

deformed Donaldson-Thomas 接続について

北京雁栖湖応用数学研究院 河井 公大朗

Kotaro Kawai

Beijing Institute of Mathematical Sciences and Applications *

deformed Donaldson-Thomas (dDT) 接続は、 G_2 多様体上のエルミート複素直線束の接続で calibrated (associative) 部分多様体のミラーと考えられているものである。これは高次元ゲージ理論等で現れる G_2 -instanton の類似とも考えられる。これらの背景を紹介したのち、dDT 接続は実際にモジュライ理論や体積汎関数のミラーに関して、associative 部分多様体や G_2 -instanton と類似した性質を持つことを紹介する。これらは、一連の論文 [3, 4, 5, 6] によって得られた結果である。

1 背景

1.1 ホロノミー群

ホロノミー群 $\text{Hol}(g)$ とは、リーマン多様体 (X, g) の「曲がり方」を調べる方法のひとつである。いくつかの自然な仮定のもと、ホロノミー群は分類されている。

定理 1 (Berger, 1955). (X, g) を単連結リーマン多様体で、既約（局所的にリーマン多様体の直積に分解しない）かつ局所対称空間でない ($\nabla R \neq 0$) とする。このときホロノミー群は、以下のいずれかになる。

$$\text{SO}(n), \text{U}(n), \text{SU}(n), \text{Sp}(n)\text{Sp}(1), \text{Sp}(n), G_2, \text{Spin}(7).$$

私は例外型ホロノミー群とよばれる $G_2, \text{Spin}(7)$ の場合に興味を持っている。以下では、 G_2 の場合に限定して話を進める。

*e-mail: kkawai@bimsa.cn

1.2 G_2 幾何

Lie 群 G_2 は、八元数体 \mathbb{O} の自己同型群、つまり \mathbb{O} からそれ自身への線形同型写像で、八元数の積を保つ群をいう。

$$\begin{aligned} G_2 &:= \text{Aut}(\mathbb{O}) \\ &= \{g \in \text{GL}(\mathbb{O}) \mid g(x) \cdot g(y) = g(x \cdot y) \ (\forall x, y \in \mathbb{O})\}. \end{aligned}$$

ただ、八元数の積は結合法則が成り立たないなど、扱いが難しい。しかし $\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \text{Im}\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7$ とみて \mathbb{O} の積をある 3-form $\varphi_0 \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$ で表現することができる。まず $u, v \in \mathbb{R}^7$ に対して $u \times v \in \mathbb{R}^7$ を次で定義する。

$$\varphi_0(u, v, \cdot) = \langle u \times v, \cdot \rangle.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbb{R}^7 の標準内積である。このとき、 $\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7$ の積 $\mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$ は次のように書ける。

$$(x, u) \cdot (y, v) = (xy - \langle u, v \rangle, xv + yu + u \times v) \quad (x, y \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}^7).$$

つまり、 \mathbb{O} の積の情報はすべて 3-form $\varphi_0 \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$ に含まれるので

$$G_2 = \{g \in \text{GL}(7, \mathbb{R}) \mid g^* \varphi_0 = \varphi_0\}$$

を示すことができる。更に $G_2 \subset \text{SO}(7)$ もわかる。

以下、 G_2 をこのようにして $\text{SO}(7)$ の部分群とみなす。

いわゆる holonomy principle から、7次元リーマン多様体 (X^7, g) のホロノミー群が G_2 に含まれるとき ($\text{Hol}(g) \subset G_2$)、平行移動により global parallel 3-form $\varphi \in \Omega^3(X^7)$ が定義できる。このような φ は一意とは限らないが、そのような φ を 1つ固定して (X^7, φ, g) を G_2 多様体とよぶ。

標語的に言えば、 G_2 幾何とは 3-form φ で特徴づけられる幾何と言える。(比較として、Kähler 幾何は 2-form で特徴づけられる幾何である。)

1.3 G_2 幾何の捉え方

G_2 幾何は一見奇妙な幾何に思われるかもしれない。しかし G_2 幾何には以下のような捉え方があり、非常に興味深い側面が多くある。

- Calabi-Yau 多様体の類似

G_2 多様体は (複素) 3次元 Calabi-Yau 多様体の類似と思える。これは、Lie 群の包含関係 $\text{SU}(3) \subset G_2$ からくるものである。例えば、 Y^6 を (複素) 3次元 Calabi-Yau 多様体としたとき、 $S^1 \times Y^6$ は G_2 多様体になる。

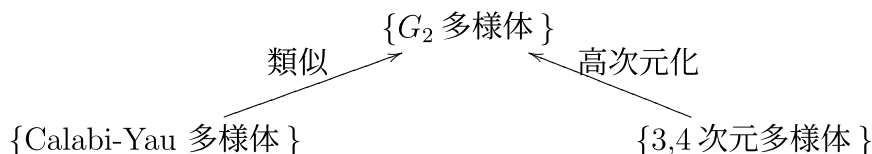
(概) 正則曲線のように振る舞う部分多様体 (associative 部分多様体) の存在も知られている。シンプレクティック多様体上では、概正則曲線を「数えて」、Gromov-Witten 不変量が定義された。同様に、associative 部分多様体を「数えて」、不変量を構成できるかという問題がある。

更に、 G_2 多様体のミラー対称性も考えることができる。Calabi-Yau 多様体のミラー対称性にはいくつかの version があるが、torus fibration を考える Strominger-Yau-Zaslow ([10]) のアプローチは G_2 多様体に対しても可能である。

- 3,4 次元多様体の理論の高次元化

G_2 多様体上では、3,4 次元多様体の理論の高次元化を考えることもできる。3 次元多様体上の平坦接続、4 次元多様体上の ASD 接続の高次元化として G_2 -instanton というものがある。

平坦接続、ASD 接続を「数えて」、Casson 不変量、Donaldson 不変量は定義された。同様に、 G_2 -instanton を「数えて」不変量を構成できるかという問題がある。(これは、高次元ゲージ理論と呼ばれる分野である。)



1.4 Calibrated geometry

calibrated geometry は、Harvey-Lawson [1] に 1982 年に導入された概念である。リーマン多様体 (X^n, g) 上のある条件をみたす閉 k 次微分形式 $\varphi \in \Omega^k(X^n)$ を **calibration** と呼び、それを用いて **calibrated submanifold** とよばれる k 次元部分多様体が定義される。

calibrated submanifold の著しい性質の 1 つに、「コンパクトなものは、ホモロジー類の中で体積最小で、体積は位相的に与えられる」ことがある。特に、calibrated submanifold は極小部分多様体になる。

この概念はホロノミー群と相性がよい。リーマン多様体がある特定のホロノミー群 $\text{Hol}(g)$ を持つときには、自然な calibration を持つ。例えば、 $\text{Hol}(g) = \text{U}(n)$, より一般に $\text{Hol}(g) \subset \text{U}(n)$ のときは (X, g) はケーラー多様体と呼ばれる。このときケーラー形式 (とそのベキの定数倍) は自然な calibration になり、対応する calibrated 部分多様体は複素部分多様体になる。他にも以下にいくつか例を示す。

Hol(g) (\subset)	$U(n)$	$SU(n)$	G_2
(X, g)	X^{2n} :Kähler	X^{2n} :Calabi-Yau	$X^7 : G_2$ 多様体
calibrated submanifold	N^{2k} :複素部分多様体	L^n :特殊ラグランジュ部分多様体	A^3 :associative 部分多様体 C^4 :coassociative 部分多様体

上段のもの（複素、associative）は、変形に障害があるが、下段のもの（特殊ラグランジュ、coassociative）は変形に障害がないことにも注意する。

1.5 ミラー対称性

ミラー対称性は物理で最初に登場した概念で、ある2つの Calabi-Yau 多様体の幾何学的対象がある変換で移りあうと予想する。これを数学的に定式化しようとする試みにはいくつかあるが、Strominger–Yau–Zaslow [10] によれば、3次元 Calabi-Yau のミラー対称性は（特異ファイバーを含む）特殊ラグランジュ(SL) dual T^3 -fibration で説明できるのではと予想する。

つまり、 X^6 を（複素）3次元 Calabi-Yau 多様体とし、 $(X^6)^*$ をその「ミラー」とすれば、ある3次元多様体 B^3 と（特異ファイバーを含む）ファイブレーション $f : X^6 \rightarrow B^3, f^* : (X^6)^* \rightarrow B^3$ が存在して、smooth fiber $f^{-1}(b), (f^*)^{-1}(b)$ はなんらかの意味で dual な特殊ラグランジュ3次元トーラス T^3 になるという。

$$\begin{array}{ccc}
 X^6 & & (X^6)^* \\
 & \searrow f & \swarrow f^* \\
 & B^3 &
 \end{array}$$

その後、Leung–Yau–Zaslow [8] は、特殊ラグランジュ dual torus fibration が与えられたとき、**実フーリエ・向井変換**により特殊ラグランジュ部分多様体は **deformed Hermitian Yang–Mills (dHYM) 接続**に対応することが示した。

同様に、 G_2 多様体の torus fibration も考えることができ、実フーリエ・向井変換も適用できる。Lee–Leung [7] は、coassociative dual T^4 -fibration が与えられたとき、実フーリエ・向井変換により associative 部分多様体は **deformed Donaldson–Thomas (dDT) 接続**に対応することを示した。（[4]において、実フーリエ・向井変換による対応をより詳細に記述した。）

calibrated submanifold	「ミラー」
特殊ラグランジュ	dHYM 接続
(co)associative	dDT 接続

dDT 接続は、 G_2 多様体が torus fibration の構造を持たない時も以下のように定義できる。

定義 2. (X^7, φ, g) を G_2 多様体とし、 $(L, h) \rightarrow X^7$ を複素エルミート直線束とする。 (L, h) のエルミート接続 ∇ が **deformed Donaldson–Thomas (dDT) 接続 (deformed G_2 -instanton)** とは

$$\frac{1}{6}F_{\nabla}^3 + F_{\nabla} \wedge * \varphi = 0$$

をみたすときをいう。ここで $F_{\nabla} \in \sqrt{-1}\Omega^2$ は ∇ の曲率。

定義から、dDT 接続は G_2 -instanton (Donaldson–Thomas connection と呼ばれ、 $F_{\nabla} \wedge * \varphi = 0$ で定義される。) の類似とも思える。以上より、dDT 接続は associative 部分多様体や G_2 -instanton と似た振る舞いをする と期待される。

したがって、1.3 章で述べたことより「dDT 接続も「数えて」不変量が作れるのでは？」という問いが自然に出てくる。しかし、そのためにはモジュライ (変形) 理論が必要であるが、我々の研究以前にはそのような研究はほとんどなかった。そこでまず、dDT 接続が associative 部分多様体や G_2 -instanton と実際に類似性を持つかを調べた。これは次節で述べることとして、以下では dDT 接続の例をいくつか挙げる。

平坦接続は明らかに dDT 接続になる。他の例としては dHYM 接続からくるものがある。

例 3 (dHYM \Rightarrow dDT). $(Y^6, \omega, g, J, \Omega)$ を複素 3 次元 Calabi–Yau 多様体とし、 $(L, h) \rightarrow Y^6$ を複素エルミート直線束とする。

このとき $X^7 := S^1 \times Y^6$ は G_2 多様体になり G_2 構造 $\varphi \in \Omega^3(X^7)$ は

$$\varphi = dx \wedge \omega + \operatorname{Re} \Omega, \quad * \varphi = \omega^2 / 2 - dx \wedge \operatorname{Im} \Omega$$

で与えられる。 x は S^1 の座標である。 $\pi : X^7 \rightarrow Y^6$ を射影とする。

このとき ∇ を (L, h) の dHYM 接続 (i.e. $F_{\nabla}^{0,2} = \operatorname{Im}(\omega + F_{\nabla})^3 = 0$) とすると、 $\pi^* \nabla$ は $\pi^* L$ の dDT 接続になる。

実際、これは次からわかる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}F_{\nabla}^3 + F_{\nabla} \wedge * \varphi &= \frac{1}{6} (F_{\nabla}^3 + 3F_{\nabla} \wedge \omega^2) - dx \wedge F_{\nabla} \wedge \operatorname{Im} \Omega, \\ \sqrt{-1} \operatorname{Im}(\omega + F_{\nabla})^3 &= F_{\nabla}^3 + 3F_{\nabla} \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

更に、 Y^6 がコンパクト連結なら「逆」も言える ([6, Theorem 7.3 (2)]).

2 主結果

dDT 接続が associative 部分多様体や G_2 -instanton と実際に類似性を持つかを調べた。まず、associative 部分多様体にどのような性質があったかを復習する。

2.1 associative 部分多様体の性質

事実 4. • G_2 構造を摂動すると、associative 部分多様体のモジュライ空間は 0 次元向きづけ可能多様体。

- **associator equality** という代数的な恒等式がある。これにより、 G_2 構造 φ は *calibration* になることがわかり、associative 部分多様体の（変形理論に有用な）特徴づけも得られる。
- コンパクト associative 部分多様体は、ホモロジー類の中で体積最小で、体積は位相的に与えられる。（これは *calibrated submanifold* の性質である。）
- *Chern-Simons* 型汎関数があって、associative 部分多様体はその臨界点になる。

G_2 -instanton も類似の性質をもつことが知られている。我々の結果は大雑把に言えば、dDT 接続は上と類似した性質をもつことを示した、と言える。（最後に対応する主張だけは、Karigiannis-Leung [2] によって既に知られていた。）

2.2 変形理論

定理 5 ([5]). (X^7, φ, g) を G_2 多様体とし、 $(L, h) \rightarrow X^7$ を複素エルミート直線束とし、その上の dDT 接続が存在するとする。

1. dDT 接続のモジュライ空間の *expected dimension* は $b^1(X^7)$ の第一ベッチ数) になる。
2. G_2 構造 φ を摂動すると、モジュライ空間は b^1 次元の滑らかな多様体になる。
3. 変形の障害がない場合、モジュライ空間は自然な向きをもつ。（これはモジュライ空間の大域的な性質であることに注意。）

より正確には、各 dDT 接続 ∇ に対して複体 $(\#\nabla)$ が定義できる。 $(\#\nabla)$ はある楕円型複体の部分複体で、dDT 接続の変形は $(\#\nabla)$ を用いて記述できる。つまりその第一コホモロジー $H^1(\#\nabla)$ は無限小変形の空間になり、第二コホモロジー $H^2(\#\nabla)$ は障害空間になる。

2.3 接続の「体積」

定義 6. (X^n, g) をコンパクト連結向きづけ可能リーマン多様体、 $(L, h) \rightarrow X^n$ を複素エルミート直線束とする。 \mathcal{A}_0 を (L, h) のエルミート接続全体の空間とする。このとき体積汎関数 $V : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する。

$$V(\nabla) := \int_X v(\nabla) \text{vol}_g,$$

$$v(\nabla) := \sqrt{1 + |F_\nabla|^2 + \left| \frac{F_\nabla^2}{2!} \right|^2 + \left| \frac{F_\nabla^3}{3!} \right|^2 + \dots}$$

vol_g は g の定める体積要素である。

これを体積とよぶ理由は、実フーリエ・向井変換で、 V は部分多様体の（通常の意味での）体積に対応するからである。物理では V は Dirac-Born-Infeld (DBI) action とよばれる [9]。

定理 7 (“Mirror” of associator equality, [6]). (X^7, φ, g) を G_2 多様体とし、 $(L, h) \rightarrow X^7$ を複素エルミート直線束とする。任意の $\nabla \in \mathcal{A}_0$ に対して

$$\left(1 + \frac{1}{2} \langle F_\nabla^2, *\varphi \rangle\right)^2 + \left| *\varphi \wedge F_\nabla + \frac{1}{6} F_\nabla^3 \right|^2 + \frac{1}{4} |\varphi \wedge *(F_\nabla)^2|^2 = v(\nabla)^2. \quad (2.1)$$

特に任意の $\nabla \in \mathcal{A}_0$ に対して

$$\left| 1 + \frac{1}{2} \langle F_\nabla^2, *\varphi \rangle \right| \leq v(\nabla)$$

であり、等号成立は ∇ が dDT 接続であるときに限る。

2番目の主張について、等号成立ならば ∇ が dDT 接続であることは (2.1) より直ちにわかる。逆は、代数的計算により $*\varphi \wedge F_\nabla + F_\nabla^3/6 = 0$ ならば $\varphi \wedge *(F_\nabla)^2 = 0$ となることを用いればわかる。

この等式は（通常）の associator equality の実フーリエ・向井変換により予測された。証明は pointwise な計算だが、結構な工夫が必要で、おそらく実フーリエ・向井変換なしには発見不可であったと思われる。

定理 7 より、いくつかの興味深い系が得られる。

系 8. コンパクト連結な G_2 多様体上で dDT 接続 ∇ は $V : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ の最小を与え、 $V(\nabla)$ は

$$\left| \int_X \left(1 + \frac{1}{2} \langle F_\nabla^2, *\varphi \rangle\right) \text{vol}_g \right| = |\text{Vol}(X) + (-2\pi^2 c_1(L)^2 \cup [\varphi]) \cdot [X]|.$$

で与えられる。特に、 dDT 接続 ∇ に対して $V(\nabla)$ は位相的に書ける。

系 9. $L \rightarrow X^7$ が平坦とする。このとき任意の dDT 接続は平坦。特に、 dDT 接続のモジュライ空間は $H^1(X, \mathbb{R})/2\pi H^1(X, \mathbb{Z})$ になる。

証明. ∇_0 を平坦接続とし ∇ を任意の dDT 接続とする。 ∇_0 は dDT 接続であるから、系 8 より

$$\int_X \sqrt{1 + |F_\nabla|^2 + \left| \frac{F_\nabla^2}{2!} \right|^2 + \left| \frac{F_\nabla^3}{3!} \right|^2} \text{vol}_g = V(\nabla) = V(\nabla_0) = \int_X \text{vol}_g.$$

これより $F_\nabla = 0$ がわかる。 □

注意 10. 系 9 より、コンパクト連結な G_2 多様体上で非自明な例を構成するならば、平坦でない直線束 $L \rightarrow X^7$ をとる必要がある。

2.4 変分法的観点

最後に、Karigiannis-Leung [2] による変分法的観点を紹介する。

(X^7, φ, g) をコンパクト連結 G_2 多様体、 $(L, h) \rightarrow X$ を複素エルミート直線束とする。 \mathcal{A}_0 を (L, h) のエルミート接続全体の空間とする。 \mathcal{A}_0 上の 1-form Θ を

$$\Theta_\nabla(\sqrt{-1}b) = \int_X \sqrt{-1}b \wedge \left(\frac{1}{6} F_\nabla^3 + F_\nabla \wedge * \varphi \right)$$

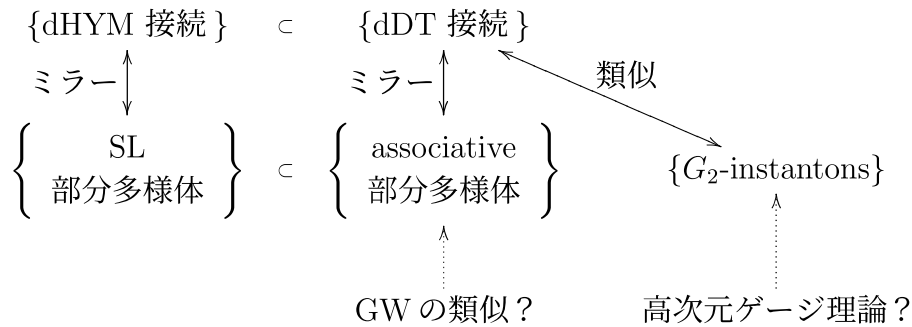
$(\nabla \in \mathcal{A}_0, \sqrt{-1}b \in T_\nabla \mathcal{A}_0 = \sqrt{-1}\Omega^1)$ で定義する。その定義から、 $\Theta_\nabla = 0$ であることと ∇ が dDT 接続であることは同値である。

いくつかの計算で、 Θ は閉形式であることが示せる。任意の $\nabla \in \mathcal{A}_0$ に対して $\mathcal{A}_0 = \nabla + \sqrt{-1}\Omega^1 \cdot \text{id}_L$ であって、特に \mathcal{A}_0 は可縮なので、ある汎関数 $CS : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $dCS = \Theta$ となる。したがって、 dDT 接続は CS (Chern-Simons 型汎関数) の臨界点になることがわかる。

3 まとめと今後の課題

3.1 まとめ

上述の概念の関係性をまとめると、以下のようになる。



associative 部分多様体は概正則曲線の類似と考えられ、Gromov-Witten 不変量の類似が期待されている。また G_2 -instanton は平坦、ASD 接続の類似であり、それを用いた不変量の構成を目指す高次元ゲージ理論が展開されている。

dDT 接続はこれらに類似しており、dDT 接続を「数えて」不変量が作れるのではという期待がある。そのためまず、定理 5, 7, 系 8 において、dDT 接続は実際に associative 部分多様体や G_2 -instanton と類似の性質を持つことを示した。

更に、Chern-Simons 型汎関数の存在以外は、同様の主張が $\text{Spin}(7)$ 多様体に対しても成り立つことを示した ([3, 6])。

3.2 今後の課題

- 他にも類似した性質を示せるか?(実フーリエ・向井変換を用いて予想できる?)
- コンパクト G_2 多様体上での dDT 接続の例の構成。(注意 10 より、非平坦な直線束をとる必要がある。)
- ”Singular” dDT 接続はどうなるか? コンパクト性定理は成り立つか?
 - 極小接続(「体積」 V の臨界点)が、Yang-Mills 接続と同様に特徴づけられることはわかった。そこで、Yang-Mills 接続の場合の類似を考えることで、コンパクト性定理が得られるかもしれない。
- 3次元多様体に対する instanton Floer homology の類似は考えられるか?
 - (\mathcal{A}_0 のある開集合上のある計量に関する) CS の gradient flow equation が、 $\mathbb{R} \times X^7$ 上の $\text{Spin}(7)$ 版 dDT equation に一致することは示せた。(このような観察は、通常の instanton Floer homology の構成の際に重要であった。)

参考文献

- [1] R. Harvey and H. B. Lawson. Calibrated geometries, *Acta Math.* 148 (1982), 47–157.
- [2] S. Karigiannis and N.-C. Leung. Hodge theory for G_2 -manifolds: intermediate Jacobians and Abel-Jacobi maps. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **99** (2009), no. 2, 297–325.
- [3] K. Kawai and H. Yamamoto. Deformation theory of deformed Donaldson–Thomas connections for $\text{Spin}(7)$ -manifolds. *J. Geom. Anal.* **31** (2021), no. 12, 12098–12154.

- [4] K. Kawai and H. Yamamoto. The real Fourier–Mukai transform of Cayley cycles. *Pure Appl. Math. Q.* **17** (2021), no. 5, 1861–1898.
- [5] K. Kawai and H. Yamamoto. Deformation theory of deformed Hermitian Yang–Mills connections and deformed Donaldson–Thomas connections. *J. Geom. Anal.* **32** (2022), no. 5, Paper No. 157, 51 pp.
- [6] K. Kawai and H. Yamamoto. Mirror of volume functionals on manifolds with special holonomy. *Adv. Math.* 405 (2022), Paper No. 108515, 69 pp.
- [7] J.-H. Lee and N. C. Leung. Geometric structures on G_2 and Spin(7)-manifolds. *Adv. Theor. Math. Phys.* **13** (2009), no. 1, 1–31.
- [8] N.-C. Leung, S.-T. Yau and E. Zaslow. From special Lagrangian to Hermitian–Yang–Mills via Fourier–Mukai transform. *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2000), no. 6, 1319–1341.
- [9] M. Mariño, R. Minasian, G. Moore and A. Strominger. Nonlinear instantons from supersymmetric p -branes. *J. High Energy Phys.* **2000**, no. 1, Paper 5, 32 pp.
- [10] A. Strominger, S.-T. Yau and E. Zaslow, Mirror symmetry is T -duality. *Nuclear Physics B* **479** (1996), no.1-2, 243–259.