調和余積の二種類の固定化部分群について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
古庄　英和
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY
HIDEKAZU FURUSHO

2 元生成の自由群の tangential な外部自己同型群の作用を 2 種類考え、それぞれの作用により定まる調和余積の固定化部分群が共に一致すること、さらにそれらが Racinet のダブルシャッフル群とも一致することを説明する。この報文は B. Enriquez 氏との共同研究 [EF4] に基づいている。

1. 調和余積

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする。$\mathcal{V}$ を二変数 $e_0,\ e_1$ の非可換多項式 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{K}\langle e_0, e_1\rangle$ とする。$\Delta_{ш}(e_i) = e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i$ $(i = 0, 1)$ で定まる余積

$$\Delta_{ш} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^{\otimes 2}$$

により $\mathcal{V}$ にはホップ代数の構造が入る。この $\Delta_{ш}$ をシャッフル余積と呼ぶことにする。

無限生成非可換多項式 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{K}\langle y_1, y_2, y_3, \dots\rangle$ を考える。$y_0 = 1$ とおくと $y_k \mapsto \sum_{i=0}^{k} y_i \otimes y_{k-i}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ で定まる余積

$$\Delta_* : \mathbb{K}\langle y_1, y_2, y_3, \dots\rangle \to \mathbb{K}\langle y_1, y_2, y_3, \dots\rangle^{\otimes 2}$$

によりこれにもホップ代数の構造が入る。この Δ_* を調和余積と呼ぶことにする。

写像 $y_{k_m} \cdots y_{k_1} \mapsto (-1)^m e_0^{k_m - 1} e_1 \cdots e_0^{k_1 - 1} e_1$ により $\mathbb{K}\langle y_1, y_2, y_3, \dots\rangle$ は $\mathcal{V}$ に埋め込まれる。一方この写像により $\mathbb{K}\langle y_1, y_2, y_3, \dots\rangle$ は商 $\mathcal{V}/\mathcal{V}e_0$ とも同一視される。$\mathbb{K}\langle y_1, y_2, y_3, \dots\rangle$ を $\mathcal{V}$ の部分空間と見做した時は $\mathcal{W}$ と記し、$\mathcal{V}$ の商空間と見做した時は $\mathcal{M}$ と記すことにする。$\mathcal{W}$ にも $\mathcal{M}$ にもホップ代数の構造が入るが、区別するためにそれぞれの余積を $\Delta_*^{\mathcal{W}}$ と $\Delta_*^{\mathcal{M}}$ と記すことにする。

定義により単射な線型写像 $i : \mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{V}$ と全射な線型写像 $\pi : \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ が存在するがこれはどちらもホップ代数の準同型ではないことに注意しておく。

Date: 2022 年 11 月 30 日.
2022 年度 RIMS 共同研究（公開型） 多重ゼータ値の諸相 数理解析研究所講究録.
本研究は JSPS 科研費 (基盤 (B) 課題番号 JP18H01110) の助成を受けております.

$\hat{\mathcal{V}}$ を $\deg(e_0)=\deg(e_1)=1$ により定まる次数による完備化、可逆元のなす群を $\hat{\mathcal{V}}^{\times}$ とする。$g\in\hat{\mathcal{V}}$ に対して, 各語 W の係数を $(g|W)\in\mathbb{K}$ と記すことにする。同様に $\hat{\mathcal{W}}$ 及び $\hat{\mathcal{M}}$ を $\deg(y_k)=k$ により定まる次数による $\mathcal{W}$ と $\mathcal{M}$ の完備化とする。

Racinet により導入されたダブルシャッフル群 DS_0 は次で定義される。

Definition 1 ([R]). DS_0 は以下の 4 条件を満たす $\varphi\in\hat{\mathcal{V}}^{\times}$ の集合として定義される:

$$\begin{aligned}
&\hat{\Delta}_{\sqcup\!\sqcup}(\varphi)=\varphi\hat{\otimes}\varphi,\\
&\hat{\Delta}_{*}(\varphi_*)=\varphi_*\hat{\otimes}\varphi_*,\\
&(\varphi|e_0)=(\varphi|e_1)=0,\\
&(\varphi|e_0e_1)=0.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\varphi_* &:= \pi(\Gamma_\varphi(-e_1)^{-1}\cdot\varphi)\in\hat{\mathcal{M}},\\
\Gamma_\varphi(e_1) &:= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\varphi|e_0^{n-1}e_1)e_1^n\right\}\in\hat{\mathcal{V}}^{\times}
\end{aligned}$$

としている。[1]

上の定義における 1 番目と 2 番目の式は多重ゼータ値のシャッフル積と調和積に対応している ([Z] 等を参照)。

$\varphi_1,\varphi_2\in\hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{DR}}^{\times}$ に対して積 $\circledast$ を

$$\begin{aligned}
\varphi_1\circledast\varphi_2 &:= \mathrm{aut}_{\varphi_1}^{(10)}(\varphi_2) := \mathrm{aut}_{\varphi_1}^{(1)}(\varphi_2)\cdot\varphi_1\\
&= \varphi_2(\varphi_1e_0\varphi_1^{-1},e_1)\varphi_1(e_0,e_1)\in\hat{\mathcal{V}}^{\times}
\end{aligned}$$

で定める。ここで $\mathrm{aut}_{\varphi_1}^{(1)}$ は $e_0\mapsto\varphi_1e_0\varphi_1^{-1}$, $e_1\mapsto e_1$ で定まる $\hat{\mathcal{V}}$ の位相的 Hopf 代数の自己同型のことであり, $\mathrm{aut}_{\varphi_1}^{(10)}$ は

$$\mathrm{aut}_{\varphi_1}^{(10)}(v):=\mathrm{aut}_{\varphi_1}^{(1)}(v)\cdot\varphi_1$$

で定まる $\hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{DR}}$ の位相的 $\mathbb{K}$-線形空間としての自己同型である。DS_0 はこの積 $\circledast$ に関して実際に群をなすことが [R] において示されている。Grothendieck-Teichmüller 群, Kashiwara-Vergne 群等この群に関連する研究については [F] を参照されたい。

[1]論文 [R] では DS ではなく DMR の記号が使われている。これはフランス語「double mélange regularisé」より来ている。

2. 二つの固定化部分群

シャッフル余積に関して群的条件を満たす $\hat{\mathcal{V}}^{\times}$ の可逆元のなす集合

$$F_2^{\mathrm{DR}} := \{x \in \hat{\mathcal{V}}^{\times} \mid \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(x) = x \otimes x\}$$

を考える。この群の tangential な自己同型のなす群を TAut と記す。群 F_2^{DR} の自己同型 σ が tangential であるとはある $\alpha_i \in F_2^{\mathrm{DR}}$ $(i = 0, 1)$ が取れて $\sigma(\exp(e_i)) = \alpha_i \exp(e_i)\alpha_i^{-1}$ とできることである。とくに $\alpha_0 = \alpha_1$ のときが内部自己同型であり内部自己同型群 Int は TAut の正規部分群をなす。この商群が外部自己同型群

$$\mathrm{TOut} := \mathrm{TAut}/\mathrm{Int}$$

である。射 $\sigma \mapsto \alpha_1^{-1}\alpha_0$ を考えることにより、群同型

$$\mathrm{TOut} \simeq \big((F_2^{\mathrm{DR}})_{>1}, \circledast\big)$$

が引き起こされる。ここで右辺は $(F_2^{\mathrm{DR}})_{>1} := \{g \in F_2^{\mathrm{DR}} \mid (g \mid e_0) = (g \mid e_1) = 0\}$ に先の $\circledast$ により積構造を入れた群のことである。以後、この二つの群を同一視することにする。ダブルシャッフル群 DS_0 は $\big((F_2^{\mathrm{DR}})_{>1}, \circledast\big)$ の, 従って TOut の, 部分群と見做せることに注意しておく。

TOut の以下の二種類の作用とその固定化部分群を考える。

(i). $g \in (F_2^{\mathrm{DR}})_{>1} \mapsto \mathrm{aut}_g^{(1)}$ より TOut の $\hat{\mathcal{V}}$ への群作用

$$\mathrm{aut}_{\mathcal{V}}^{(1)} : \mathrm{TOut} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}\text{-mod}}\hat{\mathcal{V}}$$

が定まる。この作用において部分空間 $\hat{\mathcal{W}}$ は安定しているので群作用

$$\mathrm{aut}_{\mathcal{W}}^{(1)} : \mathrm{TOut} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}\text{-mod}}\hat{\mathcal{W}}$$

が引き起こされる。定義 1 の Γ-関数を用いてこの作用を以下の如くひねることで

$$g \mapsto {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_g^{(1)} = \mathrm{Ad}(\Gamma_g(-e_1)^{-1}) \circ \mathrm{aut}_g^{(1)}$$

群作用

$${}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\mathcal{W}}^{(1)} : \mathrm{TOut} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}\text{-mod}}\hat{\mathcal{W}}$$

が引き起こされる。これにより引き起こされる群作用

$${}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\mathcal{W}^{\vee}\otimes\mathcal{W}^{\otimes 2}}^{(1)} : \mathrm{TOut} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-mod}}(\hat{\mathcal{W}}, \hat{\mathcal{W}}^{\hat{\otimes}2})$$

を考える。

Definition 2. 調和余積 $\Delta_*^{\mathcal{W}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-mod}}(\hat{\mathcal{W}}, \hat{\mathcal{W}}^{\otimes 2})$ のこの作用に関する固定化部分群を

$$\mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{W}}) := \{g \in \mathrm{TOut} \mid {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\mathcal{W}^{\vee}\otimes\mathcal{W}^{\otimes 2}}^{(1)}(g)(\Delta_*^{\mathcal{W}}) = \Delta_*^{\mathcal{W}}\}$$

で定める。

定義によりこの固定化部分群 $\mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{W}})$ は TOut の部分群である。

(ii). 一方で $g \in (F_2^{\mathrm{DR}})_{>1} \mapsto \mathrm{aut}_g^{(10)}$ より TOut の $\hat{\mathcal{V}}$ への群作用

$$\mathrm{aut}_{\mathcal{V}}^{(10)} : \mathrm{TOut} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}\text{-mod}}\hat{\mathcal{V}}$$

が定まる。この作用は商空間 $\hat{\mathcal{M}}$ への群作用

$$\mathrm{aut}_{\mathcal{M}}^{(10)} : \mathrm{TOut} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}\text{-mod}}\hat{\mathcal{M}}$$

を誘導することが確かめられる。定義 1 の Γ-関数を用いてこの作用を以下の如く左から掛けることで

$$g \mapsto {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_g^{(10)} = \Gamma_g(-e_1)^{-1} \cdot \mathrm{aut}_g^{(10)}$$

群作用

$${}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\mathcal{M}}^{(10)} : \mathrm{TOut} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}\text{-mod}}\hat{\mathcal{M}}$$

が引き起こされる。これにより引き起こされる群作用

$${}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\mathcal{M}^\vee \otimes \mathcal{M}^{\otimes 2}}^{(10)} : \mathrm{TOut} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-mod}}(\hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathcal{M}}^{\hat{\otimes} 2})$$

を考える。

Definition 3. 調和余積 $\Delta_*^{\mathcal{M}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-mod}}(\hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathcal{M}}^{\otimes 2})$ のこの作用に関する固定化部分群を

$$\mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{M}}) := \{g \in \mathrm{TOut} \mid {}^{\Gamma}\mathrm{aut}_{\mathcal{M}^\vee \otimes \mathcal{M}^{\otimes 2}}^{(10)}(g)(\Delta_*^{\mathcal{M}}) = \Delta_*^{\mathcal{M}}\}$$

で定める。

定義によりこの固定化部分群 $\mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{M}})$ も TOut の部分群である。

TOut の 3 つの部分群 DS_0 と $\mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{M}})$ と $\mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{M}})$ に関して次の結果が得られた。

Theorem 4. (1) $\mathrm{DS}_0 = \mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{M}})_{>2}$.
(2) $\mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{M}}) = \mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{W}})$.

(1) は [EF0] の結果を用いて [EF2] で詳しく説明されている。ここで $\mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{M}})_{>2} := \{g \in \mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{M}}) \mid (g|e_0) = (g|e_1) = (g|e_0e_1) = 0\}$ としている。

(2) について埋め込み $\mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{M}}) \subset \mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{W}})$ は [EF2] で示されている。逆向きの埋め込み $\mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{M}}) \supset \mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{W}})$ が [EF4] で示されていることである。

Remark 5. (1) 上の定理が Betti 類似 (詳しくは [EF1, EF2, EF3] を参照) に対しても成り立つことが [EF4] で示されている。
(2) Yaddaden[Y] は埋め込み $\mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{M}}) \subset \mathrm{Stab}(\Delta_*^{\mathcal{W}})$ を cyclotomic な設定に拡張している。cyclotomic な設定でもこの 2 つが一致しているかどうかはまだ判っていない。

References

[EF0] B. Enriquez, H. Furusho, *A stabilizer interpretation of double shuffle Lie algebras*, IMRN, **22** (2018), 6870–6907.

[EF1] B. Enriquez, H. Furusho, *The Betti side of the double shuffle theory. I. The harmonic coproducts*, Selecta Math. (N.S.) 27 (2021), no. 5, Paper No. 79.

[EF2] B. Enriquez, H. Furusho, *The Betti side of the double shuffle theory. II. Double shuffle relations for associators*, to appear in Selecta Math. (N.S.) 29 (2023), no.1, article no. 3.

[EF3] B. Enriquez, H. Furusho, *The Betti side of the double shuffle theory. III. Bitorsor structures*, `arXiv:1908.00444`, to appear in Selecta Math.

[EF4] B. Enriquez, H. Furusho, *The stabilizer bitorsors of the module and algebra harmonic coproducts are equal*, `arXiv:2203.01489`, preprint.

[F] H. Furusho, *Around associators*, Automorphic forms and Galois representations, 2, 105-117, London Math.Soc. Lecture Note Ser. **415** (2014), Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[R] G. Racinet, *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **95** (2002), 185–231.

[Y] K. Yaddaden, *Crossed product interpretation of the double shuffle Lie algebra attached to a finite abelian group*, to appear in PRIMS.

[Z] J. Q. Zhao, *Multiple zeta functions, multiple polylogarithms and their special values*, Series on Number Theory and its Applications, **12**, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.

〒 464-8602 名古屋市千種区不老町名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Email address: `furusho@math.nagoya-u.ac.jp`