リッチ曲率が下に有界な空間を固有関数族で球面にはめ込む

東北大学理学研究科数学専攻　本多正平
Shouhei Honda
Mathematical Institute
Tohoku Univeristy

1　紹介したいこと

部分多様体論で有名な高橋の定理の紹介から始めよう ([T66])．その証明はテンソル計算による．

定理 1.1 (高橋の定理)**.** (M^n, g) をリーマン多様体とし，$F : M^n \to \mathbb{S}^k(r)$ をはめ込みとする．ただし，$r > 0$ で $\mathbb{S}^k(r) := \{x \in \mathbb{R}^{k+1}; |x| = r\}$ には標準的なリーマン計量をいれる．このとき，F が調和写像であるための必要十分条件は，ある $\lambda \geq 0$ が存在して，$-\Delta^g f_i = \lambda f_i$ が任意の $i = 1, 2, \ldots, k+1$ に対して成り立つことである．ここで $F = (f_1, \ldots, f_{k+1})$ とかいて，F を $\mathbb{R}^{k+1}$ への滑らかな写像とみていて，Δ^g はヘッシアンのトレース，すなわち (M^n, g) のラプラシアンである．

この定理の仮定を満たす閉リーマン多様体は豊富に存在して，例えば調和多様体がその例を与える．

本講演での目的はこの高橋の定理の滑らかではない空間への一般化への試みを紹介することであった．実際それは可能で，[HS21] で期待される結果が得られている．では高橋の定理と同様の仮定の下，滑らかとは限らない空間について何かいえることはあるだろうか．

結論から述べてしまうと，実は空間は滑らかとなってしまって上の状況に帰着されてしまう．しかしこの「滑らかとなってしまう」という正則性の部分はリーマン幾何学に有限性定理として応用をもたらすのだった．このことを書き記すことが本稿の目的となる．

まず滑らかでない空間として採用する候補は幾何学では豊富に存在するが，ここで扱う対象は次の RCD **空間**と呼ばれる測度距離空間 (測度付き距離空間とも呼ばれることもある) であり，近年非常に活発に研究されている ([Amb19] はそのよいサーベイである)．測度距離空間と RCD 空間の正確な定義，およびその基本性質 (本質的次元の定義など) は本稿の最後の章を見てほしい (定義 3.1および定義 3.10を参照)．

定義 1.2 (RCD 空間のナイーブな定義)**.** 測度距離空間 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ が適当な $K \in \mathbb{R}, N \in [1, \infty)$ で

$$\mathrm{Ric}_{(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})} \geq K, \quad \dim_{(X,\mathsf{d},\mathfrak{m})} \leq N \tag{1.1}$$

が **synthetic な意味で**成り立つとき，$(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を $\mathrm{RCD}(K, N)$ **空間**，もしくはもっと簡単に RCD **空間**という．さらに $\mathfrak{m}$ が N 次元ハウスドルフ測度 $\mathscr{H}^N$ に一致するとき，**非崩壊**と呼ばれる．

非崩壊な RCD 空間は一般の RCD 空間に比べてよい性質を持つことが知られている ([DePhG18])．実際，RCD 空間はリッチ曲率が下に有界なリーマン多様体の測度付きグロモフ・ハウスドルフ極限空間 (リッチ極限空間ともよばれる) の synthetic 化とみなされていることに対して，非崩壊 RCD 空間はそのリッチ極限空間でも体積がつぶれていない (次元

が落ちないといっても同じ）場合の synthetic 化に対応しており，その体積がつぶれていないリッチ極限空間のよい性質 (ほぼ位相多様体であるなど) が非崩壊 RCD 空間でも成り立っている．

ここで主結果を紹介しよう

定理 1.3. $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を本質的次元が n であるコンパクトな RCD 空間とし，$F : X \to \mathbb{R}^{k+1}$ をはめ込みの固有写像とする．すなわち，$F^* g_{\mathbb{R}^{k+1}} = g$ が成り立ち，さらに $F = (f_1, \ldots, f_{k+1})$ と書いたとき，各 f_i に対して適当な非負の実数 λ_i で $-\Delta f_i = \lambda_i f_i$ が成り立ち，f_i は定数ではないとする．[1] ここで g は $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の自然なリーマン計量である．このとき次が成り立つ．

1. $|F|$ が定数であるための必要十分条件は $\mathfrak{m}$ が n 次元ハウスドルフ測度 $\mathscr{H}^n$ の定数倍であるときである．さらにそのとき $(X, \mathsf{d}, \mathscr{H}^n)$ は非崩壊 RCD 空間となる．

2. $|F|$ が定数であれば (X, d) はある n 次元閉リーマン多様体と同型である．

3. $|F|$ が定数で，あれば $k \geq n$ が成り立つ．さらに $k = n$ のとき (X, d) は適当な半径の標準的な n 次元球面に同型である．

$(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の自然なリーマン計量 g は $\mathfrak{m}$-a.e. で定義され，これから等号 $F^* g_{\mathbb{R}^{k+1}} = g$ も $\mathfrak{m}$-a.e. で意味をもつことに注意しておく．定理 1.3で 1 と 3 が著者によって [Hon21] で証明され，2 は後に [H22] で黄によって証明された (私は 2 の状況で双リプシッツ位相多様体になるところまでしかわからなかった)．2 がわかれば 3 はほぼ自明といえることに注意しておく．

次にこの定理の系を 2 つ紹介しよう．簡略化のためリーマン多様体で主張をかいているが，RCD 空間版もあることは注意しておく．

系 1.4 (球面定理)**.** 任意の $N \in [1, \infty)$，$K \in \mathbb{R}, \tau > 0$ および任意の $d > 0$ に対して，ある $\delta = \delta(N, K, \tau, d) > 0$ が存在して，次が成り立つ：

- もし n 次元閉リーマン多様体 (M^n, g) が，$n \leq N$，$\mathrm{Ric}^g \geq Kg$，$\mathrm{diam}(M^n, \mathsf{d}^g) \leq d$ が成り立ち，さらに，ある固有写像 $F : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して
$$\frac{1}{\mathrm{vol}^g M^n} \int_{M^n} |F^* g_{\mathbb{R}^{n+1}} - g| \, \mathrm{dvol}^g < \delta \tag{1.2}$$
かつ，$F = (f_1, \ldots, f_{n+1})$ と書いたときに
$$\frac{1}{\mathrm{vol}^g M^n} \int_{M^n} |f_i|^2 \, \mathrm{dvol}^g \geq \tau \tag{1.3}$$
が任意の $i = 1, 2, \ldots, n+1$ で成り立てば，M^n は標準的 n 次元球面に微分同相である．

これはリッチ曲率に関する球面定理において，リッチ曲率が正であることを仮定しない初めての結果になっていると思われる．証明は次のように背理法でおこなう．結論を否定すると，n 次元球面と微分同相ではない n 次元閉リーマン多様体の列 (M_i^n, g_i) で，$n \leq N$，$\mathrm{Ric}^{g_i} \geq K g_i$，$\mathrm{diam}(M_i^n, \mathsf{d}^{g_i}) \leq d$ を満たし，固有写像 $F_i : M_i^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ で
$$\frac{1}{\mathrm{vol}^{g_i} M_i^n} \int_{M_i^n} |F_i^* g_{\mathbb{R}^{n+1}} - g_i| \, \mathrm{dvol}^{g_i} \to 0 \tag{1.4}$$
および
$$\frac{1}{\mathrm{vol}^{g_i} M_i^n} \int_{M_i^n} |f_{i,j}|^2 \, \mathrm{dvol}^g \geq \tau \tag{1.5}$$

[1] 高橋の定理とは異なり，λ_i が i によってもよいことに注意．

が任意の i, j で成り立つものが存在することがわかる．ここで $F_i = (f_{i,1}, \dots, f_{i,n+1})$ である．ここで測度付きグロモフ・ハウスドルフ (mGH)[2]収束に関する，RCD 空間のモジュライのコンパクト性定理 (例えば [GMS13]) を適用すると，適当に部分列を抜いた後で，あるコンパクトな $\mathrm{RCD}(K, n)$ 空間 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ が存在して，M_i^n が X に収束していることがわかる．より正確には次が成り立つ；

$$\left(M_i^n, \mathsf{d}^{g_i}, \frac{\mathrm{vol}^{g_i}}{\mathrm{vol}^{g_i} M_i^n}\right) \overset{\mathrm{mGH}}{\to} (X, \mathsf{d}, \mathfrak{m}). \tag{1.6}$$

この列が非崩壊であること，すなわち次元が極限で落ちていないこと，すなわち $\mathfrak{m}$ が $\mathscr{H}^n$ の定数倍に等しいことをまず示そう．それはチーガー・コールディングによって [CC00b] で得られたスペクトル収束を使う．そのスペクトル収束を使うと F_i が適当な固有写像 $F : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ に一様収束，およびエネルギーまでも収束していることがわかる．ここで (1.4) を考えると $F^* g_{\mathbb{R}^{n+1}} = g$ が成り立つことがわかる．特に X の本質的次元 $\dim X$ に関して

$$\begin{aligned}\dim X = \int_X |g|^2 \, d\mathfrak{m} &= \int_X |F^* g_{\mathbb{R}^{n+1}}|^2 \, d\mathfrak{m} \\ &= \lim_{i\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}^{g_i} M_i^n} \int_{M_i^n} |F_i^* g_{\mathbb{R}^{n+1}}|^2 \, d\mathrm{vol}^{g_i} \\ &= \lim_{i\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}^{g_i} M_i^n} \int_{M_i^n} |g_i|^2 \, d\mathrm{vol}^{g_i} = n \end{aligned} \tag{1.7}$$

となって非崩壊がわかる．すなわち $\mathfrak{m} = a\mathscr{H}^n$ となる定数 $a > 0$ が存在する (実はここにも [CC97] の定理を使っているのだが，その説明は省略する)．

ここで定理 1.3の 1 を使うと，$|F|$ が定数であることがわかる．さらにその 3 も使えば (X, d) は適当な半径の標準的な n 次元球面に同型であることが従う．ここでまたもチーガー・コールディングによって [CC97] で得られた位相的安定性定理を使うと，十分大きな任意の i に対して M_i^n が X と微分同相であることが従う．[3] これは M_i^n が球面と微分同相でないとした仮定に矛盾する．よって系 1.4が得られた．

次に定理 1.3のもう一つの応用を紹介しよう．それは冒頭でも述べた有限性定理である．その主張のために，任意の $N \in [1, \infty), K \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \tau > 0$ および任意の $d > 0$ に対して，$\mathcal{M}(N, K, \epsilon, \tau, d)$ で，以下を満たす閉リーマン多様体 (M^n, g) の等長類全体の集合を表すとする：$n \le N$，$\mathrm{Ric}^g \ge Kg$，$\mathrm{diam}(M^n, \mathsf{d}^g) \le d$ および，ある固有写像 $F : M^n \to \mathbb{R}^m$ が存在して，

$$\frac{1}{\mathrm{vol}^g M^n} \int_{M^n} |F^* g_{\mathbb{R}^{n+1}} - g| \, d\mathrm{vol}^g < \epsilon \tag{1.8}$$

かつ

$$\frac{1}{\mathrm{vol}^g M^n} \int_{M^n} |f_i|^2 \, d\mathrm{vol}^g \ge \tau \tag{1.9}$$

が任意の $i = 1, 2, \dots, m$ で成り立つ．

系 1.5. 任意の $N \in [1, \infty), K \in \mathbb{R}, \tau > 0$ および任意の $d > 0$ に対して，ある $\epsilon_0 = \epsilon_0(N, K, \tau, d) > 0$ が存在して，$\mathcal{M}(N, K, \epsilon_0, \tau, d)$ に含まれる多様体の微分同相類の数は高々有限個である．

証明は系 1.4と同様に背理法で行われる．証明のアイデアは概ね同じなので，ここではその概略だけ紹介しよう．結論を否定すると，どの 2 つも互いに微分同相でない n 次元閉リー

---

[2]測度付きグロモフ・ハウスドルフ収束は英語で **m**easured **G**romov-**H**ausdorff convergence と書くのでその頭文字を取っている．

[3]この位相的安定性定理には改良版が [HonP22] で知られている．それを用いると，X の球面の半径を $b > 0$ としたとき，$bF_i/|F_i| : M_i^n \to X$ が微分同相写像を与えることがわかる．

マン多様体の列 (M_i^n, g_i) で，それらはある $\epsilon_i \to 0^+$ に対して，$(M_i^n, g_i) \in \mathcal{M}(N, K, \epsilon_i, \tau, d)$ を満たすものが存在する．ここでまたも RCD 空間のモジュライのコンパクト性定理を適用すると，あらかじめ部分列を抜いておくことで，(1.6) の状況が成り立つことになる．さらに，やはり系 1.4と同様の議論で，(X, d) はある n 次元閉リーマン多様体と同型で，$\mathfrak{m} = a\mathscr{H}^n$ となる定数 $a > 0$ が存在することがわかる.[4] よって位相的安定性定理を使えば，十分大きな任意の i に対して M_i^n は X と微分同相となることがわかる．これは $\{M_i^n\}_i$ が互いに微分同相でない仮定に矛盾する．

2 定理 1.3の証明

ここは定理 1.3の証明のアイデアを紹介することが目的である．まず 1 について．これは次を証明することが鍵である；固有写像 $F : X \to \mathbb{R}^m$ に対して

$$\nabla^* F^* g_{\mathbb{R}^m} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\Delta|F|^2. \tag{2.1}$$

証明は単純計算である．そこでもし $|F|$ が定数と仮定すると，(2.1) の右辺は消える．よって左辺も消えることになる．さらに $F^* g_{\mathbb{R}^{k+1}} = g$ を思い出すと，これは $\Delta f = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}_f)$ を意味することがわかる．これから [Hon20] の結果を使うと $\mathfrak{m} = a\mathscr{H}^n$ がある定数 $a > 0$ で成り立つことが従う．逆の主張も同様である．

次に 2 を考える．[AH17, AH18] による関数のブローアップという手法を用いると，任意の $x \in X$ に対して，適当に $f_{i(1)}, \ldots, f_{i(n)}$ を選ぶと，それらを並べて x の周りで双リプシッツ座標近傍を与えることがわかる．問題はここからどうやってその座標近傍の正則性をあげるかである．ボホナー不等式を思い出すと

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f_i|^2 \geq -\lambda_i|\nabla f_i|^2 + K|\nabla f_i|^2 \tag{2.2}$$

は弱解の意味で成り立つことがわかる．ここで λ_i は f_i の固有値である．各 f_i はリプシッツであることが知られているので，この不等式は $\Delta|\nabla f_i|^2$ の (弱い意味での) 下からの有界性を与えていることを意味する．後はこれを上からの有界性も導きたいのだが，一般論ではそこに届かないことが分かっている．そこで $F^* g_{\mathbb{R}^m} = g$ の仮定を用いる．すると

$$|\nabla f_i|^2 = n - \sum_{j \neq i} |\nabla f_j|^2 \tag{2.3}$$

がわかる．この右辺の $|\nabla f_j|^2$ の係数は負であることに注目する．そこでこの両辺にラプラシアンをあてると，先ほどの考察から，欲しい上からの有界性がでることがわかる．後は楕円型方程式の標準的なテクニックで $|\nabla f_i|^2$ がリプシッツであることが従う．このことから $(f_{i(1)}, \ldots, f_{i(n)})$ が $C^{1,1}$ 座標近傍を与えることまでわかる．後はこれを滑らかな写像にまで正則性を改良するために F が固有写像であることを用いるのだが，これ以上の詳細は原論文 [H22] に委ねることとする．

最後に 3 を考える．仮定とこれまでの議論から X が F によって局所的には球面と同型であることまでがわかる．今，スケール変換をすることで，この球面の半径は 1 としてよい．よって X の断面曲率は恒等的に 1 に，従ってリッチ曲率は $(n-1)g$ に恒等的に等しい．今一般性を失うことなく $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n+1}$ と仮定してもよい．このとき

$$\begin{aligned}\lambda_1 \leq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\mathscr{H}^n(X)} \int_X |\nabla f_i|^2 \,\mathrm{d}\mathscr{H}^n &= \frac{1}{\mathscr{H}^n(X)} \int_X \langle F^* g_{\mathbb{R}^m}, g\rangle \,\mathrm{d}\mathscr{H}^N \\ &= \frac{1}{\mathscr{H}^n(X)} \int_X \langle g, g\rangle \,\mathrm{d}\mathscr{H}^n = n \end{aligned} \tag{2.4}$$

[4] ここは正確にはもう少し議論が必要なところで，a priori にはターゲットのユークリッド空間の次元 m は M_i^n に依存しているためである．よってこの m は有界にとることができることを示す必要があり，それは可能である．

となって，これと小畠の定理を組み合わせると X は F によって球面と同型であることがわかる．よって定理 1.3が得られた．

3 RCD 空間およびその本質的次元の定義

この最後の章では，RCD(K, N) 空間の正確な定義と本質的次元の定義，そして滑らかな測度距離空間との関係を述べることが目的である．

定義 3.1 (測度距離空間)**.** 3 つ組 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ が**測度距離空間**であるとは，次の 2 性質を満たすときをいう：

1. (X, d) は完備可分な距離空間．
2. $\mathfrak{m}$ が X 上のボレル測度で，そのサポートは X に一致する．

典型例は重み付きリーマン多様体である：

例 3.2. 完備な n 次元リーマン多様体 (M^n, g) と滑らかな関数 $f \in C^\infty(M^n)$ に対して

$$(M^n, \mathsf{d}^g, \mathrm{vol}^g_f) \tag{3.1}$$

は定義 3.1の意味で測度距離空間である．ここに d^g は g から誘導される M^n 上の自然な距離で，vol^g は g から誘導される自然なリーマン測度 (すなわち d^g に関する n 次元ハウスドルフ測度といってもよい)，そして vol^g_f は次で定まる M^n 上の Borel 測度である：

$$\mathrm{vol}^g_f\, A := \int_A e^{-f}\,\mathrm{dvol}^g.$$

この測度距離空間 (3.1) を**滑らかな測度距離空間**という．

以下，測度距離空間 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を一つ固定して話を進める．

定義 3.3 (チーガーエネルギー)**. チーガーエネルギー** $\mathsf{Ch} : L^2(X, m) \to [0, \infty]$ を次で定義する：

$$\mathsf{Ch}(f) := \inf\left\{\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_X \mathrm{Lip}^2(f_n)\,\mathrm{d}\mathfrak{m};\ f_n \in \mathrm{Lip_b}(X, \mathsf{d}) \cap L^2(X, \mathfrak{m}),\ \|f_n - f\|_{L^2} \to 0\right\}, \tag{3.2}$$

ここに $\mathrm{Lip_b}(X, \mathsf{d})$ で X 上定義された有界なリプシッツ関数全体を，$\mathrm{Lip}(f)$ で f の局所リプシッツ定数を表す，すなわち $x \in X$ が孤立点でないとき，

$$\mathrm{Lip} f(x) := \limsup_{y\to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{\mathsf{d}(x, y)} \tag{3.3}$$

とし，孤立点のときは 0 と約束する (本稿で扱うケースでは孤立する場合はない)．

定義 3.4 (ソボレフ空間)**. ソボレフ空間** $H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を次のように定義する：

$$H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m}) := \left\{f \in L^2(X, \mathfrak{m}); \mathsf{Ch}(f) < \infty\right\}.$$

これは自然なノルム $\|f\|^2_{W^{1,2}} = \|f\|^2_{L^2} + 2\mathsf{Ch}(f)$ に関してバナッハ空間になる．

一般に $H^{1,2}(X)$ はヒルベルト空間でない．例えば $(\mathbb{R}^2, |x| + |y|, \mathcal{L}^2)$ は測度距離空間だが，この $H^{1,2}$ はヒルベルト空間でない．

定義 3.5 (リラックスされた勾配)**.** 各 $f \in H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ に対して次を満たす $h \in L^2(X, \mathfrak{m})$ を f の**リラックスされた勾配**といい，それ全体を $R_f \subset L^2(X, \mathfrak{m})$ と書く．

- f に L^2 強収束する関数列 $f_n \in \mathrm{Lip}_b(X, \mathsf{d}) \cap L^2(X, \mathfrak{m})$ と，$\mathrm{Lip} f_n$ の L^2 弱極限 $F \in L^2(X, \mathfrak{m})$ が存在して，$F \le h$ が $\mathfrak{m}$-a.e. で成り立つ．

R_f は $L^2(X, \mathfrak{m})$ で凸かつ閉集合であることが容易に確かめられる．よって次を満たす $|\nabla f| \in R_f$ が一意的に定まり，これを f の**最小弱勾配**という：

$$\||\nabla f|\|_{L^2} = \inf_{h \in R_f} \|h\|_{L^2}. \tag{3.4}$$

このとき次が成り立つことが知られている：

命題 3.6. 任意の $f \in H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ に対して次が成り立つ：

$$\mathsf{Ch}(f) = \frac{1}{2} \int_X |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{3.5}$$

定義 3.7 (無限小ヒルベルト的)**.** $H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ がヒルベルト空間となるとき，$(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を**無限小ヒルベルト的**と呼ぶ．

以下では $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ は無限小ヒルベルト的とする．このとき任意の $f, h \in H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ に対して

$$\langle \nabla f, \nabla h \rangle := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{|\nabla (f + \epsilon h)|^2 - |\nabla f|^2}{2\epsilon} \tag{3.6}$$

と置く．これは $\mathfrak{m}$-a.e. で意味を持ち，$L^1(X, \mathfrak{m})$ に属する． この $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の自然なリーマン計量 g に他ならないが，そのきちんとした定式化はかなり手間がかかるため，ここでは与えないこととする．

ここで**ラプラシアン**が定義できる．

定義 3.8 (ラプラシアン)**.** 線形作用素 $\Delta : D(\Delta) \to L^2(X, \mathfrak{m})$ を次で定義する：

$$f \in D(\Delta) \iff \exists h := \Delta f \in L^2(X, \mathfrak{m}) \text{ s.t. } \int_X hg \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = -\int_X \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \ \ \forall g \in H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m}).$$

例 3.9. 滑らかな測度距離空間 (3.1) は無限小ヒルベルト的であって，$C_c^\infty(M^n)$ は $H^{1,2}(M^n, \mathsf{d}_g, \mathrm{vol}_g^f)$ の稠密部分集合である．そして任意の $\varphi, \psi \in C_c^\infty(M^n)$ に対して $\langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle = g(\nabla \varphi, \nabla \psi)$ が成り立つ．すなわちこの場合 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はリーマン計量 g に他ならなく，特に測度によらない概念である．一方で直接計算でラプラシアンは

$$\Delta \varphi = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}_\varphi^g) - g(\nabla \varphi, \nabla f) \tag{3.7}$$

となることがわかり，これは測度による概念である．

ここで少し考察をしよう．説明の簡略化のため，n 次元完備リーマン多様体 (M^n, g) を固定する．このとき**ボホナー公式**とは任意の $f \in C^\infty(M^n)$ に対して，各点で次の等号が成り立つことを主張する：

$$\frac{1}{2}\Delta |\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess}_f^g|^2 + g(\nabla \Delta^g f, \nabla f) + \mathrm{Ric}^g(\nabla f, \nabla f). \tag{3.8}$$

これから次が直ちにわかる：$\mathrm{Ric}^g \ge K$ かつ $n \le N$ を満たすための必要十分条件は

$$\frac{1}{2}\Delta |\nabla f|^2 \ge \frac{(\Delta^g f)^2}{N} + g(\nabla \Delta^g f, \nabla f) + K|\nabla f|^2 \tag{3.9}$$

が任意の $f \in C^\infty(M^n)$ で成り立つことである．これは積分で書いた

$$\frac{1}{2}\int_{M^n} \Delta\varphi |\nabla f|^2 \,\mathrm{dvol}^g \geq \int_{M^n} \varphi \left(\frac{(\Delta^g f)^2}{N} + g(\nabla \Delta^g f, \nabla f) + K|\nabla f|^2\right) \mathrm{dvol}^g \tag{3.10}$$

が任意の $f \in C^\infty(M^n)$ と $\varphi \geq 0$ を満たす任意の $\varphi \in C_c^\infty(M^n)$ で成り立つこととも同値であることに注意しよう．

以上の考察の下に，RCD 空間の定義を今与えよう ([AGS14b, AMS19, CM21, EKS15] も参照)．

定義 3.10 (RCD(K,N) 空間)**.** 測度付き距離空間 $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ がある $K \in \mathbb{R}$ とある $N \in [1,\infty]$ に対して RCD(K,N) 空間であるとは以下の 4 条件を満たすときをいう．

1. $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ は無限小ヒルベルト的である．
2. ある $x \in X$ とある $C > 1$ が存在して，
$$\mathfrak{m}(B_r(x)) \leq Ce^{Cr^2} \tag{3.11}$$
が任意の $r > 0$ で成り立つ．
3. もし $f \in H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m}) \cap L^\infty(X, \mathfrak{m})$ が $|\nabla f| \leq 1$ を $\mathfrak{m} - a.e.$ で満たせば，X 上の 1-リプシッツ関数 $\hat{f}$ が存在して $f = \hat{f}$ が $\mathfrak{m}$-a.e. で成り立つ．
4. 次の不等式が，$\Delta f \in H^{1,2}(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を満たす任意の $f \in D(\Delta)$ と $\Delta\varphi \in L^\infty(X, \mathfrak{m})$ を満たす $\mathfrak{m}$-a.e. で非負値の任意の $\varphi \in D(\Delta) \cap L^\infty(X, \mathfrak{m})$ に対して成り立つ：
$$\frac{1}{2}\int_X \Delta\varphi |\nabla f|^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{m} \geq \int_X \varphi \left(\frac{(\Delta f)^2}{N} - \langle \nabla \Delta f, \nabla f\rangle + K|\nabla f|^2\right) \mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{3.12}$$

次に本質的次元の定義を与えよう．次は [BS20] で証明された．

定理 3.11 (本質的次元)**.** *$K, \in \mathbb{R}, N \in [1,\infty)$ とし，$(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ を 1 点ではない RCD(K,N) 空間とする．一意的な $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathfrak{m}$-a.e. $x \in X$ で*

$$\left(X, \frac{1}{r}\mathsf{d}, \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}(B_r(x))}, x\right) \stackrel{\mathrm{pmGH}}{\to} \left(\mathbb{R}^n, \mathsf{d}_{\mathbb{R}^n}, \frac{\mathcal{L}^n}{\mathcal{L}^n(B_1(0_n))}, 0_n\right) \tag{3.13}$$

*が成り立つ．*ここに上の収束は点付きグロモフ・ハウスドルフ収束の意味である．この n を $(X, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ の**本質的次元**という．

例 3.12. 滑らかな測度距離空間 $(M^n, \mathsf{d}^g, \mathrm{vol}_f^g)$ が RCD(K,N) 空間であるための必要十分条件は次の 2 条件を満たすことである：

1. $n \leq N$.
2. $$\mathrm{Ric}^g + \mathrm{Hess}_f^g - \frac{\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f}{N-n} \geq K. \tag{3.14}$$

ここで，これらが $n = N$ で成り立つということは，$\mathrm{Ric}^g \geq K$ かつ f が定数であることを意味するものとする．そして実際に RCD(K,N) 空間となったとき，その本質的次元は n に他ならない．

References

[Amb19] L. Ambrosio: *Calculus, heat flow and curvature-dimension bounds in metric measure spaces*, Proceedings of the ICM 2018, Vol. 1, World Scientific, Singapore, (2019), 301–340.

[AGS14b] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré: *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), 1405–1490.

[AH17] L. Ambrosio, S. Honda: *New stability results for sequences of metric measure spaces with uniform Ricci bounds from below*, in Measure Theory in Non-Smooth Spaces, 1–51, De Gruyter Open, Warsaw, 2017.

[AH18] L. Ambrosio, S. Honda: *Local spectral convergence in* $\mathrm{RCD}^*(K,N)$ *spaces*, Nonlinear Anal. **177** Part A (2018), 1–23.

[AMS19] L. Ambrosio, A. Mondino, G. Savaré: *Nonlinear diffusion equations and curvature conditions in metric measure spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **262** (2019), no. 1270.

[BS20] E. Brué, D. Semola: *Constancy of dimension for* $\mathrm{RCD}(K,N)$ *spaces via regularity of Lagrangian flows*, Comm. Pure and Appl. Math. **73** (2020), 1141–1204.

[CM21] F. Cavalletti, E. Milman: *The Globalization Theorem for the Curvature Dimension Condition*, Invent. Math. **226** (2021), no. 1, 1–137.

[CC97] J. Cheeger, T. H. Colding: *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*, J. Differential Geom. **46** (1997), 406-480.

[CC00b] J. Cheeger, T. H. Colding: *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III.*, J. Differential Geom. **54** (2000), 37-74.

[DePhG18] G. De Philippis, N. Gigli: *Non-collapsed spaces with Ricci curvature bounded from below.* J. Éc. Polytech. Math. **5** (2018), 613-650.

[GMS13] N. Gigli, A. Mondino, G. Savaré: *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows.* Proceedings of the London Mathematical Society, **111** (2015), 1071–1129.

[EKS15] M. Erbar, K. Kuwada, K.-T. Sturm: *On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces,* Invent. Math., **201** (2015), 993–1071.

[Hon20] S. Honda: *New differential operator and non-collapsed RCD spaces.* Geom. Topol., **24** (2020), no. 4, 2127—2148.

[Hon21] S. Honda: *Isometric immersion of* RCD *spaces.* Comm. Math. Helv. **96** (2021), no. 3, 515–559.

[HonP22] S. Honda, Y. Peng: *A note on the topological stability theorem from* RCD *spaces to Riemannian manifolds.* manuscripta math. (2022), https://doi.org/10.1007/s00229-022-01418-7

[HS21] S. Honda, Y. Sire: *Sobolev mapping between* RCD *spaces and applications to harmonic maps: a heat kernel appoach.* arXiv:2105.08578.

[H22] Z. Huang: *Isometric immersions of* $\mathrm{RCD}(K,N)$ *spaces via heat kernels*, arXiv:2205.11768v2.

[T66] T. Takahashi: *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 380-385.