_2$

普遍切断と $f_{23}^{-1}(\infty_2)$ との交点を $s_1(\infty_2), s_2(\infty_2)$ とおく。$\overline{\mathcal{M}_{13}}$ の因子 $\widetilde{D_1}$ を

$$\widetilde{D_1} = \overline{f_{23}^{-1}(D_1 - D_2)}^0 \subset f_{31}^{-1}(\infty_1)$$

と定めると、図 1 のように、D_1 上の曲線族であって曲線 C_{31} にそって特異点をもつ。また、$C_1 \cap C_2 = \{\infty_{31}, \infty_{32}\}$ とおくとこのとき $C_{31} \cap f_{23}^{-1}(\infty_2)$ が ∞_{31} となるように番号付けしておく。さらに D_{31} を ∞_{31} における $\overline{\mathcal{M}_{1,3}}$ の近傍として、$D_{31}^* = D_{31} \cap \mathcal{M}_{1,3}$ とする。$\overline{\mathcal{M}_{1,1}}$ の ∞ における近傍 D をとり $D^* = D \cap \mathcal{M}_{1,1}$ とおく。さらに $D_{31}^* \to D^*$ の切断 $s : D^* \to D_{31}^*$ をとる。

命題 2.1. 上の記号のもとで

$$\pi_1(D_{31}^*, x) \simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \quad \pi_1(D^*, x) \simeq \mathbf{Z}$$

となる。またという可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} D^* & \xrightarrow{s} & D_{13}^* & \xrightarrow{i_3} & \mathcal{M}_{1,3} \\ & & \pi_D \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{M}} \\ & & D^* & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{M}_{1,1} \end{array}$$

さて $\mathcal{E} = \overline{\mathcal{M}_{1,4}} \xrightarrow{f_{34}} \overline{\mathcal{M}_{1,3}}$ を考えると、これは $\overline{\mathcal{M}_{1,3}}$ の普遍楕円曲線族の blow up となっている。その普遍切断を

$$\overline{\mathcal{M}_{1,3}} \xrightarrow{s_1, s_2, s_3} \overline{\mathcal{M}_{1,4}}$$

とおく。今後とくに混乱のない限り s_1, s_2, s_3 と記号を区別しないで用いることにする。$\mathcal{M}_{1,3}$ の点 $x = (\mathcal{E}_x, s_1(x), s_2(x), s_3(x))$ における普遍楕円曲線族のファイバーから一点を除いた曲線 $\mathcal{E}_x^0 = \mathcal{E}_x - \{s_1(x)\}$ の基本亜群を $\pi_1(\mathcal{E}_x^0, s_2(x), s_3(x))$ として、その群環を

$$\mathcal{U}_B(\mathcal{E}_x^0) = \mathbf{Q}\langle \pi_1(\mathcal{E}_x^0, s_2(x), s_3(x)) \rangle$$

を考えると $x \in \mathcal{M}_{1,3}$ でパラメトライズされた局所系となっている。$\mathcal{U}_B(\mathcal{E}_x^0)$ に添加イデアル（augmentation ideal）I の冪 $E^n = I^n$ によるによるフィルトレーション $\{E^n\}$ がはいる。このフィルトレーションをを楕円フィルトレーションという。$\mathcal{U}_B(\mathcal{E}_x^0)$ の $\{E^n\}$ に関する完備化を $\widehat{\mathcal{U}_B(\mathcal{E}_x^0)}$ と書く。

2.2. 基本群のド・ラム実現, 深さフィルトレーションとの関係.

ここでは $\widehat{\mathcal{U}_B(\mathcal{E}_x^0)}$ の de Rham 基本群を考える。

2.2.1. 退化楕円曲線の基本群と楕円フィルトレーション.

∞_{31} の無限小に近い点 x における普遍楕円曲線のファイバー $\mathcal{E}_x^0$ における微分形式のなす DGA は van Kampen の定理により次のように記述される。

まず 3 つの有理曲線 C_0, C_1, C_2 および 3 つの円環 A_{01}, A_{02}, A_{12} を考える。それぞれの微分形式のなす環の部分環 $\Omega_{C_0}^*, \Omega_{C_1}^*, \Omega_{C_2}^*$ および $\Omega_{A_{01}}^*, \Omega_{A_{02}}^*, \Omega_{A_{12}}^*$ を

$$\Omega_{C_i}^* = \langle u_i, \omega_{01}, \omega_{02} \rangle \quad (i = 0) \quad \Omega_{C_i}^* = \langle u_i, \omega_i \rangle \quad (i = 1, 2)$$
$$\Omega^*(A_{ij}) = \langle p_{ij}, r_{ij} \rangle$$

と定義する。ただし u_i, p_{ij} は微分次数環の単位元とする。さらに微分次数環準同型 $\varphi_{i,j} : \Omega^*_{C_i} \to \Omega^*_{A_{ij}}$ を次のように定義する。

$$\varphi_{ij} : \Omega^*_{C_0} \to \Omega^*_{A_{0i}} : \omega_{0i} \mapsto r_{0i}$$
$$\varphi_{ij} : \Omega^*_{C_i} \to \Omega^*_{A_{ij}} : \omega_i \mapsto r_{ij}$$

ただし $r_{ij} = r_{ji}$ とする。ここで Tate degree を次のように定める。

$$\deg(u_i) = \deg(p_{ij}) = 0, \quad \deg(\omega_{0i}) = \deg(\omega_i) = \deg(r_{ij}) = 1$$

二重複体

$$\Omega^*_{C_0} \oplus \Omega^*_{C_1} \oplus \Omega^*_{C_2} \xrightarrow{\varphi} \Omega^*_{A_{01}} \oplus \Omega^*_{A_{02}} \oplus \Omega^*_{A_{12}}$$

の全複体 $\Omega^*(\mathcal{E}^0_x)$ を考えると Alexander-Whiteny rule による乗法で微分次数環になる。ここで φ は

$$\varphi = \varphi_{01} + \varphi_{02} + \varphi_{12} - \varphi_{10} - \varphi_{20} - \varphi_{21}$$

とする。上の微分次数環 $\Omega^*(\mathcal{E}^0_x)$ は無限に境界に近い点におけるファイバ $\mathcal{E}^0_x$ の微分次数環となる。

微分次数環の準同型 $\Omega^*(\mathcal{E}^0_x) \to A^*_0$ は自然な添加写像 $\epsilon : A^0 \to \mathbf{Q}$ と協調的である。したがって添加写像 ϵ に関するバー複体及びその cohomology の準同型

$$B(\Omega^*(\mathcal{E}^0_x)) \to B(A^*_0), \quad H^0(B(\Omega^*(\mathcal{E}^0_x))) \to H^0(B(A^*_0)) \tag{2.1}$$

が得られる。二つ目の写像はホップ代数の写像となる。

定義 2.2. $H^0(B(\Omega^*(\mathcal{E}^0_x)))$ には *bar complex* の構成で現れる *bar filtration* が入るがこれを楕円フィルトレーションという。この楕円フィルトレーションの像として $H^0(B(A^*_0))$ のフィルトレーションが定まるが、これも楕円フィルトレーションという。

$\omega_{01} = \dfrac{dx}{x}, \omega_{01} - \omega_{02} = \dfrac{dx}{x-1}$ となる座標を C_0 上でとれば

$$H^0(B(A^*_0)) = \mathbf{Q}\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{x-1} \rangle$$

という同一視ができる。右辺上で楕円フィルトレーションは以下のように記述される。

命題 2.3. $\mathbf{Q}\langle \dfrac{dx}{x}, \dfrac{dx}{1-x} \rangle$ の非可換単項式 m に対して楕円フィルトレーションを

$$\mathrm{wt}_E(\frac{dx}{x}) = 1, \quad \mathrm{wt}_E(\frac{dx}{1-x}) = 2$$

となるように乗法的に定める。$\mathrm{wt}_E(m) \leq e$ となる非可換単項式 m で生成される部分空間によるフィルトレーションは楕円フィルトレーションと一致する。

定義 2.4. $\mathbf{Q}\langle \dfrac{dx}{x}, \dfrac{dx}{1-x} \rangle$ の非可換単項式に対して深さを

$$\mathrm{dep}(\frac{dx}{x}) = 0, \quad \mathrm{dep}(\frac{dx}{1-x}) = 1$$

となるように乗法的に定め、$\mathrm{dep}(m) \leq d$ となる非可換単項式 m で生成される部分空間によるフィルトレーションを深さフィルトレーションとして定める。

非可換単項式 m に対して、

$$\mathrm{wt}_E(m) = \mathrm{dep}(m) + \mathrm{wt}(m),$$

なる等号をえる。ここで $\mathrm{wt}(e_0^*) = \mathrm{wt}(e_1^*) = 1$ であり、$\mathrm{dep}(e_0^*) = 0, \mathrm{dep}(e_1^*) = 1$ である。

2.3. モチビック多重ゼータ値と Deligne cohomology. $X^0 = \pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ とおく。モチビック多重ゼータ値の深さフィルトレーションについて思い出そう。$\mathcal{U}_B(X^0) = \mathbf{Q}\langle\pi_1(X^0, \vec{01}, \vec{10})\rangle$ をその添加イデアルで完備化した $\widehat{\mathcal{U}_B(X^0)}$ については、その混合テイト・モチーフ版 $\widehat{\mathcal{U}_M(X^0)}$ を定義することができる。$\widehat{\mathcal{U}_B(X^0)}$ 及び $\widehat{\mathcal{U}_{dR}(X^0)}$ はそれぞれベッチ実現、ド・ラム実現となっている。また $\widehat{\mathcal{U}_M(X^0)}$ の双対 $\mathcal{O}_M(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$ も混合 Tate モチーフとなっている。従って混合テイトモチーフの $\{B, dR\}$ をファイバー関手とする混合テイトモチーフの淡中基本群を考えるとホップ代数 $\mathcal{O}_{B.dR}(MTM)$ を考えることができる。$\mathcal{O}_{B,dR}(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$ への余作用を考えることにより、

$$\mathcal{O}_{dR}(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) \to \mathcal{O}_B(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) \otimes \mathcal{O}_{B,dR}(MTM) \tag{2.2}$$

なる準同型をえる。さらに $[0, 1] \in \widehat{\mathcal{U}_B(X^0)}$ の双対写像 $\mathcal{O}_B(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) \to \mathbf{Q}$ を考えることにより、

$$\mathbf{Q}\langle\frac{dx}{x}, \frac{dx}{1-x}\rangle = \mathcal{O}_{dR}(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) \to \mathcal{O}_{B,dR}(MTM) \tag{2.3}$$

なる写像が得られる。$[0, 1]$ が group like element となっていることから、これは環準同型になっている。$\mathcal{O}_{B,dR}(MTM)$ はモチーフ的周期環といわれる。Tate motif の直和としてあらわされる mixed Tate motif を考えることにより、$\mathcal{O}(\mathbf{G}_m)$ から $\mathcal{O}_{B,dR}(MTM)$ への Hopf 代数の準同型ができ、これにより $\mathcal{O}_{B,dR}(MTM)$ には次数付けがされ $\mathrm{per}(\frac{dx}{x}\frac{dx}{1-x}) = \zeta_M(2)$ の次数は 2 となる。$\mathcal{O}_{B,dR}(MTM)$ の部分環として effective なモチーフ的周期環が $\mathcal{Z} = \mathcal{O}_{B,dR}(MTM)^+$ 定義され、これは $\mathcal{O}(\mathbf{G}_m)$ の部分環 $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ 上の自由加群となっており次数付けと協調的である。これから直和分解

$$\mathcal{Z} = \oplus_{n\ge0}\mathcal{Z}_n$$

と直和分解される。また (2.2) の作用は実際は

$$\mathcal{O}_{dR}(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) \to \mathcal{O}_B(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) \otimes \mathcal{O}_{B,dR}(MTM)^+ \tag{2.4}$$

という作用からきていて、(2.3) は

$$\mathbf{Q}\langle\frac{dx}{x}, \frac{dx}{1-x}\rangle \to \mathcal{O}_{B,dR}(MTM)^+ \tag{2.5}$$

という写像を誘導する。また、$\mathcal{O}_{B,dR}(MTM)$ の unipotent part $\mathcal{Z}^u = \mathcal{O}_{B,dR}(MTM)^u$ が定義でき、Hopf 代数の準同型

$$\mathcal{O}_{B,dR}(MTM) \to \mathcal{O}_{B,dR}(MTM)^u \tag{2.6}$$

が定義される。この写像 (2.6) は $\mathcal{O}_{B,dR}(MTM)$ の次数 0 の部分への射影となっている。$\mathcal{O}_{B,dR}(MTM)$ は $\mathcal{O}_{B,dR}(MTM)^+$ を形式的に 1 次の元 $2\pi i_M$ で局所化したものと同型であり、従って

$$\mathcal{O}_{B,dR}(MTM)^u \simeq \cup_{n\geq 0}\frac{1}{(2\pi i_M)^n}\mathcal{Z}_n = \lim_{\to}\mathcal{Z}_{2n} \oplus \lim_{\to}\mathcal{Z}_{2n+1}$$

なる同型を得る。ここで $\mathcal{Z}_{2n} \to \mathcal{Z}_{2n+2}$, $\mathcal{Z}_{2n+1} \to \mathcal{Z}_{2n+3}$ は $\zeta_M(2)$ をかける作用である。したがって $\overline{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}/\zeta_M(2)\mathcal{Z}$ とおくと、

$$\mathcal{O}_{B,dR}(MTM)^u \simeq \overline{\mathcal{Z}}$$

という同一視を得る。この同一視において射影 $\mathcal{Z} \to \overline{\mathcal{Z}}$ は

$$\mathcal{Z}_n \ni \alpha \mapsto \frac{1}{(2\pi i)^n}\alpha \in \mathcal{O}_{B,dR}(MTM)^u \simeq \overline{\mathcal{Z}} \tag{2.7}$$

によってあたえられる。

準同型 (2.5) と (2.7) を合成することにより、

$$\mathrm{per} : \mathbf{Q}\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{1-x}\rangle \to \overline{\mathcal{Z}} \tag{2.8}$$

なる写像が得られる。準同型 (2.8) により、$\mathbf{Q}\langle \frac{dx}{x}, \frac{dx}{1-x}\rangle$ の深さフィルトレーションから $\overline{\mathcal{Z}}$ の深さフィルトレーションが誘導される。

余作用 (2.2) についてはモチーフ的周期環の代わりに $\mathbf{R}$-Deligne cohomology による周期環 $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(MTM)$ を考えることができ、これはモチーフで考えるときの今後の方針を立てる上で有効であると考えられる。そのとき余作用 (2.2) は

$$\mathcal{O}_{dR}(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}) \to \mathcal{O}_B(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(MTM)$$

となる。$\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(MTM)$ は Deligne Hopf algebra と呼ぶ。

3. $\pi_1(\mathcal{M}_{1,3})$ の $GL(2)$ による相対完備化

3.1. 相対完備化. ここでは

$$\pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, x) \to GL_2$$

の相対完備化を考える。前節で導入した局所系 $\mathcal{U}^B$ および楕円フィルトレーション $\{I^n\}_n$ を考えて、その完備化 $\widehat{\mathcal{U}_B}$ の付随する次数加群を考えると、

$$I^n/I^{n+1} \simeq V^{\otimes n}, \quad V = \mathbf{R}^1 f_{34*}\mathbf{Q}(1)$$

なる局所系としての同型が存在する。x を ∞_{31} に無限小に近い点として、局所系と基本群の表現との圏同値をもちいれば、

$$\rho_{std} : \pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, x) \to \pi_1(\mathcal{M}_{1,1}, x) \to GL(V_x)$$

なる準同型が定まる。局所系 $V^{\otimes n}$ を基本群 $\pi_1(\mathcal{M}_{1,3}, x)$ の表現としてみたとき代数群 $GL(V_x)$ の代数的な表現から誘導されている。$\widehat{\mathcal{U}_B(\mathcal{E}_x)}$ の双対空間を $\mathcal{O}_B(\mathcal{E}_x^0)$ と書き基本ホップ代数という。ここに定まる bar filtration つまり、楕円フィルトレーションを $E_n\mathcal{O}_B(\mathcal{E}_x^0)$ と書く。

フィルトレーションがはいってその付随する次数加群が代数的表現となる圏はホップ代数 $\mathcal{O}_{B,x}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ の余加群の圏と圏同値となる。従って $\mathcal{O}_B(\mathcal{E}_x^0)$ には下記の $\mathcal{O}_{B,x}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ 上の余加群の構造が入る。

$$\mathcal{O}_B(\mathcal{E}_x^0) \to \mathcal{O}_B(\mathcal{E}_x^0) \otimes \mathcal{O}_{B,x}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$$

相対完備化の理論により、ホップ代数 $\mathcal{O}_{B,x}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ は relative bar construction により構成される。また同様の構成法は de Rham 基本群についても構成される。

$$\mathcal{O}_{dR}(\mathcal{E}_x^0) \to \mathcal{O}_{dR}(\mathcal{E}_x^0) \otimes \mathcal{O}_{dR,x}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$$

また de Rham 基本ホップ代数、Betti 基本ホップ代数は標準的ホッジ構造の変形の $GL(2)$ の代数的表現の拡大の繰り返しで得られていることから、その圏を分類するホップ代数 $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ 上の余加群の構造が入る。

$$\mathcal{O}_{dR}(\mathcal{E}_x^0) \to \mathcal{O}_B(\mathcal{E}_x^0) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$$

この coation は unipotent part への制限を考えることにより unipotent part の Hopf 代数 $\mathcal{O}_{B,x}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))^u$ 上の余加群と思うことができる。

$$\mathcal{O}_{dR}(\mathcal{E}_x^0) \to \mathcal{O}_B(\mathcal{E}_x^0) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))^u$$

$\mathcal{E}_x^0$ にある $s_2(x), s_3(x)$ を結んでできる path による評価により得られる写像 $\mathcal{O}_B(\mathcal{E}_x^0) \to \mathbf{R}$ を合成して

$$\mathcal{O}_{dR}(\mathcal{E}_x^0) \to \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))^u \tag{3.1}$$

なる写像を得る。

$\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ は Deligne cohomology の計算に用いられる微分次数代数からバー構成法を使って計算される。ここでは少し簡略化して、unipotent part の Hopf 代数 $\mathcal{O}_{B,x}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))^u$ をバー構成法を用いて与えることにしよう。

$GL(2)$ の標準的な表現の i 次対称多項式表現を Sym^i と書く。代数的な有限次元既約表現の集合 $R^+(GL(2))$ を

$$R^+(GL(2)) = \{\rho = \mathrm{Sym}^i(n) \mid 0 \le i \le n\},$$

で定義する。相対微分次数加群

$$\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, \mathrm{Sym}^i(n)) = \mathbf{R}\Gamma_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, \mathrm{Sym}^i(V)(n))$$
$$\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)) = \bigoplus_{i\ge 0, n\ge i} \Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, \mathrm{Sym}^i(n)) \otimes (\mathrm{Sym}^i(V_x)(n))^*$$

の相対バー複体 $B(\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)))$ を用いて、

$$\mathcal{O}_{\mathcal{D},x}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))^u = H^0(B(\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))))$$

と計算される。ここで乗法は

$$\left[\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, \mathrm{Sym}^i(n)) \otimes (\mathrm{Sym}^i(V_x)(n))^*\right] \otimes \left[\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, \mathrm{Sym}^{i'}(n')) \otimes (\mathrm{Sym}^{i'}(V_x)(n'))^*\right]$$
$$\to \left[\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, \mathrm{Sym}^{i+i'-2k}(n+n'-k)) \otimes (\mathrm{Sym}^{i+i'-2k}(V_x)(n+n'-k))^*\right]$$

の和である。この構成法は $\mathcal{O}_{B,x}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^u$ についても同様に定義される。

4. 無限小埋め込みと Hopf 代数の E-filtration

4.1. 余作用と filtration. また無限小埋め込み $X^0 \subset \mathcal{E}^0_x$ と接線的基点の写像 $x \to \mathcal{M}_{1,3}$ に由来して下の可換図式がえられる。

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(E^0)_{x_{dR}} & \to & \mathcal{O}(E^0)_{x_B} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3})^+ & \to & \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3})^+ \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}(X^0)_{x_{dR}} & \to & \mathcal{O}(X^0)_{x_B} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(M_{\mathbf{Q}})^+ & \to & \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(M_{\mathbf{Z}})^+ \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \mathbf{C}
\end{array}
\tag{4.1}
$$

$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{1,1}$ または $\mathcal{M}_{1,3}$ とする。

定義 4.1 (E-filtration)**.** $\Omega^*_{\mathcal{D}} = \Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, GL(2))$, $\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathrm{Sym}^i(n)) = \Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathrm{Sym}^i(n))$ とする。*elliptic filtration* E を

$$E_j\Omega^*_{\mathcal{D}} = \oplus_{2n-i\leq j, 0\leq i\leq n}\left(\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathrm{Sym}^i(n)) \otimes \mathrm{Sym}^i(V_x)(n))^*\right)$$

と定義する。

elliptic filtration に対して

$$Gr^E_j\Omega^*_{\mathcal{D}} = \Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathrm{Sym}^{2n-j}(n)) \otimes \mathrm{Sym}^{2n-j}(V_x)(n))^*$$

がなりたつ。

4.2. 余加群 $\mathcal{O}(\mathcal{E}^0)$ と楕円フィルトレーション. DGA $\Omega_{dR}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ の楕円フィルトレーション E からそのバー・複体 $B(\Omega_{dR}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)))$ にも楕円フィルトレーションが定まり、そこらからホップ代数 $\mathcal{O}_{dR}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ にも楕円フィルトレーションが定まる。このフィルトレーションの k-part を $E_k\mathcal{O}_{dR}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ と書く。$\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))$ についても同様にして E フィルトレーションが定まる。自然な写像

$$\mathcal{M}_{1,3} \to \mathcal{M}_{1,1}$$

から下の可換図式が得られる。

$$
\begin{array}{ccc}
E_n\mathcal{O}(\mathcal{M}_{1,1}, GL_2) & \to & E_n\mathcal{O}(\mathcal{M}_{1,3}, GL_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}(\mathcal{M}_{1,1}, GL_2) & \to & \mathcal{O}(\mathcal{M}_{1,3}, GL_2)
\end{array}
$$

写像 (3.1) は bar filtration により導入される $\mathcal{O}_{dR}(\mathcal{E}^0_x)$ 上の楕円フィルトレーションと $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))^u$ の E フィルトレーションについて協調的である。したがって写像

$$E_n\mathcal{O}_{dR}(\mathcal{E}^0_x) \to E_n\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))^u. \tag{4.2}$$

を誘導する。

問題 4.2. (4.2) は全射か。

4.3. **比較定理と多重ゼータ値の正規化.** ここで多重ゼータ値の正規化について述べよう。下の比較同型について考える。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{U}_B}(\mathbf{G}_m - \{0\}) & \xrightarrow{i_*^B} & \widehat{\mathcal{U}_B}(\mathcal{E}^0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{C}\langle\langle \omega_0^*, \omega_1^* \rangle\rangle & \xrightarrow{i_*^{dR}} & \mathbf{C}\langle\langle u^*, \omega_0^* \rangle\rangle \end{array}$$

この水平方向の写像は二つのフィルトレーション E 及び M について厳密協調的（strictly compatible）になっている。従って、単射性を保ち、

$$\widehat{\mathcal{U}_B}(\mathcal{E}^0)/E_k\widehat{\mathcal{U}_B}(\mathcal{E}^0) \to \mathbf{C}\langle\langle \omega_0^*, \omega_1^* \rangle\rangle / E_k \mathbf{C}\langle\langle \omega_0^*, \omega_1^* \rangle\rangle$$

なる写像は単射である。さらに、i_*^B は双対ホップ代数の写像にもなっているので、$\nabla_P(g) = g \otimes g$ であれば、$\nabla_E(i_*^B(g)) = i_*^B(g) \otimes i_*^B(g)$ が成り立つ。次の定理が成り立つ。

命題 4.3. $\Phi_k(\omega_0^*, \omega_1^*)$ を $\mathbf{C}\langle\langle \omega_0^*, \omega_1^* \rangle\rangle / E_k \mathbf{C}\langle\langle \omega_0^*, \omega_1^* \rangle\rangle$ における群的元とすると、0 で始まり 1 で終わる語 I に対応する単項式 ω_I^* の係数で $\Phi_k(\omega_0^*, \omega_1^*)$ のすべての係数は書ける。

4.4. **γ-filtration.**

定義 4.4 (τ-filtration)**.** $\mathrm{Sym}^k(k+i)^* = \mathrm{Sym}^k(V_x)(k+i)^*$ は

$$\mathrm{Sym}^k(k+i)^* \simeq \mathbf{Q}(-k-i) \oplus \mathbf{Q}(-k-i+1) \oplus \cdots \oplus \mathbf{Q}(-i)$$

と直和分解される。*decreasing filtration* τ を

$$\tau^p \,\mathrm{Sym}^k(k+i)^* = \oplus_{-k-i \le m \le -i, m \ge -k-2i+p} \mathbf{Q}(m)$$

とおく。

τ-filtration については

$$Gr_\tau^j \,\mathrm{Sym}^k(k+i)^* = \begin{cases} \mathbf{Q}(-k-i) & (j = i) \\ 0 & (j < i) \end{cases}$$

が成り立つ。また

$$\tau^p \,\mathrm{Sym}^k(k+i)^* \otimes \tau^q \,\mathrm{Sym}^l(k+j)^* \subset \oplus_s \tau^{p+q} \,\mathrm{Sym}^{k+l-2s}(k+l+i+j-s)^*$$

が成り立つ。

定義 4.5 (σ filtration)**.** *increasing filtration* σ を次の様に定義する。

$$\sigma_j \Omega_{\mathcal{D}}(\mathrm{Sym}^k(k+i)) = \Omega_{\mathcal{D}}^{\le j}(\mathrm{Sym}^k(k+i))$$

σ filtration について

$$Gr_j^\sigma \Omega_{\mathcal{D}}(\mathrm{Sym}^k(k+i)) = \begin{cases} H_{\mathcal{D}}^j(\mathrm{Sym}^k(k+i)) & (j \le i) \\ 0 & (j > i) \end{cases}$$

が成り立つ。また、σ は積と compatible である。すなわち DGA の積は

$$\sigma_i \Omega_{\mathcal{D}}^*(\mathrm{Sym}^k(p)) \otimes \sigma_j \Omega_{\mathcal{D}}^*(\mathrm{Sym}^l(q)) \to \oplus_s \sigma_{i+j} \Omega_{\mathcal{D}}^*(\mathrm{Sym}^{k+l-2s}(p+q-s))$$

という写像を引き起こす。

定義 4.6. $\Omega^*_{\mathcal{D}}$ 上に二つの *filtration* τ*-filtration,* σ*-filtration* の *convolution filtration* γ を次の様に定義する。

$$\begin{aligned}&\gamma_p\Bigg(\Omega_{\mathcal{D}}(\mathrm{Sym}^k(k+i))\otimes\mathrm{Sym}^k(k+i)^*\Bigg)\\&=\sum_j\sigma_{j+p}\Omega_{\mathcal{D}}(\mathrm{Sym}^k(k+i))\otimes\tau^j\,\mathrm{Sym}^k(k+i)^*\\&\gamma_p(\Omega^*_{\mathcal{D}})=\oplus_{k\geq 0,i\geq 0}\gamma_p\Bigg(\sum_j\Omega_{\mathcal{D}}(\mathrm{Sym}^k(k+i))\otimes\mathrm{Sym}^k(k+i)^*\Bigg)\end{aligned}$$

γ*-filtration* は *increasing filtation* である。

τ-filtration, σ-filtration の性質から、

$$Gr^{\gamma}_p\Omega_{\mathcal{D}}(\mathrm{Sym}^k(k+i))\otimes Gr^q_{\tau}\,\mathrm{Sym}^k(k+i)^*=0\quad(p\neq q)$$

となるので、Convolution filtration の性質から

$$Gr^{\gamma}_0\Omega^*_{\mathcal{D}}=\oplus_{k\geq 0,i\geq 0}H^i_{\mathcal{D}}(\mathrm{Sym}^k(k+i))\otimes\mathrm{Sym}^k(k+i)^*$$

が成り立つ。また γ-filtration は積について乗法的である。

$$\gamma_i\Omega^*_{\mathcal{D}}\otimes\gamma_j\Omega^*_{\mathcal{D}}\to\gamma_{i+j}\Omega^*_{\mathcal{D}}$$

従って $\gamma_{-1}\Omega^*_{\mathcal{D}}$ は $\gamma_0\Omega^*_{\mathcal{D}}$ のイデアルとなる。したがって DGA の準同型

$$\gamma_0\Omega^*_{\mathcal{D}}\to Gr^{\gamma}_0\Omega^*_{\mathcal{D}}$$

を得る。$\Omega^*_{\mathcal{D}}$ 上の γ-filtration は $\mathcal{O}(\mathcal{M}_{1.1},GL(2))=H^0(\Omega_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1},GL(2)))$ 上の

5. ホップ代数とバー・スペクトル系列

ハイン-松本によって導入された相対完備化およびハインの相対バー複体に関するバー・スペクトル系列を考える。

5.1. バー・スペクトル系列とアイヒラー・志村同型、制限写像. ここでは簡単のため、$\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1},GL(2))$ のバー・スペクトル系列について考える。$\mathcal{M}_{1,3}$ についてもほぼ同様に計算できるが、少し複雑になる。バー・スペクトル系列は

$$\begin{aligned}E_1^{p,q}=&\Bigg[\big(H^*(\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1},GL(2)))^{\otimes -p}\Bigg]^q\\&\Rightarrow E_{\infty}^{p+q}=H^{p+q}(B(\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1},GL(2))))\end{aligned}\tag{5.1}$$

となり、

$$H^*(\Omega^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1},GL(2))=\oplus_{\rho\in R^+(GL(2))}H^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1},\rho(V))\otimes\rho(V_x)^*$$

となる。もう少し詳しく、

補題 5.1. 以下、*Deligne cohomoloyg* は $\mathbf{R}$ 係数のものを指すものとする。このとき次が成り立つ。

(1)

$$H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1},\mathrm{Sym}^i(V)(j))=\begin{cases}e_{2m+2}\mathbf{R} & (i,j)=(2m,2m+1)\\0 & (i,j)\neq(2m,2m+1)\end{cases}\tag{5.2}$$

(2)

$$H^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1}, \mathrm{Sym}^{2m}(V)(2m+2)) = S^+_{2m+2}$$

ここで S^+_k は実数体上の定義された重さが k の楕円尖点形式の空間である。この部分は *Deligne cohomology* を通常のものから少し *modify* する必要がある。

$\mathbf{R}$-Deligne cohomology については E_1 微分は実質的には下の写像の和になっていて、E_1 項において楕円フィルトレーションは次数付けになっている。どのような関係式が出てくるかはレギュレータが尖点形式の L 関数の特殊値をつかって表示できることから具体的な予想がたてられている。

バー複体 $B(H^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))^B)$ における微分は楕円フィルトレーションが次数付けになるような次数付けを導入することができる。$\mathrm{Sym}^i(j)^*$ の直和分解

$$\mathrm{Sym}^i(j)^* = \mathbf{Q}(-j) \oplus \mathbf{Q}(-j+1) \oplus \cdots \oplus \mathbf{Q}(-j+i)$$

を用いて $\mathrm{Sym}^i(j)^*$ の Tate フィルトレーション T を

$$T_k(\mathrm{Sym}^i(j))^* = \sum_{k \geq p, j-i \leq p \leq j} \mathbf{Q}(-p)$$

と定める。このフィルトレーションは

$$\Omega_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1}, \mathrm{Sym}^i(V)(j)) \otimes \mathrm{Sym}^i(j)^*$$

上のフィルトレーションを誘導する。

Tate フィルトレーション、楕円次数フィルトレーションのはいった次数付きベクトル空間 V の母関数を次の式で定義する。

$$ch(V) = \sum_{i,j} (-1)^k \dim(Gr^e_i Gr^t_j(V^k)) u^i s^j$$

を考える。このとき次の式がなりたつ。

$$ch(H^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1}, \mathrm{Sym}^{2i}(2i+1))) = s^{2i+1} u^{2i+2} \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

$$ch(H^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1}, \mathrm{Sym}^{2i}(2i+2))) = \mathcal{S}_{2i+2} s^{2i+2} u^{2i+4} \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

となる。ここで、$\mathcal{S}_{2i+2}$ は weight $2i+2$ の cusp form の次元 $\dim S_{2i+2}$ である。

定義 5.2. $i \neq 0$ に対して $H^i(B(\Omega^*)) = 0$ が成り立つとき、*DGA* Ω^* は $K\pi_1$ 性をもつという。

問題 5.3. $Gr^\gamma_0 \Omega^*_{\mathcal{D}}(M_{1,1}, GL(2))) = H^*(Gr^\gamma_0 \Omega^*_{\mathcal{D}}(M_{1,1}, GL(2)))$ は $K\pi_1$ 性をもつか。

以下

$$H^*_{red}(M_{1,1}, GL(2)) = H^*(Gr^\gamma_0 \Omega^*(M_{1,1}, GL(2)))$$

と書くことにする。

命題 5.4. *(1)*

$$\begin{aligned} & ch(H^*_{red}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2))) \\ = & \sum_{i \geq 1} ch(H^1_{red}(\mathcal{M}_{1,1}, \mathrm{Sym}^{2i}(2i+1))) - \sum_{i \geq 1} ch(H^2_{red}(\mathcal{M}_{1,1}, \mathrm{Sym}^{2i}(2i+2))) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{s^3u^4}{1-s^2u^2}-\frac{s^{12}u^{14}}{(1-s^4u^4)(1-s^6u^6)}\\
&=\mathbf{O}(su)u-\mathbf{S}(su)u^2
\end{aligned}
$$

(2)

$$ch(B(H^*_{red}(\mathcal{M}_{1,1},GL(2))))=\frac{1}{1-\mathbf{O}(su)u+\mathbf{S}(su)u^2}$$

(3) 問題 *5.3* が肯定的であるとすると、次が成り立つ。

$$\mathcal{O}_{red}(\mathcal{M}_{1,1},GL(2))=H^0(B(H^*_{red}(\mathcal{M}_{1,1},GL(2))))$$

とおくと、 l

$$ch(\mathcal{O}_{red}(\mathcal{M}_{1,1},GL(2)))=\frac{1}{1-\mathbf{O}(su)u+\mathbf{S}(su)u^2}$$

となる。

6. DGA のサンドイッチ解消

6.1. サンドイッチ解消. 体 k 上の二つの graded commutative な DGA Σ,Λ および *DGA* の準同型 $\varphi:\Sigma\to\Lambda$ を考える。さらに

$$K=\mathrm{cone}(\Sigma\to\Lambda)$$

する。ただし次数は Σ の次数を 0 と数える。このとき

命題 6.1. *(1)* K には $K\otimes\Sigma\to K,\Sigma\otimes K\to K$ を

$$(x,y)\otimes z\mapsto(xz,y\varphi(z)),\quad x\otimes(y,z)\mapsto(xy,\varphi(x)z)$$

と定めることにより、K は Σ の両側 *DG module* となる。

(2) 自然な写像 $\nu:K\to\Sigma$ は Σ の作用について Σ-*module* の *morphism* になっている。

さらに自然な写像 ν による cone $C=\mathrm{cone}(\nu:K\to\Sigma)$ には上の K への Σ の作用を用いて、下のようにして積を導入することができる。

$$(k,\omega)\otimes(k',\omega')\mapsto(k\omega'+\omega k',\omega\omega')$$

これにより C には DGA の構造がはいる。C は下の double complex に他ならないことに注意しよう。

$$C=\begin{pmatrix}\Sigma & \to & \Lambda\\ \downarrow & & \downarrow\\ \Sigma & \to & 0\end{pmatrix}$$

従って自然は複体の写像 $\Lambda\to C$ は積を保つ quasi-isomorphism, つまり DGA としての quasi-isomorphism となっている。Σ,Λ の bar complex を

$$B(\Sigma)=\oplus_{i=0}^{\infty}k\otimes\Sigma^{\otimes i}\otimes k,\quad B(\Lambda)=\oplus_{i=0}^{\infty}k\otimes\Lambda^{\otimes i}\otimes k$$

と定義する。これには微分が定義され、積と余積が定義されている。次の命題が成り立つ。

命題 6.2. *DGA の写像 $\Lambda \to C$ により得られる bar complex の写像は*

$$B(\Lambda) \to B(C)$$

quasi-isomorphism である。

定義 6.3 (Sandwich filtration)**.** C に次の *filtration* を導入する。

$$F^i C = \begin{cases} \Sigma & (i = 0) \\ C & (i = -1) \end{cases}$$

さらに F は $C^{\otimes p}$ 上の *filtration* を誘導する。

命題 6.4. *(1)*

$$Gr_F^{-1}(C) \simeq K$$

(2) 上の filtration および C の積構造について次が成り立つ。

$$F^i C \otimes F^j C \subset F^{i+j} C$$

(3) F は Bar complex の differential と compatible である。従って $B(C)$ 上の filtation を誘導する。

(4) テンソル積および bar complex 上に定まる filtration の associated graded piece は次のように計算される。

$$F^{-i}/F^{-i+1}(C^{\otimes n}) = \bigoplus_{\sum p_j = n-i} \Sigma^{\otimes p_0} \otimes \bigotimes_{j=1}^{i} (K \otimes \Sigma^{\otimes p_j})$$

$$F^{-i}/F^{-i+1}(B(C)) = \bigoplus_{\sum p_j = n-i} B(\Sigma) \otimes \bigotimes_{j=1}^{i} (K \otimes B(\Sigma))$$

次の命題は容易に示される。

命題 6.5. *$B(\Sigma), K$ について次の条件を仮定する。*

$$H^i(B(\Sigma)) = 0 \quad (\textit{ for } i \neq 0) \tag{6.1}$$

$$H^i(K) = 0 \quad (\textit{ for } i \neq 2)$$

このとき、上の resolution の stupid filtration によりはいる $H^0(B(\Lambda))$ 上の filtration を σ とすると、

$$Gr_F^{-i} H^0(B(\Lambda))) \simeq H^0(B(\Sigma)) \otimes \left(H^2(K) \otimes H^0(B(\Sigma)) \right)^{\otimes i} \tag{6.2}$$

6.2. **Sandwich resolution.** 誘導写像

$$\varphi_* : H^*(\Sigma) \to H^*(\Lambda) \text{ は全射である} \tag{6.3}$$

とする。このとき

$$0 \to H^*(K) \to H^*(\Sigma) \to H^*(\Lambda) \to 0$$

は短完全列となり、$H^*(K)$ は $H^*(\Sigma)$ の DG ideal となっている。

$$L_i = B(H(\Sigma)) \otimes \left(H(K) \otimes B(H(\Sigma)) \right)^{\otimes i}$$

と L_i には

$$L_i^0 = B^0(H(\Sigma)) \otimes \Big(H^2(K) \otimes B^0(H(\Sigma))\Big)^{\otimes i}$$

の次数が $-i$ となるように次数を定義する。さらに

$$d : L_n \to L_{n-1} :$$

を次の様に定める。

$d : L_1 \to L_0 : a_0 \otimes b_1 \otimes a_1 \mapsto [a_0 \mid b_1 \mid a_1]$

$d : L_2 \to L_1 : a_0 \otimes b_1 \otimes a_1 \otimes b_2 \otimes a_2 \mapsto [a_0 \mid b_1 \mid a_1] \otimes b_2 \otimes a_2 - a_0 \otimes b_1 \otimes [a_1 \mid b_2 \mid a_2]$

より一般に $d : L_n \to L_{n-1}$ は次で定まる写像である。

$$a_0 \otimes \bigotimes_{k=1}^{n} (b_k \otimes a_k) \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \bigotimes_{k=1}^{i} (a_{k-1} \otimes b_k) \otimes (a_i \cdot b_{i+1} \cdot a_{i+1}) \otimes \bigotimes_{k=i+1}^{n} (b_k \otimes a_k)$$

命題 6.6. 条件 (6.3), (6.1) を仮定する。このとき次は複体の完全列となる。

$$Sw(H(\Sigma), H(K)) : \cdots \xrightarrow{d} L_n \xrightarrow{d} L_{n-1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} L_0 \to B(H(\Lambda)) \to 0$$

複体 $Sw(H(\Sigma), H(K))$ を $B(H(\Lambda))$ のサンドイッチ解消という。

6.3. $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) \to \mathcal{M}_{1,1}$ **の場合.** Infinitesimal embedding による写像の合成

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) \to \mathcal{M}_{1,3} \to \mathcal{M}_{1,1}$$

により誘導される写像

$$\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,1}, GL(2)) \to \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)) \to \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}), GL(2))$$

を考える。§6.1 の構成法を適用したいのだが、これを modify する必要がある。
ここで $GL(2) = GL(V), V = \mathrm{Sym}^1(\mathbf{R}f_*\mathbf{Q})$ である。

命題 6.7. 準同型 (3.1) は

$$\mathcal{O}_{dR}(\mathcal{E}_x^0) \to \gamma_0\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2))^u$$

を引き起こす。

問題 6.8. 以下の条件を満たす DGA E と下の可換図式が存在する。

$$\begin{tikzcd}
\Sigma = Gr_0^{\gamma}\Omega(\mathcal{M}_{11}, GL(2)) \arrow[r, "\varphi"'] & E \arrow[dr] & \\
\gamma_0\Omega(\mathcal{M}_{11}, GL(2)) \arrow[u] \arrow[r] & \gamma_0\Omega(\mathcal{M}_{1,3}, GL(2)) \arrow[u, "\psi"'] \arrow[r] & \Omega(\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}), G_m) = \Lambda
\end{tikzcd}$$

E に ψ の像により *elliptic filtration*、および *Tate filtration* を入れることとする。

(1) $E \to \Lambda$ は *quasi-isomorphism*

(2) φ は *elliptic filtration*、および *Tate filtration* について *compatible.*

(3) $K = \mathrm{cone}(\Sigma \to E)$ とおくと

$$H^i(K) = 0 \quad (i \neq 2)$$

(4)

$$ch(H^2(K)) = S(su)u^4$$

(1) のもとで、$\varphi_* : H^*(\Sigma) \to H^*(\Lambda)$ は全射である。

6.4. **Deligne cohomology についての BK 母関数.** 問題 6.8 の記号を踏襲する。$C = \mathrm{cone}(\nu : K \to \Sigma)$ とする。定義 6.3 で定義された $B(C)$ の Sandwich filtration F から定まる $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(Spec(\mathbf{Z}), \mathbf{G}_m)^+ = H^0(B(C))$ の Sandwich filtration を F とかく。つまり

$$F^{-i}H^0(B(C)) = Im(H^0(H^*(F^{-1}B(C)) \to H^0(B(C)))$$

を考える。このとき

$$F^0H^0(B(C)) \subset F^{-1}H^0(B(C)) \subset \cdots$$

なるフィルトレーションが定まる。ここで F^{-p}/F^{-p+1} に寄与する二重母関数を考えると、命題 5.4 と命題 6.5 の仮定のもとで

$$\frac{1}{1-\mathbf{O}(su)u+\mathbf{S}(su)u^2}\left(\frac{S(su)u^4}{1-\mathbf{O}(su)u+\mathbf{S}(su)u^2}\right)^p$$

となる。これらを p に関して加えると、

$$\begin{aligned}&\sum_{p\geq 0}\frac{1}{1-\mathbf{O}(su)u+\mathbf{S}(su)u^2}\left(\frac{S(su)u^4}{1-\mathbf{O}(su)u+\mathbf{S}(su)u^2}\right)^p\\ =&\frac{1}{1-\mathbf{O}(su)u+\mathbf{S}(su)u^2-\mathbf{S}(su)u^4}\end{aligned}$$

次の問題を考える。

問題 6.9. 同型 (6.2) は *elliptic filtration* と *Tate filtration* について *compatible* か。

この問題が肯定的であれば、

$$ch(B(C)) = \frac{1}{1-\mathbf{O}(su)u+\mathbf{S}(su)u^2-\mathbf{S}(su)u^4}$$

がなりたつ。$\overline{\mathcal{Z}_N^d}$ を Deligne cohomology 的多重ゼータ値の重さ N の空間の, 深さに付随する次数加群の d 次部分空間とすると、これは楕円次数が $N+d$ の部分になるので、Broadhurst-Kreimer 予想は

$$\sum_{N,d}(\dim_{\mathbf{Q}}\overline{\mathcal{Z}_N^d})s^Nt^d = \frac{1}{1-\mathbf{O}t+\mathbf{S}t^2-\mathbf{S}t^4}$$

と書き直すことができる。問題 4.2, 問題 5.3, 問題 6.8, および問題 6.9 が成立すれば、Broadhurst-Kreimer の Deligne cohomology version はその帰結であることが結論される。

法政大学理工学部
Email address: terasoma@hosei.ac.jp