Riemann空間形内のChern–Federer部分多様体

工学院大学 学習支援センター [1]　佐藤 雄一郎 [2]
Yuichiro Sato
Academic Support Center, Kogakuin University

1. 導入

[1] にて，Riemann 多様体間の写像の第二基本形式から定まる積分不変量に関する第一変分公式についての研究が行われた．特に第二基本形式の成分から定まる 2 次斉次多項式に焦点を当てると，対応する積分不変量はスケーリングの差を除いて S^1 族として得られ，二重エネルギー汎関数 ([7]) を含むことが分かる．その S^1 族に対し，変分問題を考えると，一般に Euler–Lagrange 方程式は 4 階偏微分方程式になるが，その中で 2 階偏微分方程式になるものが唯一存在することが分かった．我々はその積分不変量を Chern–Federer エネルギー汎関数と呼ぶことにし，本稿では，その Euler–Lagrange 方程式を満たす写像の具体例を概説する．

2. Chern–Federer部分多様体

(M^m, g_M), (N^n, g_N) を Riemann 多様体，$\varphi : M^m \to N^n$ を C^∞ 級写像とする．このとき，写像 φ の第二基本形式 $h \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \varphi^*TN)$ を

$$h(X, Y) := \nabla_X^{\varphi^*TN} \varphi_* Y - \varphi_* \nabla_X^{TM} Y \quad (X, Y \in \Gamma(TM))$$

で定める．ここで ∇^{TM} は (M^m, g_M) の Levi–Civita 接続，∇^{φ^*TN} は (N^n, g_N) の Levi–Civita 接続 ∇^{TN} から誘導される引戻し束 φ^*TN 上の接続である．このとき，h は φ^*TN に値を持つ $(0, 2)$ 型対称テンソル場である．さらに次の量を定める．

$$\mathcal{Q}_1(h) := |h|^2, \quad \mathcal{Q}_2(h) := |\mathrm{tr}_{g_M} h|^2 = |\tau(\varphi)|^2,$$

$$\mathrm{CF}(h) := \mathcal{Q}_2(h) - \mathcal{Q}_1(h) = |\tau(\varphi)|^2 - |h|^2,$$

$$\mathrm{WC}(h) := m\mathcal{Q}_1(h) - \mathcal{Q}_2(h) = m|h|^2 - |\tau(\varphi)|^2 = m|\mathring{h}|^2.$$

ここで

$$\mathring{h}(X, Y) := h(X, Y) - \frac{g_M(X, Y)}{m} \tau(\varphi)$$

である．これらの量は正規直交基底を取れば，第二基本形式の成分に関する 2 次斉次多項式であり，その正規直交基底の取り方に依らない不変多項式になっている．

逆に第二基本形式の成分に関する 2 次斉次不変多項式の成す実線形空間 $\mathcal{U}$ を考えると，$m \geq 2$ ならば $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = 2$ であり，$m = 1$ ならば $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = 1$ である．さらに基底として $\{\mathcal{Q}_1(h), \mathcal{Q}_2(h)\}$, あるいは $\{\mathrm{CF}(h), \mathrm{WC}(h)\}$ が選べる．すなわち，

$$\mathcal{U} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{\mathcal{Q}_1(h), \mathcal{Q}_2(h)\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{\mathrm{CF}(h), \mathrm{WC}(h)\}$$

が成立する．$m = 1$ のときは $\mathcal{Q}_1(h) = \mathcal{Q}_2(h)$ が成り立つ．

[1] 〒192-0015 東京都八王子市中野町 2665-1
[2] E-mail: kt13699@ns.kogakuin.ac.jp

任意の$\mathcal{P}(h) \in \mathcal{U}$に対し，積分不変量

$$I^{\mathcal{P}}(\varphi) := \int_M \mathcal{P}(h)\, d\mu_{g_M}$$

を定める．ここで$d\mu_{g_M}$はRiemann多様体(M^m, g_M)の体積要素を表し，積分の収束性は適当に仮定する．これにより，写像$\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$に対して汎関数の族が得られる．特に$\mathcal{U}$の零でない二元に対し，零でない定数倍によって等しいものを同一視すれば本質的な汎関数はS^1族を成す.

汎関数が得られたので，変分法を適用することができる．特に第一変分公式を導出することにより，汎関数の臨界点を与える写像を特徴づける偏微分方程式であるEuler–Lagrange方程式を考えることができる．特別な汎関数の場合には以下の表1のようにまとめることができる．$\mathcal{Q}_2(h)$に対する積分不変量$I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi)$は二重調和エネルギー汎関数の2倍に一致する．すなわち，積分不変量$I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi)$に対する変分問題は二重エネルギー汎関数に対するそれと等価であり，従ってそれらのEuler–Lagrange方程式は一致する．詳細は後述する命題1および論文[1]を参照せよ．

	積分不変量	名称	Euler–Lagrange方程式
$\mathcal{Q}_1(h)$	$I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi)$	$\mathcal{Q}_1$ エネルギー	4階偏微分方程式
$\mathcal{Q}_2(h)$	$I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi)$	$\mathcal{Q}_2$ エネルギー	4階偏微分方程式
$\mathrm{WC}(h)$	$I^{\mathrm{WC}}(\varphi)$	Willmore–Chen エネルギー	4階偏微分方程式
$\mathrm{CF}(h)$	$I^{\mathrm{CF}}(\varphi)$	Chern–Federerer エネルギー	2階偏微分方程式

表 1: 各種汎関数の総覧.

以下断らない限り$\{e_i\}_{i=1}^m$は(M^m, g_M)の局所正規直交枠場を表すものとする．またベクトル場$X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$に対し，

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla} h)(X, Y, Z) &:= \nabla_X^{\varphi^* TN} h(Y, Z) - h(\nabla_X^{TM} Y, Z) - h(Y, \nabla_X^{TM} Z), \\
(\widetilde{\nabla}^2 h)(X, Y, Z, W) &:= \nabla_X^{\varphi^* TN} (\widetilde{\nabla} h)(Y, Z, W) - (\widetilde{\nabla} h)(\nabla_X^{TM} Y, Z, W) \\
&\quad - (\widetilde{\nabla} h)(Y, \nabla_X^{TM} Z, W) - (\widetilde{\nabla} h)(Y, Z, \nabla_X^{TM} W)
\end{aligned}$$

で定める.

- $\mathcal{Q}_1$ **エネルギー**

$$I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi) = \int_M |h|^2\, d\mu_{g_M}$$

の第一変分を考えることにより，Euler–Lagrange方程式

$$W_1(\varphi) := \sum_{i,j} \Big\{ (\widetilde{\nabla}^2 h)(e_i, e_j, e_i, e_j) + R^N\big(h(e_i, e_j), \varphi_* e_i\big)\varphi_* e_j \Big\} = 0$$

が得られる．ここで$W_1(\varphi) \in \Gamma(\varphi^* TN)$である．$\varphi$が$\mathcal{Q}_1$写像であるとは$W_1(\varphi) = 0$を満たすこととして定める．これは$\varphi$に関する4階偏微分方程式である.

• $\mathcal{Q}_2$ **エネルギー**

$$I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi)=\int_M |\tau(\varphi)|^2\, d\mu_{g_M}$$

の第一変分を考えることにより，Euler–Lagrange 方程式

$$W_2(\varphi):=\sum_{i,j}\Big\{(\widetilde{\nabla}^2 h)(e_i,e_i,e_j,e_j)+R^N\big(h(e_i,e_i),\varphi_* e_j\big)\varphi_* e_j\Big\}=0$$

が得られる．ここで $W_2(\varphi)\in\Gamma(\varphi^*TN)$ である．φ が $\mathcal{Q}_2$ 写像であるとは $W_2(\varphi)=0$ を満たすこととして定める．

C^∞ 級写像 $\varphi\colon(M^m,g_M)\to(N^n,g_N)$ に対して，φ の二重テンション場を

$$\tau_2(\varphi):=-\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\,\tau(\varphi)+\mathrm{tr}_{g_M} R^N(\tau(\varphi),\varphi_*)\varphi_*$$

で定める．ここで $-\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}$ は引戻し束 φ^*TN 上の接続 ∇^{φ^*TN} から定まる疎ラプラシアン (接続ラプラシアン) を表す．このとき，次が成立する．

命題 1 ([1])**.** $W_2(\varphi)=\tau_2(\varphi)$.

命題 1 より，写像 φ が $\mathcal{Q}_2$ 写像であることと二重調和写像であることは同値である．特に写像 φ に関する 4 階偏微分方程式として特徴づけられることになる．

微分・積分の線形性より，Willmore-Chen エネルギーと Chern–Federer エネルギー

$$I^{\mathrm{WC}}(\varphi)=\int_M m|\mathring{h}|^2\, d\mu_{g_M},\quad I^{\mathrm{CF}}(\varphi)=\int_M |\tau(\varphi)|^2-|h|^2\, d\mu_{g_M}$$

の Euler–Lagrange 方程式はそれぞれ

$$mW_1(\varphi)-W_2(\varphi)=0,\quad W_2(\varphi)-W_1(\varphi)=0$$

となる．

Willmore-Chen エネルギー，Chern–Federer エネルギーの臨界点を与える写像をそれぞれ Willmore–Chen 写像，Chern–Federer 写像と呼ぶことにすれば，前者の Euler–Lagrange 方程式は一般に 4 階偏微分方程式であるが，後者の Euler–Lagrange 方程式は 2 階偏微分方程式に階数が下がる．実際，次が成立する．

定理 2 ([1])**.** Riemann 多様体間の C^∞ 級写像 $\varphi:(M^m,g_M)\to(N^n,g_N)$ が Chern–Federer 写像であるための必要十分条件は次の Euler–Lagrange 方程式を満たすことである:

$$\begin{aligned}&\left(\nabla^{TN}R^N\right)(\varphi_*e_i,\varphi_*e_i,\varphi_*e_j)\,\varphi_*e_j-\varphi_*\left(\left(\nabla^{TM}R^M\right)(e_i,e_i,e_j)e_j\right)\\&\quad+2R^N\big(h(e_i,e_i),\varphi_*e_j\big)\varphi_*e_j+2R^N\big(\varphi_*e_i,h(e_i,e_j)\big)\varphi_*e_j-h(e_i,R^M(e_i,e_j)e_j)=0.\end{aligned}$$

ここで R^M,R^N はそれぞれ $(M^m,g_M),(N^n,g_N)$ の Riemann 曲率テンソル場であり，上式は $1\le i,j\le m$ の範囲にわたって総和を取っていることに注意せよ．

逆に得られた汎関数の S^1 族に対し，Euler–Lagrange 方程式は一般に 4 階偏微分方程式であり，Chern–Federer エネルギーが唯一階数が 2 階に落ちる．

定義より，自明な $\mathcal{Q}_1$ 写像として $h=0$ を満たすものがあるが，これは全測地的写像と呼ばれる．同様にして自明な $\mathcal{Q}_2$ 写像として $\tau(\varphi)=0$ を満たすものがあるが，これ

は調和写像である．また自明なWillmore–Chen写像として$\mathring{h}=0$を満たすものがあるが，この条件はφが等長はめ込みのとき，全臍的はめ込みと呼ばれる．

等長はめ込みφに対し，2階偏微分方程式$\tau(\varphi)=0$を満たすものは極小はめ込みであることと同値になり，幾何学的な意味を持つ．

一方で2階偏微分方程式$W_2(\varphi)-W_1(\varphi)=0$を満たすこととして特徴付けられるChern–Federer写像に対して，自明な例として何が挙げられるか，等長はめ込みの場合にどのような幾何学的解釈を与えられるかは基本的な問題であると思われる．

定理2より(N^n,g_N)がEuclid空間$\mathbb{E}^n$のとき，C^∞級写像$\varphi:(M^m,g_M)\to\mathbb{E}^n$がChern–Federer写像であるためのEuler–Lagrange方程式は

$$-\varphi_*(\mathrm{tr}_{g_M}\nabla^{TM}Q_{g_M})-\mathrm{tr}_{g_M}h(Q_{g_M}(\cdot),\cdot)=0 \tag{1}$$

となる．ここでQ_{g_M}は(M^m,g_M)のRicci作用素である．特に(M^m,g_M)がRicci平坦であるときは，任意のC^∞級写像$\varphi:(M^m,g_M)\to\mathbb{E}^n$はChern–Federer写像である．

mは2以上かつ(M^m,g_M)がEinsteinであるとき，すなわち，定数λが存在して$Q_{g_M}=\lambda I_{TM}$が成立するとき，Euler–Lagrange方程式(1)は

$$-\lambda\tau(\varphi)=0$$

となるので$\lambda\neq 0$のとき$\varphi:(M^m,g_M)\to\mathbb{E}^n$がChern–Federer写像であることと調和写像になることは同値である．$\lambda=0$のとき，Ricci平坦の場合に帰着される．

以下$\varphi:(M^m,g_M)\to(N^n,g_N)$は等長はめ込みである場合を考える．すなわち，$\varphi$の微分写像$\varphi_*$は単射であり，$\varphi^*g_N=g_M$を満たすとする．

(N^n,g_N)は定曲率cのRiemann空間形$N^n(c)$のとき，Euler–Lagrange方程式は次のようになる．

系 3 ([1])**.** 等長はめ込み$\varphi:(M^m,g_M)\to N^n(c)$がChern–Federer写像であるための必要十分条件は次の方程式を満たすことである:

$$-\varphi_*(\mathrm{tr}_{g_M}(\nabla^{TM}Q_{g_M}))+2cm(m-1)\mathcal{H}-\mathrm{tr}_{g_M}h(Q_{g_M}(\text{-}),\text{-})=0. \tag{2}$$

ここで$\mathcal{H}$はφの平均曲率ベクトル場を表す．また，次を満たすこととも同値である．

$$(\top):\mathrm{tr}_{g_M}(\nabla^{TM}Q_{g_M})=0,\quad (\perp):2cm(m-1)\mathcal{H}-\mathrm{tr}_{g_M}h(Q_{g_M}(\text{-}),\text{-})=0. \tag{3}$$

ここで$(\top)$, $(\perp)$はそれぞれ式(2)の接成分と法成分を表す．

特にRiemann空間形へのChern–Federer等長はめ込み写像を許容するためには(M^m,g_M)に対して障害$(\mathrm{tr}_{g_M}(\nabla^{TM}Q_{g_M})=0)$が存在する．実はこの障害は$\mathrm{Scal}_{g_M}$を$(M^m,g_M)$のスカラー曲率とするとき，縮約Bianchi恒等式

$$\mathrm{tr}_{g_M}(\nabla^{TM}Q_{g_M})=\frac{1}{2}\mathrm{grad}_{g_M}\mathrm{Scal}_{g_M}$$

によりスカラー曲率が一定であることと同値である．

一般に，部分多様体$M^m\subset(N^n,g_N)$がChern–Federerであるとは，M^m上にg_Nによる誘導計量を考えたときにその包含写像がChern–Federer写像になることをいう．

以下では，曲線，曲面そして超曲面(特に，等径超曲面)の順にChern–Federer部分多様体について考える．

3. 曲線の場合 $(m=1)$

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とする．I 上には自然な Riemann 計量 $g_I = dt^2$ を入れておく．このとき，C^∞ 級写像 $\gamma : (I, g_I) \to (N^n, g_N)$ を (N^n, g_N) 上の曲線と呼ぶ.

命題 4 ([1]). 任意の曲線 $\gamma : (I, g_I) \to (N^n, g_N)$ は Chern–Federer 写像である.

証明は $W_1(\gamma) = W_2(\gamma)$ であることから直ちに従う.

4. 曲面の場合 $(m=2)$

命題 5 ([1]). $\varphi : (M^2, g_M) \to N^n(c)$ を等長はめ込み，K を (M^2, g_M) の断面曲率とする．このとき，φ が Chern–Federer 写像であることの必要十分条件は K は定数であり，次のいずれかが成立することである:

(i) φ は極小はめ込みである，または

(ii) $K = 2c$ を満たす.

すなわち，$K \neq 2c$ のとき，Chern–Federer 写像であることと極小はめ込みであることは同値であり，$K = 2c$ のとき，任意の写像は Chern–Federer 写像である.

5. 超曲面の場合 $(n = m+1)$

$M^m \subset N^{m+1}$ を超曲面，$\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ を単位法ベクトル場とする．このとき，M の形作用素 $A \in \Gamma(\mathrm{End}TM)$ を

$$h(X, Y) = g_M(A(X), Y)\xi \quad (X, Y \in \Gamma(TM))$$

を満たすものとして定める．また M の各点 p において形作用素 A_p の固有値を点 p における主曲率と呼ぶ．重複度を込めて点 $p \in M$ における主曲率を

$$\lambda_1(p) \leq \lambda_2(p) \leq \cdots \leq \lambda_m(p)$$

を満たすように並べると，各 λ_i は M 上の連続関数となる．これを M の主曲率と呼ぶ.

以下，M^m は Riemann 空間形 $N^{m+1}(c)$ 内の等径超曲面，すなわち，主曲率一定超曲面とする．M の主曲率はすべて定数関数なので，相異なる主曲率の個数を g で表し，その相異なる M の主曲率を

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_g$$

となるように定める．このとき，

$$c \leq 0 \Longrightarrow g = 1, 2, \quad c > 0 \Longrightarrow g = 1, 2, 3, 4, 6$$

となることが知られている.

λ を M の主曲率として $T_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda I_{TM} - A)$ を λ に対する主分布と呼ぶ．このとき，ベクトル束として直交直和分解

$$TM = \bigoplus_{i=1}^{g} T_{\lambda_i} \tag{4}$$

が得られる．さらに各 T_{λ_i} は自己平行であることが従う．すなわち，任意の切断 $X, Y \in \Gamma(T_{\lambda_i})$ に対し $\nabla^{TM}_X Y \in \Gamma(T_{\lambda_i})$ が成り立つ．ここで ∇^{TM} は等径超曲面 M^m の Levi–Civita 接続である．Riemann 空間形内の等径超曲面については [3] に詳しい.

定理 6 ([1]). $M^m \subset N^{m+1}(c)$ をRiemann空間形内の等径超曲面，A をその形作用素とする．このとき，M^m がChern–Federerであるための必要十分条件は次の等式を満たすことである:

$$c(m-1)(\operatorname{tr} A) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} A^2) + (\operatorname{tr} A^3) = 0. \tag{5}$$

定理6より，自明な例としてaustere超曲面がある．すなわち，等径超曲面がausterieであれば極小かつChern–Federerである．ここで超曲面がaustereであるとは $\operatorname{tr} A^{2k-1} = 0$ を満たすことをいう．ただし，$1 \leq 2k-1 \leq m$ を満たす自然数 k すべてに対して成立するものとする．

定理6の証明は次の通りである．$M^m \subset N^{m+1}(c)$ を等径超曲面とし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$ を M の主曲率とする．このとき，直交直和分解(4)より，ある正規直交枠場 $\{e_i\}_{i=1}^m$ で $A(e_i) = \lambda_i e_i$ を満たすものが存在する．M の単位法ベクトル場を ξ で表せば，式(3)は

$$(\top) : \operatorname{tr}_{g_M}(\nabla^{TM} Q_{g_M}) = \sum_{i,j=1}^{m} (\lambda_i \lambda_j - \lambda_i^2) g_M(\nabla^{TM}_{e_i} e_i, e_j) e_j = 0,$$

$$(\perp) : 2cm(m-1)\mathcal{H} - \operatorname{tr}_{g_M} h(Q_{g_M}(\cdot), \cdot) = \left[c(m-1)(\operatorname{tr} A) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} A^2) + (\operatorname{tr} A^3)\right] \xi.$$

となる．$(\top)$ の最後の等式では，主分布の自己平行性を用いた．従って，M^m がChern–Federerであるための必要十分条件は

$$c(m-1)(\operatorname{tr} A) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} A^2) + (\operatorname{tr} A^3) = 0$$

である．$(\top)$ の式は等径超曲面のスカラー曲率が一定であることからも従う．

以下，Euclid空間，双曲空間そして球面内の順にChern–Federer等径超曲面(特に，等質超曲面)について概説する．

命題 7 ([1]). $M^m \subset \mathbb{E}^{m+1}$ をEuclid空間 $\mathbb{E}^{m+1}$ 内の等径超曲面とする．このとき，M^m がChern–Federerであるための必要十分条件は以下の超曲面のいずれかの開部分集合に合同になることである:

(i) $\mathbb{E}^m \subset \mathbb{E}^{m+1}$ (全測地的超平面),

(ii) $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{E}^{m-1} \subset \mathbb{E}^{m+1}$ (一般化された直円柱).

命題 8 ([1]). $M^m \subset \mathbb{H}^{m+1}(-1)$ を双曲空間 $\mathbb{H}^{m+1}(-1)$ 内の等径超曲面とする．このとき，M^m がChern–Federerであることの必要十分条件は全測地的になることである．

単位球面 $\mathbb{S}^{m+1}(1)$ 内の等径超曲面でChern–Federerになるものは等質の場合に決定されている([1])．ここで球面内の等径超曲面に対し，その平行超曲面は焦部分多様体に潰れない限り，再び等径超曲面になる．すなわち，等径超曲面は平行超曲面により族で存在する．従って，例えば極小でないもの，あるいは二重調和でないものが存在すると述べたとき，その平行超曲面族の中に極小でない，あるいは二重調和でないが，Chern–Federerになるものが存在するということを意味している．

• $g = 1$ の場合

$g = 1$ である等径超曲面 $M^m \subset \mathbb{S}^{m+1}(1)$ は

$$M^m = \mathbb{S}^m(r) = \left\{(x, \sqrt{1-r^2}) \in \mathbb{E}^{m+2} \mid ||x||^2 = r^2\right\} \subset \mathbb{S}^{m+1}(1) \quad (0 < r \leq 1) \tag{6}$$

で与えられる．ここで $||\cdot||$ は $\mathbb{E}^{m+2}$ の標準的なノルムである．これは全臍的超曲面であり $|\mathring{h}|^2 = 0$ を満たす．

このとき (6) が Chern–Federer であるための必要十分条件は $r = 1$ (全測地的超曲面) または $r = 1/\sqrt{2}$ (二重調和超曲面) である．すなわち，二重調和であることと同値である．後者の二重調和超曲面は極小でないことに注意する．

一般に等径超曲面 $M^m \subset \mathbb{S}^{m+1}(1)$ の最大主曲率を $\lambda > 0$ で表すことにすると，等径超曲面の対称性より，残りの主曲率は λ を用いて表せる．実際，相異なる主曲率の個数が $g \in \{2, 3, 4, 6\}$ のとき，最大主曲率 λ は

$$\lambda = \cot t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{g}\right)$$

と表すことができ，残りの主曲率は

$$\cot\left(t + \frac{i}{g}\pi\right) \quad (1 \leq i \leq g-1)$$

で表すことができる．これを用いれば定理6の条件式 (5) は λ に関する代数方程式として表せることが分かる．

• $g = 2$ の場合

$g = 2$ である等径超曲面 $M^m \subset \mathbb{S}^{m+1}(1)$ は

$$M^m = \mathbb{S}^p(r_1) \times \mathbb{S}^{m-p}(r_2) \subset \mathbb{S}^{m+1}(1) \quad (r_1^2 + r_2^2 = 1) \tag{7}$$

で与えられる．これは Clifford 超曲面と呼ばれ，微分同型類は $[m/2]$ 個存在する．

このとき (7) が Chern–Federer であるための必要十分条件は次を満たすことである:

$$p(p-1)\lambda^6 - p(2m-p-1)\lambda^4 + (m-p)(m+p-1)\lambda^2 - (m-p)(m-p-1) = 0.$$

特に $p \leq m-p$ として一般性を失わず，その解は次の通りである．

(i) $m = 2,\ p = 1$ のとき，

$$\lambda = 1.$$

すなわち，解は唯一であり，極小 Clifford トーラスである．

(ii) $m \geq 3,\ p = 1$ のとき，

$$\lambda = 1 \text{ または } \lambda = \sqrt{\frac{m-2}{2}}.$$

すなわち，解は二つあり，前者は二重調和であり，後者は二重調和でない．

(iii) $m \geq 3,\ p \geq 2$ のとき，

$$\lambda = 1 \text{ または } \lambda = \sqrt{\frac{p(m-p) \pm \sqrt{p(m-p)(m-1)}}{p(p-1)}}.$$

すなわち，解は三つあり，前者は二重調和であり，後者は $\pm$ の双方とも二重調和でない．

ところで，一般に2次元以上のRiemann多様体(M^m, g_M)に対し，正規化スカラー曲率τは次で定義される．

$$\binom{m}{2}\tau = \sum_{i<j} K(e_i, e_j).$$

ここで$\{e_i\}$は各接空間の正規直交基底であり，$K(e_i, e_j)$は$\{e_i, e_j\}$で張られる接空間の2次元部分空間に関する断面曲率である．スカラー曲率Scal_{g_M}との関係は次の通りである．各点$p \in M^m$と接空間T_pMの正規直交基底$\{e_i\}$に対し，点pにおいて

$$\mathrm{Scal}_{g_M} = \mathrm{tr}\, Q_{g_M} = \sum_{i=1}^{m} g_M(Q_{g_M}(e_i), e_i) = \sum_{i \neq j} K(e_i, e_j) = 2\sum_{i<j} K(e_i, e_j)$$

より

$$\tau = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{i<j} K(e_i, e_j) = \frac{\mathrm{Scal}_{g_M}}{m(m-1)}$$

である．

Clifford超曲面には二重調和でない例が存在しているが，これは正規化スカラー曲率$\tau = 1$になるものが対応する．特に二重調和でないので，極小でない．

- **$g = 3$の場合**

$g = 3$である等径超曲面$M^m \subset \mathbb{S}^{m+1}(1)$は

$$M^3 = SO(3)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{S}^4(1), \tag{8}$$
$$M^6 = SU(3)/T^2 \to \mathbb{S}^7(1), \tag{9}$$
$$M^{12} = Sp(3)/Sp(1)^3 \to \mathbb{S}^{13}(1), \tag{10}$$
$$M^{24} = F_4/Spin(8) \to \mathbb{S}^{25}(1) \tag{11}$$

で与えられる．これはCartan超曲面と呼ばれることがある．

このとき(8), (10), (11)がChern–Federererであるための必要十分条件は$\lambda = \sqrt{3}$ (austere超曲面)である．また(9)がChern–Federererであるための必要十分条件は次を満たすことである:

$$(\lambda^2 - 3)(3\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 1)(3\lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda - 1) = 0.$$

特に極小でないものが存在する．

- **$g = 4$の場合**

$g = 4$である等径等質超曲面$M^m \subset \mathbb{S}^{m+1}(1)$は

$$M^8 = SO(5)/T^2 \to \mathbb{S}^9(1), \tag{12}$$
$$M^{18} = U(5)/SU(2) \times SU(2) \times U(1) \to \mathbb{S}^{19}(1), \tag{13}$$
$$M^{30} = U(1) \cdot Spin(10)/S^1 \cdot Spin(6) \to \mathbb{S}^{31}(1), \tag{14}$$
$$M^{4m-2} = S(U(2) \times U(m))/S(U(1) \times U(1) \times U(m-2)) \to \mathbb{S}^{4m-1}(1), \tag{15}$$
$$M^{2m-2} = SO(2) \times SO(m)/\mathbb{Z}_2 \times SO(m-2) \to \mathbb{S}^{2m-1}(1), \tag{16}$$
$$M^{8m-2} = Sp(2) \times Sp(m)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(m-2) \to \mathbb{S}^{8m-1}(1) \tag{17}$$

で与えられる．ただし (15), (17) では $m \geq 2$, (16) では $m \geq 3$ である．非等質等径超曲面はここでは扱わない．

(12) が Chern–Federer であるための必要十分条件は $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ (austere 超曲面) である．(13) が Chern–Federer であるための必要十分条件は次を満たすことである:

$$3\lambda^{12} - 40\lambda^{10} + 223\lambda^8 - 692\lambda^6 + 223\lambda^4 - 40\lambda^2 + 3 = 0.$$

(14) が Chern–Federer であるための必要十分条件は次を満たすことである:

$$12\lambda^{12} - 111\lambda^{10} + 488\lambda^8 - 1098\lambda^6 + 488\lambda^4 - 111\lambda^2 + 12 = 0.$$

(15) が Chern–Federer であるための必要十分条件は次を満たすことである:

$$\begin{aligned}\lambda^{12} - 4(2m-1)\lambda^{10} + (72m-85)\lambda^8 - 32(4m^2 - 10m + 7)\lambda^6 \\ + (72m-85)\lambda^4 - 4(2m-1)\lambda^2 + 1 = 0.\end{aligned}$$

(16) が Chern–Federer であるための必要十分条件は次を満たすことである:

$$(2m-3)\lambda^8 - 4(5m-9)\lambda^6 + 2(16m^2 - 62m + 63)\lambda^4 - 4(5m-9)\lambda^2 + 2m - 3 = 0.$$

(17) が Chern–Federer であるための必要十分条件は次を満たすことである:

$$\begin{aligned}3\lambda^{12} - 16m\lambda^{10} + (136m-117)\lambda^8 - 4(64m^2 - 116m + 63)\lambda^6 \\ + (136m-117)\lambda^4 - 16m\lambda^2 + 3 = 0.\end{aligned}$$

特に $g = 4$ の場合には，Chern–Federer に成れない等径超曲面の例が現れる．(15) は $m = 2$ のとき解を持たず，$m \geq 3$ のとき少なくとも一つは解を持つ．また (16) は $m = 3$ のときのみ解をただ一つ持ち (austere 超曲面)，$m \geq 4$ のとき解を持たない．さらに (17) はすべての $m \geq 2$ に対して，少なくとも一つは解を持つことが分かる．ここで解の存在については中間値の定理を用いることで示される．

- **$g = 6$ の場合**

$g = 6$ である等径超曲面 $M^m \subset \mathbb{S}^{m+1}(1)$ は

$$M^6 = SO(4)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{S}^7(1), \tag{18}$$

$$M^{12} = G_2/T^2 \to \mathbb{S}^{13}(1) \tag{19}$$

で与えられる．このとき (18), (19) が Chern–Federer であるための必要十分条件は $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ (austere 超曲面) である．従って，極小なもののみ存在する．

6. 雑多な考察

一つの疑問として Chern–Federer を中心に考えたが，他の場合ではどうだろうか．

等径超曲面 $M^m \subset N^{m+1}(c)$ に対し，その包含写像が $\mathcal{Q}_1$ 写像であるための必要十分条件は

$$c(\operatorname{tr} A) - (\operatorname{tr} A^3) = 0$$

が成り立つことである．また $\mathcal{Q}_2$ 写像 (すなわち，二重調和写像) であるための必要十分条件は

$$\left(mc - (\operatorname{tr} A^2)\right)(\operatorname{tr} A) = 0$$

が成り立つことである ([6])．さらに Willmore–Chen 写像であるための必要十分条件は

$$(\mathrm{tr}\,A)(\mathrm{tr}\,A^2) - m(\mathrm{tr}\,A^3) = 0$$

が成り立つことである．以上より，Chern–Federer 写像になるための条件式 (5) よりも単純な条件式になっているとも思える．特に Willmore–Chen 写像であるための条件式においては外空間 $N^{m+1}(c)$ の曲率 c に依らない式になっていることに注意せよ．

もう一つの疑問として汎関数を一つ固定するのではなく，族のまま扱ってはどうだろうか．

α, β は $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ を満たす実数とする．このとき，C^∞ 級写像 $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ に対し，φ が $(\alpha\mathcal{Q}_1 + \beta\mathcal{Q}_2)$ 写像であるとは

$$W_{\alpha,\beta}(\varphi) := \alpha W_1(\varphi) + \beta W_2(\varphi) = 0$$

を満たすこととして定める．

- $W_{1,0}(\varphi) = W_1(\varphi) = 0$ は $\mathcal{Q}_1$ 写像であることが対応する;
- $W_{0,1}(\varphi) = W_2(\varphi) = 0$ は $\mathcal{Q}_2$ 写像 (二重調和写像) であることが対応する;
- $W_{-1,1}(\varphi) = W_2(\varphi) - W_1(\varphi) = 0$ は Chern–Federer 写像であることが対応する;
- $W_{m,-1}(\varphi) = mW_1(\varphi) - W_2(\varphi) = 0$ は Willmore–Chen 写像であることが対応する．

命題 9 ([1])**.** $\iota : T^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3(1)$ を埋め込まれた平均曲率一定平坦トーラスとする．このとき，ι が $(\alpha\mathcal{Q}_1 + \beta\mathcal{Q}_2)$ 写像であるための必要十分条件は次のいずれかのものに合同になることである:

(i) $\alpha + \beta = 0$ のとき
$\mathbb{S}^1(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^1(1/\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{S}^3(1)$: 極小 Clifford トーラス;

(ii) $\alpha + \beta \neq 0,\ \alpha(\alpha+\beta)^{-1} \geq 0$ のとき
$\mathbb{S}^1(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^1(1/\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{S}^3(1)$: 極小 Clifford トーラス;

(iii) $\alpha + \beta \neq 0,\ \alpha(\alpha+\beta)^{-1} < 0$ のとき
$\mathbb{S}^1(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^1(1/\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{S}^3(1)$: 極小 Clifford トーラス，または
$\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^1(r_2) \hookrightarrow \mathbb{S}^3(1)$: 非極小 Clifford トーラス．

ここで (iii) の非極小トーラスの r_1, r_2 とその平均曲率ベクトル場 $\mathcal{H}$ は次を満たす．

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sqrt{\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta}}} - \sqrt{1-\sqrt{\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta}}}\right], \\ r_2 &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sqrt{\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta}}}\right], \\ g_{\mathbb{S}^3(1)}(\mathcal{H},\mathcal{H}) &= -\frac{\alpha}{2(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

単位球面 $\mathbb{S}^3(1)$ 内の埋め込まれた平均曲率一定平坦トーラスは Clifford トーラスに合同であるという剛性 [10] を利用した．

参考文献

[1] R. Akiyama, T. Sakai and Y. Sato, *Variational problems for integral invariants of the second fundamental form of a map between pseudo-Riemannian manifolds*, to appear in Osaka J. Math.

[2] R. L. Bryant, *Minimal surfaces of constant curvature in* S^n, Trans. Amer. Math. Soc. **290** (1985), 259–271.

[3] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Geometry of hypersurfaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2015.

[4] B.-Y. Chen, *Pseudo-Riemannian geometry,* δ*-invariants and applications*, World Scientific, 2011.

[5] B.-Y. Chen, *Recent developments in* δ*-Casorati curvature invariants*, Turkish J. Math. **45** (2021), no. 1, 1–46.

[6] T. Ichiyama, J. Inoguchi and H. Urakawa, *Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields*, Note Mat. **28** (2009), [2008 on verso], suppl. 1, 233–275.

[7] G. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Translated from the Chinese by Hajime Urakawa. Note Mat. **28** (2009), [2008 on verso], suppl. 1, 209–232.

[8] K. Kenmotsu, *On minimal immersion of* R^2 *into* S^N, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 182–191.

[9] Y. Kitagawa, *Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in* S^3, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), no. 3, 457–476.

[10] Y. Kitagawa, *Isometric deformations of flat tori in the* 3*-sphere with nonconstant mean curvature*, Tohoku Math. J. (2) **52** (2000), no. 2, 283–298.