リーマン多様体上の半線形熱方程式の可解性

筑波大学・数理物質系・数学域　山本 光
Department of Mathematics, Faculty of Pure and Applied Science,
University of Tsukuba

概要

本稿では高橋仁氏（東京工業大学）との共著論文「Solvability of a semilinear heat equation on Riemannian manifolds」（本稿執筆時点では雑誌投稿中であり，arXiv 版の番号は arXiv:2207.03731）の結果の一部について日本語で簡単に紹介する．紹介の方法は基本的には研究集会「部分多様体論と幾何解析の新展開」での講演に沿って行うことにする．

1　研究のモチベーション

(M, g) を n 次元リーマン多様体とし次の藤田型方程式を考える：

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta u + u^p. \tag{1}$$

ここで $p > 1$ とし，初期条件は非負ラドン測度 μ であるとする．この方程式が短時間解を保つためのラドン測度 μ に対する必要条件 (N) と十分条件 (S) を求めることが本研究の目的である．もちろん (N) と (S) はできる限り肉薄しているほうが良い．簡単のため

$$I := \{ \mu : \text{非負ラドン測度で (1) が短時間解を持つ.} \}$$

とおき，条件 (N) と条件 (S) を満たす非負ラドン測度のなす集合を N, S とおいたときに

$$S \subset I \subset N$$

となるような条件 (N) と条件 (S) を求めることが目的である．

$M = \mathbb{R}^n$ のときはかなり良い必要条件 (N) と十分条件 (S) が既に知られている．従って，本研究ではそれらの結果が一般のリーマン多様体でも成り立つかを検証する．

本題に入る前に藤田型方程式の例を幾何学の中から 2 つ紹介する．ます g_t がリッチフローの解のとき，そのスカラー曲率 $R = \mathrm{scal}(g_t)$ は

$$\frac{\partial}{\partial t} R \geq \Delta R + \frac{1}{n} R^2$$

を満たす．これは藤田型方程式の不等式版である．また，M_t がリーマン多様体 (N, g) 内を動く平均曲率流の解のとき，M_t の第二基本形式 $A = A(M_t)$ のノルムの 2 乗も

$$\frac{\partial}{\partial t} |A|^2 \geq \Delta |A|^2 + |A|^4$$

を満たす．これも藤田型方程式の不等式版である．このように藤田型方程式はさまざまな場面で登場する．

2　$M = \mathbb{R}^n$ の場合の結果

この章では $M = \mathbb{R}^n$ の場合に既に知られている藤田型方程式の短時間可解性に対する必要条件と十分条件を紹介する．また，本稿では方程式 (1) 中の p は

$$p > p_F := \frac{n+2}{n}$$

であると仮定する．ここで p_F は藤田指数と呼ばれるある種の臨界指数である．arXiv に投稿した論文中では $p \leq p_F$ の場合も定理を確立してあるが，いくつか細かい部分で技術的に異なる評価などが必要なため，本稿では $p > p_F$ の場合のみ紹介するにとどめる．

まず最初に時間が正の部分で藤田型方程式 (1) の解が存在したら，その初期条件というものが非負ラドン測度のカテゴリーで唯一つ存在することを保証しておく．Baras と Pierre による 1985 年の結果である．

定理 2.1（Baras–Pierre [1]）　時間に依存する $\mathbb{R}^n$ 上の非負関数 u が（ある $T > 0$ が存在し）(1) を $(0, T)$ 上で満たしているとする．このとき $u(\cdot, t)$ は $t \to 0$ のとき，$\mathbb{R}^n$ 上のある非負ラドン測度 μ に収束する．また，そのような μ は唯一つである．

この定理によって保証されている時間が正の部分での解 u の時刻 0 での極限として出てくる非負ラドン測度を（u の）初期トレースと呼ぶ．また，上記の定理中の収束の意味は詳しく述べなかったが，それは少し後で述べることにする．

2.1　必要条件の紹介

この節では $M = \mathbb{R}^n$ の場合の必要条件の紹介を行う．ある解の初期トレースとして出てくるような非負ラドン測度が必ず持っているような条件を求めるわけであるが，これに関して（上の定理で紹介した論文と同じ）Baras と Pierre による 1985 年の結果と，それを拡張した Hisa と Ishige による 2018 年の結果がある．

定理 2.2（Baras–Pierre [1], Hisa–Ishige [2]）　時間区間 $(0, T)$ 上定義されている解 u の初期トレースとして現れるような非負ラドン測度 μ は必ず（ある $C > 0$ が存在して）任意の $0 < r < \sqrt{T}$ に対して

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^n} \mu(B(p, r)) \leq C r^{n - \frac{2}{p-1}} \tag{2}$$

を満たす．ここで $B(p, r)$ は中心 p，半径 r の開球である．

くどいかもしれないが本稿では $p > p_F$ を仮定している．$p = p_F$ の場合や $p < p_F$ の場合は定理 2.2 の右辺の増大度が $p > p_F$ の場合と異なる（場合がある）．これらを全て紹介するのは面倒であるから本稿では $p > p_F$ を仮定している．$p = p_F$ の場合や $p < p_F$ の場合は $p > p_F$ の場合と証明方法が完全に同じというわけではないので，それらの結果も本当は重要である．

ここで (2) の右辺の増大度の位数がなぜ $n - 2/(p-1)$ なのか，観念的な説明を書いておく．まず，(2) の両辺を $B(p, r)$ の通常の体積 $\mathrm{Vol}(B(p, r)) = C r^n$ で割ると (2) は大雑把に言って

$$\frac{\mu(B(p, r))}{\mathrm{Vol}(B(p, r))} = O(r^{-\frac{2}{p-1}}) \quad r \to 0$$

という式になる．左辺は体積比較であるから，ある程度意味のある量である．従って，右辺の指数 $-2/(p-1)$ が出てくる原理を説明すれば，一応の説明をしたことになる．簡単のため $n=1$（つまり u は $\mathbb{R}$ 上の関数）とし，さらに時間に依存しないと仮定してしまおう．つまり定常解である．これが (1) の解であるということは u は

$$0 = u'' + u^p$$

を満たすということである．この常微分方程式を解いてみる．最初から $u = Cr^\alpha$ という冪乗の形の関数だけから解を探すことにしてしまえば，あとは α を決めれば良いことになる．$u'' = Cr^{\alpha-2}$ であり，$u^p = Cr^{\alpha p}$ であるから（C は状況によって異なることに注意），$0 = u'' + u^p$ が成り立つためには，少なくとも指数の部分が同じである必要がある．つまり

$$\alpha - 2 = \alpha p$$

が必要で，これを解くことで $\alpha = -2/(p-1)$ となる．実際に C をうまく調整することで $u = Cr^{-2/(p-1)}$ は $0 = u'' + u^p$ を満たすようにできる．説明のため，本稿でだけ，$u = Cr^{-2/(p-1)}$ のことを典型的な解と呼ぶことにする．すると，定理 2.2 の (2) というのは「μ が初期トレースであるならば，その体積比較の増大度は典型的な解の増大度以下である」ということを言っているわけである．

2.2　十分条件の紹介

この節では $M = \mathbb{R}^n$ の場合の十分条件の紹介を行う．つまり，非負ラドン測度が (1) の初期トレースになるための条件を求めるわけである．本稿では（共同研究者の）Takahashi による 2016 年の結果を紹介するにとどめる．

定理 2.3（Takahashi [10]）　非負ラドン測度 μ が，ある $C>0$ と $\varepsilon>0$ が存在して任意の $r>0$ に対して

$$\sup_{p\in\mathbb{R}^n} \mu(B(p,r)) \le C\left\{\log\left(e+\frac{1}{r}\right)\right\}^{-\frac{1}{p-1}-\varepsilon} r^{n-\frac{2}{p-1}} \tag{3}$$

という条件を満たすならば，μ を初期値とする (1) の短時間解が存在する．

(2) と (3) を比べると $r^{n-\frac{2}{p-1}}$ の前に $\log(e+1/r)$ の負冪が掛かっている部分が異なる．$\log(e+1/r)$ の負冪は $r\to 0$ のときに 0 に収束する．従って，ラドン測度 μ に対する条件としては (3) の方が (2) よりも強い条件を課していることになる．つまり (3) $\Rightarrow$ (2) である，これは定理 2.2 から出る「短時間解が存在 $\Rightarrow$(2)」と，定理 3 から出る「(3)$\Rightarrow$ 短時間解が存在」を合わせても分かる．状況をまとめておくと

$$(3) \quad \Rightarrow \quad \text{短時間解が存在} \quad \Rightarrow \quad (2)$$

ということである．

これらの結果は（かなり広いクラスの）リーマン多様体上に拡張できるということが，本稿で紹介したい主結果である．我々の結果より前に，このような結果をリーマン多様体上に拡張した結果は複数ある．例えば 2011 年から 2021 年にかけての Punzo ([4, 5, 6, 7, 8]) による一連の結果では，同様のことが双曲空間 $\mathbb{H}^n$ や球面 $\mathbb{S}^n$ 内の有界開集合や断面曲率が負のリーマン多様体上で成り立つことが証明されている．後で見るように，我々の結果はこれらの結果を含んでいる．

3　主結果の紹介

結論から言うと，本研究で機能するリーマン多様体のクラスは以下である．$n \geq 1$ とし，(M, g) を n 次元の連結で完備なリーマン多様体で，ある $\kappa \geq 0$ が存在し

$$\mathrm{inj}(M, g) > 0 \quad \text{かつ} \quad |\sec(M, g)| \leq \kappa$$

が成り立つものとする．ここで $\mathrm{inj}(M, g)$ は (M, g) の単射半径で，$\sec(M, g)$ は (M, g) の断面曲率である．ただし $n = 1$ の時は断面曲率の条件は考えないものとする．

主結果を紹介する前に，2 章の最初の方で保留した収束の意味を定義しておく．以下では，各 $t \in (0, T)$ を止めるごとに $u(\,\cdot\,, t)$ が M 上の C^2 級関数になり，各 $p \in M$ を止めるごとに $u(p, \cdot)$ が $(0, T)$ 上の C^1 級関数になるような関数 u 全体の集合を $C^{2,1}(M \times (0, T))$ と書くことにする．

定義 3.1　$u \in C^{2,1}(M \times (0, T))$ が非負関数で，$M \times (0, T)$ 上で (1) を満たすとする．このとき M 上の非負ラドン測度 μ が次の条件を満たすとき，μ を u の初期トレースという．任意の $\psi \in C_0(M)$ に対して，

$$\lim_{t \to 0} \int_M \psi u(\,\cdot\,, t) dV_g = \int_M \psi d\mu$$

となる．ここで $C_0(M)$ は M 上のサポートコンパクト連続関数全体の集合，dV_g は g によって定まる M 上の体積測度である．

まずは定理 2.2 が (M, g) 上でも成り立つことを保証しておく．これも結果ではあるが本稿では命題という位置にしておく．証明自体は定理 2.2 の証明と同様である．

命題 3.2（Takahashi–Y. 2022）　$u \in C^{2,1}(M \times (0, T))$ が非負関数で，$M \times (0, T)$ 上で (1) を満たすとする．このとき u の初期トレース μ が一意的に存在する．

次に述べる 2 つの定理が本研究の主結果である．前者が必要条件，後者が十分条件である．

定理 3.3（Takahashi–Y. 2022）　$p > p_F$ かつ $T > 0$ とする．$u \in C^{2,1}(M \times (0, T))$ が非負関数で，$M \times (0, T)$ 上で (1) を満たすとする．μ を u の初期トレースとする．このとき，次の条件 (N) が必ず成り立つ．(N)：ある $C > 0$ が存在して，任意の $0 < r < \rho_T$ に対して

$$\sup_{p \in M} \mu(B(p, r)) \leq C r^{n - \frac{2}{p-1}}$$

を満たす．ここで $\rho_T := \min\{\sqrt{T}, \mathrm{inj}(M, g)/4, \pi/(4\sqrt{\kappa})\}$ である．ただし $\kappa = 0$ のときは $\pi/(4\sqrt{\kappa}) = \infty$ と解釈する．

定理 3.4（Takahashi–Y. 2022）　$p > p_F$ かつ $T > 0$ とする．このとき次の条件 (S) を満たす定数 $\tilde{C} > 0$ が存在する．(S)：非負ラドン測度 μ が，ある $\varepsilon > 0$ とある $0 < \eta < \rho_T$ が存在して，任意の $0 < r < \eta$ に対して

$$\sup_{p \in M} \mu(B(p, r)) \leq \tilde{C} \left\{ \log\left(e + \frac{1}{r} \right) \right\}^{-\frac{1}{p-1} - \varepsilon} r^{n - \frac{2}{p-1}}$$

を満たすならば，そのような μ は (1) の非負値解の初期トレースとして現れる．

定理 3.3 と定理 3.4 の中で出てきた条件 (N) と (S) を満たす非負ラドン測度のなす集合をそれぞれ N, S とおく．また 1 章で行なったように

$$I := \{\, \mu : \text{非負ラドン測度で (1) が短時間解を持つ.}\,\}$$

とおく．すると定理 3.3 と定理 3.4 から

$$S \subset I \subset N$$

となっていることが分かる．さらに論文中ではこれらの条件が（適切な意味で）シャープであることも示している．詳細は論文に譲ることにする．

4 証明の概略

必要条件である定理 3.3 と十分条件である定理 3.4 の証明の概略を述べる．あくまで概略であるので，厳密に実行すると細かい部分で間違っている可能性もあるので注意されたい．証明の詳細は論文に譲ることにする．

4.1 定理 3.3 の証明の概略

証明は「良いテスト関数」を見つけることで終了する．μ と u を定理 3.3 の前提条件を満たすものとする．$p \in M$ と $0 < r < \rho_T$ を固定する．$\eta(s)$ を単調増大な一変数の滑らかな関数で $s \leq 0$ では 0 で $1 \leq s$ では 1 となるものとし，これを用いて

$$\phi(x,t) := \eta\left(\frac{r^2}{d(p,x)^2 + t} - 1\right)$$

と定める．すると ϕ は $d(p,x)^2 + t \leq r^2/2$ ならば 1 であり，$r^2 \leq d(p,x)^2 + t$ ならば 0 である．ラプラシアンに対する比較定理を用いて計算と評価をすることで（ある $C > 0$ が存在して）

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi + \Delta\phi \geq -Cr^2(d(p,x)^2 + t)^{-2}$$

となることが言える．表記の簡略化のため，この右辺（のマイナス 1 倍）を

$$\psi(x,t) = Cr^2(d(p,x)^2 + t)^{-2}$$

とおこう．u の満たす方程式 (1) の両辺に ϕ を掛けて，時空間上で積分し，部分積分を用いて微分を ϕ に押しつけ，$t \to 0$ の極限を見ることで

$$\int_M \phi(\,\cdot\,,0)^{\frac{2p}{p-1}} d\mu \leq C\int_0^T\!\!\int_M (\phi\psi)^{\frac{p}{p-1}} dV_g dt$$

という積分不等式を得ることができる．ϕ は $d(p,x)^2 + t \leq r^2/2$ ならば 1 であるから，この積分不等式の左辺は

$$\int_M \phi(\,\cdot\,,0)^{\frac{2p}{p-1}} d\mu \geq \int_{B(p,r/\sqrt{2})} 1 d\mu = \mu\left(B(p,r/\sqrt{2})\right)$$

と下から評価できる．また，ϕ は常に 1 以下であることと，体積比較定理などを組み合わせると，積分不等式の右辺は

$$C\int_0^T\!\!\int_M (\phi\psi)^{\frac{p}{p-1}} dV_g dt \leq C\int_0^T\!\!\int_M \psi^{\frac{p}{p-1}} dV_g dt \leq C\iint_{|x|^2+t\leq r^2} r^{\frac{2p}{p-1}}(|x|^2+t)^{-\frac{2p}{p-1}} dxdt \leq Cr^{n-\frac{2}{p-1}}$$

と上から評価できる．上からの評価と下からの評価を積分不等式でつなぐと

$$\mu\left(B(p, r/\sqrt{2})\right) \le C r^{n-\frac{2}{p-1}}$$

が出る．これが（ほぼ）示したかった μ の持つ性質である．

4.2 定理 3.4 の証明の概略

Robinson–Sierżęga [9] や Hisa–Ishige [2] による一般論により，μ を初期値とする (1) の解の存在を示すには弱い意味での優解の存在を言えば十分であることが知られている．従って，優解を見つければ良い．優解の意味はここでは述べず，証明の流れの中で説明することにする．

定理 3.4 の中で存在を保証する $\tilde{C} > 0$ の存在は最後に示す．つまり，最初は $\tilde{C} > 0$ は任意に取って固定しておく．証明の最後に，しかるべき条件を満たすように $\tilde{C} > 0$ を小さくする．μ を定理 3.4 中の条件 (S) を満たす非負ラドン測度とする．$K(x, y, t)$ を (M, g) の熱核とする．これらを用いて

$$\bar{u}(x,t) := 2\int_M K(x,y,t)d\mu(y)$$

と定める．結論を先に言うと，この $\bar{u}$ が優解になる．

この $\bar{u}$ の p 乗を非斉次項とする熱方程式の初期値問題

$$\frac{\partial}{\partial t}v = \Delta v + \bar{u}^p, \quad v(\,\cdot\,, 0) = \mu$$

を考える．この解 v が $\bar{u}$ 以下であることが示されれば，$\bar{u}$ が優解であるということになる．これが，この文脈での優解の定義である．つまり，$v \le \bar{u}$ が示されれば証明が完了したことになる．

熱方程式の一般論により，$\bar{u}$ の p 乗を非斉次項とする熱方程式の解 v で初期トレースが μ であるものは

$$v(x,t) = \int_N K(x,y,t)d\mu(y) + \int_0^t\!\!\int_M K(x,y,t-s)\bar{u}^p(y,s)dV_g ds \quad (=: J_1 + J_2)$$

と書ける．右辺第一項を J_1，右辺第二項を J_2 とおく．復習すると目標は $J_1 + J_2 \le \bar{u}$ を示すことである．

まず $J_1 = \bar{u}/2$ は自明であるから，最終的には $J_2 \le \bar{u}/2$ を示せば良いことになった．これはいくつかの細かい積分評価を組み合わせることで完了する．まずは，$\bar{u}^p = \bar{u}^{p-1}\bar{u}$ と見ること（と熱核の性質）で

$$J_2 \le \left(\int_0^t \|\bar{u}(\,\cdot\,, s)\|_{L^\infty}^{p-1} ds\right) \times \bar{u}$$

という評価が出る．目標が $J_2 \le \bar{u}/2$ を示すことだったので，$\bar{u}$ に掛かっている積分値が $1/2$ 以下であることを示せば良い．$\bar{u}$ 自体は（非斉次項がない普通の）熱方程式の解であるから，Li–Yau [3] によるハルナック不等式から

$$\bar{u}(x,t) \le C t^{-\frac{n}{2}} \sup_{p\in M} \mu(B(p, \sqrt{t}))$$

という評価を得る．この評価と，仮定として μ が持っている条件 (S) を合わせると

$$\bar{u}(x,t) \le \tilde{C}C\left\{\log\left(e + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\}^{-\frac{1}{p-1}-\varepsilon} \times t^{\frac{1}{p-1}}$$

という t だけを使った評価を得る．あとはこの両辺を $p-1$ 乗し，$s(\log(e+s^{-1/2}))^{-1-\varepsilon(p-1)}$ の $s=0$ から $s=t$ までの積分値が有限の値であることを用いると

$$\int_0^t \|\bar{u}(\,\cdot\,,s)\|_{L^\infty}^{p-1} ds \leq \tilde{C}^{p-1} \times C''$$

という上からの有限値による評価を得る．ここで，定理 3.4 の主張の中の $\tilde{C}>0$ は「存在」を言えば良いので，最初から $\tilde{C}$ は $\tilde{C}^{p-1}C'' \leq 1/2$ を満たすように取ってあったとすれば，証明が完了するわけである．

参考文献

[1] P. Baras, M. Pierre, Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 2 (1985), no. 3, 185–212.

[2] K. Hisa, K. Ishige, Existence of solutions for a fractional semilinear parabolic equation with singular initial data. Nonlinear Anal. 175 (2018), 108–132.

[3] P. Li, S.-T. Yau, On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. Acta Math. 156 (1986), no. 3-4, 153–201.

[4] F. Punzo, On well-posedness of semilinear parabolic and elliptic problems in the hyperbolic space. J. Differential Equations 251 (2011), no. 7, 1972–1989.

[5] F. Punzo, Blow-up of solutions to semilinear parabolic equations on Riemannian manifolds with negative sectional curvature. J. Math. Anal. Appl. 387 (2012), no. 2, 815–827.

[6] F. Punzo, On well-posedness of the semilinear heat equation on the sphere. J. Evol. Equ. 12 (2012), no. 3, 571–592.

[7] F. Punzo, Global existence of solutions to the semilinear heat equation on Riemannian manifolds with negative sectional curvature. Riv. Math. Univ. Parma (N.S.) 5 (2014), no. 1, 113–138.

[8] F. Punzo, Global solutions of semilinear parabolic equations on negatively curved Riemannian manifolds. J. Geom. Anal. 31 (2021), no. 1, 543–559.

[9] J. C. Robinson, M. Sierżęga, Supersolutions for a class of semilinear heat equations. Rev. Mat. Complut. 26 (2013), no. 2, 341–360.

[10] J. Takahashi, Solvability of a semilinear parabolic equation with measures as initial data. Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 257–276, Springer Proc. Math. Stat., 176, Springer, Cham, 2016.