3 次元リーマン多様体の 4 次元定曲率空間への局所等長埋め込み[*1]

佐賀大学・教育学部　橋永貴弘[*2]
Takahiro Hashinaga
Faculty of Education, Saga University

1　序

(M^m, g) を m 次元リーマン多様体とし, φ を M から n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq m)$ への埋め込み写像とする. $\mathbb{R}^n$ の標準計量 g_0 の φ による引き戻しが M^m のリーマン計量 g に一致するとき, つまり $\varphi^* g_0 = g$ となるとき, φ を **等長埋め込み** という. $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n) : M^m \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_m)$ を M^m の局所座標とすると, $\varphi^* g_0 = g$ は次のように表される:

$$g_{ij} = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial \varphi^a}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi^a}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, \ldots, m).$$

したがって等長埋め込み問題は偏微分方程式系の問題となる.

リーマン多様体の等長埋め込み問題は微分幾何学における古典的な問題の 1 つであり, 多くの成果が得られている ([4], [5], [7], [14], [24], [27], [29]). 特に, 任意のリーマン多様体は十分高い次元のユークリッド空間に等長埋め込み可能であることが知られている. 局所的な結果としては次が古くから知られている.

定理 1.1 ([19], [6]). (M^m, g) を実解析的なリーマン多様体とする. このとき任意の点 $p \in M^m$ に対して, p を含む M^m の開近傍 U と実解析的写像 $\varphi : U \to R^{\frac{1}{2}m(m+1)}$ が存在して $\varphi^* g_0 = g$ が成り立つ.

また大域的な結果として次がよく知られている.

定理 1.2 ([25]). (M^m, g) を C^r 級リーマン多様体とする $(3 \leq r \leq \infty)$.
(1) M^m がコンパクトのとき, (M^m, g) は $\dfrac{1}{2}m(3m + 11)$ 次元ユークリッド空間に等長埋め込み可能.
(2) M^m が非コンパクトのとき, (M^m, g) は $\dfrac{1}{2}m(m + 1)(3m + 11)$ 次元ユークリッド空間に等長埋め込み可能.

[*1] 本稿の内容は阿賀岡芳夫氏 (広島大学) との共同研究に基づく

[*2] E-mail : hashinag@cc.saga-u.ac.jp

大域的に等長埋め込み可能なユークリッド空間の次元の評価については, その後様々な研究者により改良されている (cf. [14], [13], [15]). さらに大域的な実解析的等長埋め込みの存在も Greene-Jacobowitz により示されている ([12]).

他方, いくつかのリーマン多様体については上記の次元に比べてはるかに低い次元のユークリッド空間へ等長埋め込み可能なことが知られている. 例えば対称 R 空間と呼ばれるコンパクトリーマン多様体 M はすべておよそ $2 \times \dim M$ 次元のユークリッド空間へ等長埋め込み可能である ([21]). このように, 当然のことだが等長埋め込み可能なユークリッド空間の最小次元はリーマン多様体 M に依存するわけであるが, 与えられたリーマン多様体がどれくらい低い次元のユークリッド空間に等長埋め込み可能かという問題については判定法をはじめ有効な研究手法がほとんど確立されていない状況にある.

与えられたリーマン多様体が局所等長埋め込み可能となるユークリッド空間の最小次元を考察していく上での方針の一つとして, 余次元を固定して判定法を確立するというものが考えられる. 余次元 0, すなわち m 次元リーマン多様体が $\mathbb{R}^m$ に局所等長埋め込み可能であるための必要十分条件は M が平坦であることなので, 非自明なのは余次元が 1 以上の場合である. 一般に余次元 1 の場合, つまり m 次元リーマン多様体の $m+1$ 次元ユークリッド空間への等長埋め込みについては次が知られている.

定理 1.3 (超曲面の基本定理, [22]). m 次元リーマン多様体 (M^m, g) が $\mathbb{R}^{m+1}$ へ局所等長埋め込み可能であるための必要十分条件は, ガウス方程式およびコダッチ方程式を満たす M^m 上の $(0,2)$ 型対称テンソル場 α が存在することである. このとき α を第二基本形式とする M^m の局所等長埋め込みが $\mathbb{R}^{m+1}$ のユークリッド変換を除いて一意的に存在する.

この定理は M^m が単連結, 向き付け可能であれば大域的にも成り立つ. 超曲面の基本定理によりユークリッド空間内の超曲面として実現可能なリーマン多様体は確定しているように思われる. しかしコダッチ方程式は α に関する偏微分方程式系であり, 一般にこの偏微分方程式系の解の非存在性を示すことは困難である. したがってこの定理は等長埋め込みの存在を示す際には有用であるが, この定理を使って等長埋め込みの非存在を示すことは難しい. このことから余次元 1 の場合においても局所等長埋め込みが存在するための (M, g) の内在的量による必要十分条件を考えることは自然であろう. 実際, ある generic な仮定のもとでガウス方程式を満たす $(0,2)$ 型対称テンソル場の存在, 非存在は内在的量により判定可能であることが知られている ([30]). さらに次が成り立つ.

定理 1.4 ([30]). (M^m, g) のタイプ数が 4 以上のとき, $(0,2)$ 型対称テンソル場 α がガウス方程式を満たすならば α はコダッチ方程式を満たす.

ここでタイプ数は (M^m, g) の内在的量であることに注意しておく (cf. [22]). $m \geq 4$ のとき generic なリーマン多様体はタイプ数 ≥ 4 となる. したがって generic な $m(\geq 4)$ 次元

リーマン多様体 (M,g) については次元が 1 つ高いユークリッド空間に局所等長埋め込み可能であるかどうかが (M,g) の内在的量により判定できる．しかしながら $m=3$ の場合にはタイプ数 ≥ 4 とは成り得ずその状況は大きく異なる．つまり, 仮にガウス方程式を満たす $(0,2)$ 型対称テンソル場 α が存在したとしても, 一般にそれらがコダッチ方程式を満たすとは言えないのである．

本稿では, ある generic な仮定のもと 3 次元リーマン多様体が 4 次元ユークリッド空間へ局所等長埋め込み可能となるための内在的量による必要十分条件を紹介する．なお, 本稿で考えるリーマン多様体 M は全て C^∞ 級とする．また, 以降 M という記号を用いるが議論はすべて局所的なものであり, 位相的には自明な状況のもとでの話とする．

2　ガウス方程式とコダッチ方程式

(M^m,g) を m 次元 C^∞ 級多様体とし, $\varphi:(M^m,g)\to\mathbb{R}^{m+1}$ を等長埋め込みとする． また ∇, $\overline{\nabla}$ をそれぞれ (M,g) および $(\mathbb{R}^{m+1},g_0)$ の Levi-Civita 接続とし, $\overline{\alpha}:\mathfrak{X}(M^m)\times\mathfrak{X}(M^m)\to\mathfrak{X}(M^m)^\perp:\overline{\alpha}(X,Y):=(\overline{\nabla}_XY)^\perp$ を M^m の第二基本形式とする．$\overline{\alpha}$ の共変微分は

$$(\nabla^\perp_Z\overline{\alpha})(X,Y):=\nabla^\perp_Z\overline{\alpha}(X,Y)-\overline{\alpha}(\nabla_ZX,Y)-\overline{\alpha}(X,\nabla_ZY)\quad(\forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M^m))$$

で与えられ, さらに M^m 上の任意のベクトル場 X,Y,Z,W に対して次が成り立つ:

$$-g(R(X,Y)Z,W)=\langle\overline{\alpha}(X,Z),\overline{\alpha}(Y,W)\rangle-\langle\overline{\alpha}(X,W),\overline{\alpha}(Y,Z)\rangle,\tag{$\overline{1}$}$$
$$(\nabla^\perp_Z\overline{\alpha})(X,Y)=(\nabla^\perp_Y\overline{\alpha})(X,Z).\tag{$\overline{2}$}$$

ここで R は M^m のリーマン曲率テンソルである．$(\overline{1})$ を **ガウス方程式**, $(\overline{2})$ を**コダッチ方程式**という．M^m の単位法ベクトル場 ν をとり固定すると, M 上の $(0,2)$ 型対称テンソル場 α が存在して, 第二基本形式 $\overline{\alpha}$ は $\overline{\alpha}(X,Y)=\alpha(X,Y)\nu$ と表される．このときガウス方程式, コダッチ方程式は次のように表される:

$$\begin{aligned}&-g(R(X,Y)Z,W)=\alpha(X,Z)\alpha(Y,W)-\alpha(X,W)\alpha(Y,Z),\\&(\nabla_Z\alpha)(X,Y)=(\nabla_Y\alpha)(X,Z).\end{aligned}$$

$(U;x_1,\ldots,x_m)$ を (M^m,g) の局所座標近傍とし, $X_i:=\frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1,\ldots,m)$ を U 上のベクトル場とする．リーマン曲率テンソル R とその共変微分 $S:=\nabla R$ に対して,

$$\begin{aligned}R_{ijkl}&=-g(R(X_i,X_j)X_k,X_l)=R(X_i,X_j,X_k,X_l),\\S_{ijklm}&=(\nabla_{X_m}R)(X_i,X_j,X_k,X_l)\end{aligned}$$

とおき, さらに $\alpha_{ij}=\alpha(X_i,X_j)$, $\beta_{ijk}=(\nabla_{X_k}\alpha)(X_i,X_j)$ とおくと, ガウス方程式, コダッ

チ方程式は U 上で以下のように表される:

$$R_{ijkl} = \alpha_{ik}\alpha_{jl} - \alpha_{il}\alpha_{jk}, \tag{1}$$
$$\beta_{ijk} = \beta_{ikj}. \tag{2}$$

M^m が $\mathbb{R}^{m+1}$ に局所等長埋め込み可能なとき, 第二基本形式はガウス方程式, コダッチ方程式を満たすわけだが, 逆に (1) および (2) を満たす M^m 上の $(0,2)$ 型対称テンソル場 α が存在すれば M^m は $\mathbb{R}^{m+1}$ に局所等長埋め込み可能であるというのが先に述べた超曲面の基本定理である (cf. [8], [9], [10], [22]).

3 主結果とその証明の概略

主結果 (定理 3.3) を述べる前に 3 次元リーマン多様体が 4 次元ユークリッド空間に局所等長埋め込み可能であるための障害を 2 つ紹介する. 1 つは Weise, Thomas による次の結果である.

定理 3.1 ([31], [30])**.** 3 次元リーマン多様体 (M^3, g) が $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能とする. このとき M^3 の各点において次が成り立つ:

$$|\widetilde{R}| := \begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} & R_{1223} \\ R_{1213} & R_{1313} & R_{1323} \\ R_{1223} & R_{1323} & R_{2323} \end{vmatrix} \geq 0.$$

もう 1 つは Rivertz による結果である. Rivertz は (M^3, g) が $\mathbb{R}^4$ に等長埋め込み可能なときに, 曲率とその共変微分が満たすべき恒等式を計算機を用いて与えた.

定理 3.2 ([28])**.** 3 次元リーマン多様体 (M^3, g) が $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能とする. このとき以下の 6 つの等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} r_1 := &(R_{1213}R_{2323} - R_{1223}R_{1323})S_{12121} - (R_{1213}R_{1323} - R_{1223}R_{1313})S_{12122} \\ &- (R_{1212}R_{2323} - {R_{1223}}^2)S_{12131} + (R_{1212}R_{1323} - R_{1213}R_{1223})S_{12132} \\ &+ (R_{1212}R_{1323} - R_{1213}R_{1223})S_{12231} - (R_{1212}R_{1313} - {R_{1213}}^2)S_{12232} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 := &(R_{1313}R_{2323} - {R_{1323}}^2)S_{12121} - 2(R_{1213}R_{1323} - R_{1223}R_{1313})S_{12123} \\ &- (R_{1212}R_{1313} - {R_{1213}}^2)S_{12233} - (R_{1212}R_{2323} - {R_{1223}}^2)S_{13131} \\ &+ 2(R_{1212}R_{1323} - R_{1213}R_{1223})S_{13132} - (R_{1212}R_{1313} - {R_{1213}}^2)S_{13232} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3 := &(R_{1313}R_{2323} - {R_{1323}}^2)S_{12122} - 2(R_{1213}R_{2323} - R_{1223}R_{1323})S_{12123} \\ &+ (R_{1212}R_{2323} - {R_{1223}}^2)S_{12133} - (R_{1212}R_{2323} - {R_{1223}}^2)S_{13231} \\ &+ 2(R_{1212}R_{1323} - R_{1213}R_{1223})S_{23231} - (R_{1212}R_{1313} - {R_{1213}}^2)S_{23232} = 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_4 :=\ & (R_{1313}R_{2323} - {R_{1323}}^2)S_{12131} - (R_{1213}R_{1323} - R_{1223}R_{1313})S_{12133} \\
& - (R_{1213}R_{2323} - R_{1223}R_{1323})S_{13131} + (R_{1212}R_{1323} - R_{1213}R_{1223})S_{13133} \\
& + (R_{1213}R_{1323} - R_{1223}R_{1313})S_{13231} - (R_{1212}R_{1313} - {R_{1213}}^2)S_{13233} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_5 :=\ & (R_{1313}R_{2323} - {R_{1323}}^2)S_{12132} + (R_{1313}R_{2323} - {R_{1323}}^2)S_{12231} \\
& - 2(R_{1213}R_{2323} - R_{1223}R_{1323})S_{13132} + (R_{1212}R_{2323} - {R_{1223}}^2)S_{13133} \\
& + 2(R_{1213}R_{1323} - R_{1223}R_{1313})S_{23231} - (R_{1212}R_{1313} - {R_{1213}}^2)S_{23233} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_6 :=\ & (R_{1313}R_{2323} - {R_{1323}}^2)S_{12232} - (R_{1213}R_{2323} - R_{1223}R_{1323})S_{12233} \\
& - (R_{1213}R_{2323} - R_{1223}R_{1323})S_{13232} + (R_{1212}R_{2323} - {R_{1223}}^2)S_{13233} \\
& + (R_{1213}R_{1323} - R_{1223}R_{1313})S_{23232} - (R_{1212}R_{1323} - R_{1213}R_{1223})S_{23233} = 0.
\end{aligned}
$$

以降, Rivertz の与えた 6 つの恒等式を Rivertz の条件式と呼ぶこととする. Rivetz の条件式の詳細については [28] または [2] の Remark 4.13 (2) を参照いただきたい.

我々は $|\widetilde{R}| \neq 0$ という仮定のもとで Weise, Thomas および Rivertz の条件が局所等長埋め込み可能であるための十分条件となることを示した. 定理 3.1, 3.2 と合わせると次が得られる.

定理 3.3 ([2])**.** (1) (M^3, g) が $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能ならば $|\widetilde{R}| \geq 0$ かつ Rivertz の条件式 $r_1 = \cdots = r_6 = 0$ を満たす.
(2) $|\widetilde{R}| > 0$ かつ Rivertz の条件式 $r_1 = \cdots = r_6 = 0$ を満たすならば (M^3, g) は $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能である.

(1) は Weise, Thomas および Rivertz の結果から従う. (2) の証明を述べる前に次の補題を証明しておく.

補題 3.4. (M^3, g) の各点において $|\widetilde{R}| > 0$ を満たすとする. このとき次が成り立つ.
(i) ガウス方程式を満たす M 上の $(0,2)$ 型対称テンソル場 α が (符号の違いを除いて) 一意的に存在する. 特に α は以下のように表される:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\widetilde{R}|}} \begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} \\ R_{1213} & R_{1313} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{12} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\widetilde{R}|}} \begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1223} \\ R_{1213} & R_{1323} \end{vmatrix}, \\
\alpha_{13} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\widetilde{R}|}} \begin{vmatrix} R_{1213} & R_{1223} \\ R_{1313} & R_{1323} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{22} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\widetilde{R}|}} \begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1223} \\ R_{1223} & R_{2323} \end{vmatrix}, \\
\alpha_{23} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\widetilde{R}|}} \begin{vmatrix} R_{1213} & R_{1223} \\ R_{1323} & R_{2323} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{33} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\widetilde{R}|}} \begin{vmatrix} R_{1313} & R_{1323} \\ R_{1323} & R_{2323} \end{vmatrix},
\end{aligned} \tag{3}
$$

ここで $\varepsilon = 1$ または -1 とする.

(ii) Rivertz の条件式 $r_1 = \cdots = r_6 = 0$ と次の条件は同値である:

$$h_{1212} = h_{1213} = h_{1223} = h_{1313} = h_{1323} = h_{2323} = 0.$$

ただし,

$$\begin{aligned}
h_{1212} &:= \alpha_{11}S_{12232} - \alpha_{12}S_{12132} - \alpha_{12}S_{12231} + \alpha_{13}S_{12122} + \alpha_{22}S_{12131} - \alpha_{23}S_{12121}, \\
h_{1213} &:= \frac{1}{2}(\alpha_{11}S_{13232} + \alpha_{11}S_{12233} - \alpha_{12}S_{12133} - \alpha_{12}S_{13132} - \alpha_{12}S_{13231} \\
&\qquad + \alpha_{13}S_{12123} + \alpha_{13}S_{12132} - \alpha_{13}S_{12231} + \alpha_{22}S_{13131} - \alpha_{33}S_{12121}), \\
h_{1223} &:= \frac{1}{2}(\alpha_{11}S_{23232} + \alpha_{12}S_{12233} - \alpha_{12}S_{13232} - \alpha_{12}S_{23231} + \alpha_{22}S_{13231} \\
&\qquad - \alpha_{22}S_{12133} + \alpha_{23}S_{12123} + \alpha_{23}S_{12132} - \alpha_{23}S_{12231} - \alpha_{33}S_{12122}), \\
h_{1313} &:= \alpha_{11}S_{13233} - \alpha_{12}S_{13133} - \alpha_{13}S_{13231} + \alpha_{13}S_{12133} + \alpha_{23}S_{13131} - \alpha_{33}S_{12131}, \\
h_{1323} &:= \frac{1}{2}(\alpha_{11}S_{23233} + \alpha_{13}S_{12233} - \alpha_{13}S_{13232} - \alpha_{13}S_{23231} - \alpha_{22}S_{13133} \\
&\qquad + \alpha_{23}S_{12133} + \alpha_{23}S_{13132} + \alpha_{23}S_{13231} - \alpha_{33}S_{12231} - \alpha_{33}S_{12132}), \\
h_{2323} &:= \alpha_{12}S_{23233} - \alpha_{13}S_{23232} - \alpha_{22}S_{13233} + \alpha_{23}S_{13232} + \alpha_{23}S_{12233} - \alpha_{33}S_{12232}
\end{aligned}$$

とし, α はガウス方程式を満たす $(0,2)$ 型対称テンソル場とする.

Proof. (i) ガウス方程式を満たす M 上の $(0,2)$ 型対称テンソル場 α に対して,

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

とおく. このとき A の余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \begin{pmatrix} \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2 & \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33} & \alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22} \\ \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33} & \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}^2 & \alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23} \\ \alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22} & \alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23} & \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R_{2323} & -R_{1323} & R_{1223} \\ -R_{1323} & R_{1313} & -R_{1213} \\ R_{1223} & -R_{1213} & R_{1212} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる. 両辺の行列式をとることにより $|\widetilde{R}| = |A|^2 \geq 0$ を得る. よって $|\widetilde{R}| > 0$ のとき, A は正則であり, 逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} R_{2323} & -R_{1323} & R_{1223} \\ -R_{1323} & R_{1313} & -R_{1213} \\ R_{1223} & -R_{1213} & R_{1212} \end{pmatrix}$$

で与えられる. したがって

$$A = (A^{-1})^{-1} = |A|\begin{pmatrix} R_{2323} & -R_{1323} & R_{1223} \\ -R_{1323} & R_{1313} & -R_{1213} \\ R_{1223} & -R_{1213} & R_{1212} \end{pmatrix}^{-1}.$$

A の (1,1) 成分 α_{11} を求めると, $|\widetilde{R}| = |A|^2$ から

$$\alpha_{11} = \frac{|A|}{|\widetilde{R}|}\begin{vmatrix} R_{1313} & -R_{1213} \\ -R_{1213} & R_{1212} \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} \\ R_{1213} & R_{1313} \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|R|}}\begin{vmatrix} R_{1212} & R_{1213} \\ R_{1213} & R_{1313} \end{vmatrix}$$

を得る．ここで, ε は 1 または -1 である．他の α_{ij} についても同様に A の (i,j) 成分を求めることで得られる．逆に α をこのように定めるとガウス方程式を満たすことがわかる．よって $|\widetilde{R}| > 0$ のとき, ガウス方程式を満たす α は存在し, かつ符号の違いを除いて一意的である．

(ii) $|\widetilde{R}| > 0$ のとき (i) よりガウス方程式を満たす α は一意的であり (3) 式で与えられる．このとき以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} &r_1 = -|A|h_{1212}, \quad r_2 = -2|A|h_{1213}, \quad r_3 = -2|A|h_{1223}, \\ &r_4 = -|A|h_{1313}, \quad r_5 = -2|A|h_{1323}, \quad r_6 = -|A|h_{2323}. \end{aligned}$$

よって, $|\widetilde{R}| > 0$ のとき $|A| \neq 0$ より, Rivertz の条件式を満たすことと各 h_{ijkl} が 0 であることは同値となる． □

定理 3.3 (2) の証明の概略を述べる．$|\widetilde{R}| > 0$ および 補題 3.4 (i) からガウス方程式 $R_{ijkl} = \alpha_{ik}\alpha_{jl} - \alpha_{il}\alpha_{jk}$ を満たす $(0,2)$ 型対称テンソル場 α が (符号の違いを除いて) 一意的に存在する．この α を共変微分したものを β とすると, α, β はガウス方程式を共変微分して得られる関係式

$$S_{ijklm} = \beta_{ikm}\alpha_{jl} + \alpha_{ik}\beta_{jlm} - \beta_{ilm}\alpha_{jk} - \alpha_{il}\beta_{jkm} \tag{4}$$

を満たす．ここで, α はガウス方程式を満たしているが等長埋め込みの第二基本形式ではないため, その共変微分 β は $\beta_{ijk} = \beta_{jik}$ を満たすが, 一般に対称ではないことに注意する．(4) を β に関する方程式と見ると, これは一意的に解けることがわかり, β_{ijk} は

$$\begin{aligned} \beta_{ijk} = \frac{1}{2\sqrt{|\widetilde{R}|}} \{&(-2\alpha_{3i}\alpha_{3j} + \alpha_{ij}\alpha_{33})S_{1212k} + (2\alpha_{2i}\alpha_{3j} + 2\alpha_{2j}\alpha_{3i} - 2\alpha_{ij}\alpha_{23})S_{1213k} \\ &- (2\alpha_{1i}\alpha_{3j} + 2\alpha_{1j}\alpha_{3i} - 2\alpha_{ij}\alpha_{13})S_{1223k} + (-2\alpha_{2i}\alpha_{2j} + \alpha_{ij}\alpha_{22})S_{1313k} \\ &+(2\alpha_{1i}\alpha_{2j} + 2\alpha_{1j}\alpha_{2i} - 2\alpha_{ij}\alpha_{12})S_{1323k} + (-2\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{ij}\alpha_{11})S_{2323k}\} \end{aligned}$$

で与えられる．さらに任意の i, p, q に対して

$$\beta_{ipq} - \beta_{iqp} = -\frac{1}{\sqrt{|\widetilde{R}|}}\{\alpha_{i1}h_{23pq} - \alpha_{i2}h_{13pq} + \alpha_{i3}h_{12pq}\}$$

となる．よって, 仮定 $r_1 = \cdots = r_6 = 0$ および補題 3.4 (ii) から $h_{1212} = \cdots = h_{2323} = 0$ となり, 任意の i, p, q に対して $\beta_{ipq} = \beta_{iqp}$ が成り立つ．これは β がコダッチ方程式を満た

すことを意味する．したがって超曲面の基本定理より (M^3, g) は $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能である．

証明の概略を見ると簡単に示されるように思うかもしれないが, 実際には Rivertz の条件式が等長埋め込みの必要条件として与えられて以降, それが ($|\widetilde{R}| \neq 0$ という仮定のもとで) 十分条件になっていることは 20 年近く指摘されなかった．その理由の一つに Rivertz の条件式が長い式であるため, 直接的な方法では扱うのが困難であったことが挙げられる．我々の証明ではこの点を克服するために古典的不変式論で知られている "記号的方法" を用いている．記号的方法については, 例えば [11], [16], [26] などを参照いただきたい．ここではその詳細を述べないが, 簡潔に言うと, 種々の幾何学的量を "記号" として分解することで Rivertz の条件式などの長い式 (不変式) を行列式を用いた簡潔な形で表示できる．その表示を用いることで, 簡単な線形代数 (行列式の性質等) のみで主結果を証明できるのである．記号的方法による我々の証明の詳細については [2] を参照いただきたい．

超曲面の基本定理は埋め込む先の空間が定曲率空間の場合にも成り立つため (cf. [9]), 定理 3.3 は埋め込む先の空間を 4 次元定曲率空間に拡張できる．以下曲率 c の 4 次元定曲率空間を $N^4(c)$ とかく．

$$\overline{R}_{ijkl} := R_{ijkl} - c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

とし,

$$|\overline{R}| := \begin{vmatrix} \overline{R}_{1212} & \overline{R}_{1213} & \overline{R}_{1223} \\ \overline{R}_{1213} & \overline{R}_{1313} & \overline{R}_{1323} \\ \overline{R}_{1223} & \overline{R}_{1323} & \overline{R}_{2323} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{1212} - c & R_{1213} & R_{1223} \\ R_{1213} & R_{1313} - c & R_{1323} \\ R_{1223} & R_{1323} & R_{2323} - c \end{vmatrix}$$

とおく．また, Rivertz の条件式 $r_1 = \cdots = r_6 = 0$ の各 r_i に現れる R_{ijkl} をすべて $\overline{R}_{ijkl}$ に置き換えた式を $\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_6$ とかく．例えば $\overline{r}_1$ は以下の通り:

$$\begin{aligned} \overline{r}_1 = &\{R_{1213}(R_{2323} - c) - R_{1223}R_{1323}\}S_{12121} - \{R_{1213}R_{1323} - R_{1223}(R_{1313} - c)\}S_{12122} \\ &- \{(R_{1212} - c)(R_{2323} - c) - {R_{1223}}^2\}S_{12131} + \{(R_{1212} - c)R_{1323} - R_{1213}R_{1223}\}S_{12132} \\ &+ \{(R_{1212} - c)R_{1323} - R_{1213}R_{1223}\}S_{12231} - \{(R_{1212} - c)(R_{1313} - c) - {R_{1213}}^2\}S_{12232}. \end{aligned}$$

このとき次が成り立つ．

定理 3.5 ([2])**.** (1) (M^3, g) が 4 次元定曲率空間 $N^4(c)$ に局所等長埋め込み可能ならば, $|\overline{R}| \geq 0$ および $\overline{r}_1 = \cdots = \overline{r}_6 = 0$ が成り立つ．
(2) $|\overline{R}| > 0$ および $\overline{r}_1 = \cdots = \overline{r}_6 = 0$ が成り立つならば, (M^3, g) は 4 次元定曲率空間 $N^4(c)$ に局所等長埋め込み可能である．

4　主結果の応用 1

定理 3.3 の応用として, ワープ積計量をもつ 3 次元リーマン多様体 $M^3 = B \times_f F$ の 4 次元ユークリッド空間への局所等長埋め込みを考える. 3 次元の場合ワープ積計量は次の 2 種類がある:

$$\text{(A)}\ (\dim B, \dim F) = (1,2),\ ds^2 = {dx_1}^2 + f(x_1)^2(E{dx_2}^2 + 2F dx_2 dx_3 + G{dx_3}^2),$$
$$\text{(B)}\ (\dim B, \dim F) = (2,1),\ ds^2 = E{dx_1}^2 + 2F dx_1 dx_2 + G{dx_2}^2 + f(x_1,x_2)^2 {dx_3}^2.$$

ただし, (A) の場合 E, F, G は x_2, x_3 の関数で $f(x_1) > 0$, (B) の場合 E, F, G は x_1, x_2 の関数で $f(x_1, x_2) > 0$ とする.

本稿では $M^3 = B \times_f F$ を 3 次元ワープ積多様体と呼ぶ. また B を底空間, F をファイバー, f をワープ関数と呼ぶこととする.

4.1　(A) の場合

定理 4.1 ([2])**.** 底空間 B の各点において $f''(x_1) \neq 0$ とする. M^3 が $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能であれば, ファイバー F は正の定曲率空間で, そのガウス曲率 K は不等式 $K \geq f'(x_1)^2$ を満たす. 逆に F が正の定曲率空間で, 不等式 $K > f'(x_1)^2$ を満たすならば $\mathbb{R}^4$ への局所等長埋め込みが存在する.

Proof. 証明は定理 3.3 を使う. (A) のワープ積計量の場合

$$|\widetilde{R}| = f(x_1)^4 f''(x_1)^2 (K - f'(x_1)^2)(EG - F^2)^2,$$

ここで K は F のガウス曲率である. また Rivertz の条件式の 6 つのうちの 4 つ $r_1 = r_2 = r_4 = r_6 = 0$ は自動的に満たされ, r_3, r_5 は

$$r_3 = -f(x_1)^4 f''(x_1) S_{23232}(EG - F^2),$$
$$r_5 = -f(x_1)^4 f''(x_1) S_{23233}(EG - F^2)$$

となる. M^3 が $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能とすると, 定理 3.3 (1) より $\widetilde{R} \geq 0$ かつ Rivertz の条件式 $r_1 = \cdots = r_6 = 0$ が成り立つ. $f(x_1) > 0$ および $EG - F^2 > 0$ から, 仮定 $f''(x_1) \neq 0$ のもとで Rivertz の条件式の残る 2 つ $r_3 = r_5 = 0$ を満たすことと, $S_{23232} = S_{23233} = 0$ つまり F が locally symmetric となることが同値となる. 特に $\dim F = 2$ であることから F は定曲率となる. また $\widetilde{R} \geq 0$ から $K \geq f'(x_1)^2$ を得る. $K = 0$ のとき $f' = 0$ となりこれは仮定 $f'' \neq 0$ に矛盾する. よって $K > 0$ である. 逆に, F が正の定曲率空間で不等式 $K > f'(x_1)^2$ を満たすとき $|\widetilde{R}| > 0$ および Rivertz の条件式

を満たすことがわかる．よって定理 3.3 (2) から M^3 は $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能である．

$\square$

注意 4.2. (1) F が正の定曲率空間で不等式 $K > f'(x_1)^2$ を満たすとき, 具体的に局所等長埋め込みを構成することができる．$K = \frac{1}{r^2}$ (ただし $r > 0$) のとき,

$$(x_2, x_3) \mapsto (a(x_2, x_3), b(x_2, x_3), c(x_2, x_3))$$

が F から $\mathbb{R}^3$ への局所等長埋め込みとなる a, b, c ($a^2 + b^2 + c^2 = r^2$) をとる．さらに, 関数 $p(x_1)$ を

$$p'(x_1)^2 + r^2 f'(x_1)^2 = 1$$

を満たすものとする (条件 $K = \frac{1}{r^2} > f'(x_1)^2$ から $r^2 f'(x_1)^2 < 1$ である)．このとき $\varphi : M^3 \to \mathbb{R}^4$:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (p(x_1), f(x_1)a(x_2, x_3), f(x_1)b(x_2, x_3), f(x_1)c(x_2, x_3))$$

は局所等長埋め込みとなる．

(2) F が平坦 ($K = 0$) のとき, M^3 が $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能であるための必要十分条件は $f(x_1) = px_1 + q$ ($q > 0$) である．実際, M^3 から $\mathbb{R}^4$ への局所等長埋め込みが存在するとすると, $K = 0$ かつ $|\widetilde{R}| \geq 0$ から $f'^2 f''^2 \leq 0$ を得る．これは f' が定数関数であることと同値である．さらにこのとき, Rivertz の条件式は自動的に満たされる．逆に $f(x_1) = px_1 + q$ とすると, F が平坦であることから

$$ds^2 = dx_1{}^2 + f(x_1)^2(dx_2{}^2 + dx_3{}^2)$$

となる．$p = 0$ のとき M^3 は平坦となり, したがって M^3 は $\mathbb{R}^3$ へ局所等長埋め込み可能である．$p \neq 0$ のとき k, l を $p^2(k^2 + l^2) = 1$ を満たす 0 でない実数とし, $\varphi : M^3 \to \mathbb{R}^4$:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left(kf(x_1)\cos\frac{x_2}{k}, kf(x_1)\sin\frac{x_2}{k}, lf(x_1)\cos\frac{x_3}{l}, lf(x_1)\sin\frac{x_3}{l}\right)$$

とすると φ は局所等長埋め込みとなる．

(3) $f'' = 0$ の場合, $|\widetilde{R}| = 0$ となり定理 3.3 (ii) は適用できない．一般に F が平坦ではない場合どのようなリーマン計量が $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能となるかを決定するのは困難である．

4.2 (B) の場合

ここでは K を B のガウス曲率, $f := f(x_1, x_2)$ とする．

定理 4.3. B の各点で $K \neq 0$ が成り立つとする．M^3 が $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能のとき, 次の 2 つの条件が成り立つ:

(i) $(H^f_{11}H^f_{22} - {H^f_{12}}^2)K \geq 0$,

(ii) $\exists c \geq 0$ s.t. $H^f_{11}H^f_{22} - {H^f_{12}}^2 + K({f_1}^2G - 2f_1f_2F + {f_2}^2E) = cK(EG - F^2)$.

ここで $H^f_{ij} = f_{ij} - \Gamma^1_{ij}f_1 - \Gamma^2_{ij}f_2$ は関数 $f(x_1)$ のヘッシアン, $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ である．逆に $(H^f_{11}H^f_{22} - {H^f_{12}}^2)K > 0$ および 上記条件 (ii) が成り立つならば, c は正の定数となり, M^3 は $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能である．

Proof. 証明は定理 3.3 を使う．(B) のワープ積計量の場合直接計算により

$$|\widetilde{R}| = f^2K(H^f_{11}H^f_{22} - {H^f_{12}}^2)(EG - F^2)$$

を得る．また Rivertz の条件式の 6 つのうちの 4 つ $r_1 = r_4 = r_5 = r_6 = 0$ は自動的に満たされ, 残る r_2, r_3 については

$$\frac{H^f_{11}H^f_{22} - {H^f_{12}}^2 + K({f_1}^2G - 2f_1f_2F + {f_2}^2E)}{K(EG - F^2)}$$

を x_1, x_2 で偏微分したものがそれぞれ

$$-\frac{r_2}{f^2K^2(EG - F^2)^2}, \quad -\frac{r_3}{f^2K^2(EG - F^2)^2}$$

となることがわかる．M^3 が $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能とすると, 定理 3.3 (1) より $|\widetilde{R}| \geq 0$ かつ Rivertz の条件式 $r_1 = \cdots = r_6 = 0$ が成り立つ．$|\widetilde{R}| \geq 0$, $f(x_1, x_2) > 0$, $EG - F^2 > 0$ から (i) を得る．また Rivertz の条件式 $r_2 = r_3 = 0$ から

$$H^f_{11}H^f_{22} - {H^f_{12}}^2 + K({f_1}^2G - 2f_1f_2F + {f_2}^2E) = cK(EG - F^2)$$

を満たす定数 c が存在する．このとき, $|\widetilde{R}|$ は

$$|\widetilde{R}| = f^2K^2(EG - F^2)\{c(EG - F^2) - (f_1^2G - 2f_1f_2F + f_2^2E)\}$$

と表される．よって $|\widetilde{R}| \geq 0$ および仮定 $K \neq 0$ から

$$c(EG - F^2) \geq f_1^2G - 2f_1f_2F + f_2^2E \geq 0$$

となり $c \geq 0$ を得る．特に $|\widetilde{R}| > 0$ のとき $c > 0$ となる．逆に $(H^f_{11}H^f_{22} - {H^f_{12}}^2)K > 0$ かつ (ii) を満たすとき, $|\widetilde{R}| > 0$ かつ Rivertz の条件式 $r_1 = \cdots = r_6 = 0$ が成り立つ．よって定理 3.3 (2) から M^3 は $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能である．このとき, 先の議論から (ii) を満たす c は正の数となることがわかる． □

注意 4.4. (ii) に現れる 2 階の偏微分方程式は Monge-Ampère 方程式と呼ばれているものである．定理 4.3 から ワープ積計量 (B) の場合には局所等長埋め込みの問題は Monge-Ampère 方程式の問題に帰着されるわけであるが, 一般には 不等式 $(H^f_{11}H^f_{22}-{H^f_{12}}^2)K>0$ を満たす Monge-Ampère 方程式 (ii) の解を見つけるのは難しい問題である．

最後に定理 4.3 を用いて局所等長埋め込み可能であることが示される例を紹介しよう．

例 4.5. 原点の近傍で定義された次のワープ積計量は $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込みである:

$$ds^2 = E{dx_1}^2 + {dx_2}^2 + f(x_1,x_2)^2{dx_3}^2,$$

ただし, $E = 1+2ax_1+2bx_2$ $(b\neq 0)$, $f(x_1,x_2)>0$ とする．

Proof. この計量に対して定理 4.3 を適用すると, $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能であるためには, ある正定数 c が存在して f が原点において次の 2 つの条件

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\ f_1(0,0)^2+f_2(0,0)^2<c,\\ &\text{(ii)}\ f_{11}f_{22}-{f_{12}}^2-\frac{a}{E}f_1f_{22}+bf_2f_{22}+\frac{2b}{E}f_1f_{12}+\frac{b^2}{E}{f_2}^2=\frac{b^2c}{E}\end{aligned}$$

を満たせば良いことがわかる．d を $0<d<c$ を満たす定数とし,

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\int_{-\frac{d}{c}}^{2ax_1+2bx_2}\sqrt{\frac{ct+d}{a^2+b^2(t+1)}}\,dt$$

とすると, $f(x_1,x_2)$ は上記の条件 (i), (ii) を満たす． □

5 主結果の応用 2

もう一つの応用として, 左不変計量を入れた 3 次元リー群の $\mathbb{R}^4$ への局所等長埋め込みについて述べる．G^3 を 3 次元リー群とし, g を G^3 上の左不変計量とする．また $\mathfrak{g}^3$ を G^3 のリー代数とし, $\langle,\rangle$ を g に対応する $\mathfrak{g}^3$ 上の内積とする．以下, (G^3,g) と対応する内積付きリー代数 $(\mathfrak{g}^3,\langle,\rangle)$ を同一視する．

3 次元実リー代数 $\mathfrak{g}^3$ の分類結果を用いて, 各 $\mathfrak{g}^3$ 上のすべての内積について, $(\mathfrak{g}^3,\langle,\rangle)$ が $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能かどうかを調べていく．ただし, $(\mathfrak{g}^3,\langle,\rangle)$ が $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能ならば, 正のスカラー倍あるいは等長変換で写り合う内積も $\mathbb{R}^4$ に局所等長埋め込み可能であるため, それらは同一視して良い．結果として次の内積付きリー代数 $(\mathfrak{g}^3,\langle,\rangle)$ を

調べれば良い (cf. [1], [17], [18], [23]).

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 &: \\
\mathfrak{h}_3 &: [e_1, e_2] = e_3 \\
\mathfrak{r}_{3,1} &: [e_1, e_2] = e_2, \ \ [e_1, e_3] = e_3 \\
\mathfrak{r}_3 &: [e_1, e_2] = e_2 + 2\lambda e_3, \ \ [e_1, e_3] = e_3 \ \ (\lambda > 0) \\
\mathfrak{r}_{3,\alpha} &: [e_1, e_2] = e_2 + 2\lambda(\alpha - 1)e_3, \ \ [e_1, e_3] = \alpha e_3 \ \ (-1 \leq \alpha < 1, \ \lambda \in \mathbb{R}) \\
\mathfrak{r}'_{3,\alpha} &: [e_1, e_2] = \alpha e_2 - \lambda e_3, \ \ [e_1, e_3] = \frac{1}{\lambda} e_2 + \alpha e_3 \ \ (\alpha \geq 0, \ \lambda \geq 1) \\
\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) &: [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \ \ [e_2, e_3] = e_1, \ \ [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2 \ \ (\lambda_2 > 0, \ \lambda_3 < 0) \\
\mathfrak{so}(3) &: [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \ \ [e_2, e_3] = e_1, \ \ [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2 \ \ (\lambda_2, \lambda_3 > 0)
\end{aligned}
$$

ここで 内積 $\langle , \rangle$ は上記の基底を正規直交基底とするものとする. α はリー代数の同型類のパラメータ, $\lambda, \lambda_2, \lambda_3$ は内積の (“スカラー倍を除いて等長的”という同値関係の) 同値類のパラメータを表す. $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ および $\mathfrak{so}(3)$ は単純, それ以外は可解リー代数である.

[1] では $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能な $(\mathfrak{g}^3, \langle , \rangle)$ の分類を与えている.

定理 5.1 ([1])**.** $(\mathfrak{g}^3, \langle , \rangle)$ が $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能ならば, 次のいずれかと同型である:

1. $\mathbb{R}^3$ とその上の任意の内積,
2. $\mathfrak{r}_{3,0}$ とその上の $\lambda = 0$ に対応する内積,
3. $\mathfrak{r}'_{3,0}$ とその上の $\lambda = 1$ に対応する内積,
4. $\mathfrak{so}(3)$ とその上の $(\lambda_2, \lambda_3) = (1, 1)$ に対応する内積.

上記の例が $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能であることは古くから知られている. 補足しておくと, 1, 3 は平坦であり $\mathbb{R}^3$ へ等長埋め込み可能である. 2 に対応するリー群は 実双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ と $\mathbb{R}$ の直積空間であるが, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ は $\mathbb{R}^3$ に局所等長埋め込み可能であることから $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \times \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能であることがわかる. 4 は 3 次元球面の近傍と等長的であり, したがって $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能である.

[1] では, 上記の 4 つの例を除く各内積付きリー代数に対して, ガウス方程式およびガウス方程式を共変微分して得られる方程式 (これらは等長埋め込み可能であるための障害) を満たす α が存在しないことを示し, 定理 5.1 を証明している. ここでは, 定理 3.3 を用いた別証明を紹介する.

5.1 可解の場合

$\mathfrak{g}^3$ を 3 次元可解リー代数, $\langle , \rangle$ を $\mathfrak{g}^3$ 上の内積とすると, $(\mathfrak{g}^3, \langle , \rangle)$ の正規直交基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ でブラケット積が以下で与えられるものが存在する:

$$
[e_1, e_2] = a e_2 + 2b e_3, \quad [e_1, e_3] = 2c e_2 + d e_3, \quad [e_2, e_3] = 0 \quad (\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}).
$$

このとき次が成り立つ.

命題 5.2. Rivertz の条件式 $r_1 = \cdots = r_6 = 0$ を満たすことと, 次のいずれかを満たすことが同値となる:

1. $ad = 4b^2$, $b = c$,
2. $a = d$, $b + c = 0$.

Proof. e_i $(i = 1, 2, 3)$ を G^3 上の左不変ベクトル場と同一視する. G^3 のリーマン曲率テンソルは

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= -a^2 - (b + c)(3b - c), \\
R_{1213} &= -2(ac + bd), \\
R_{1223} &= R_{1323} = 0, \\
R_{1313} &= (b + c)(b - 3c) - d^2, \\
R_{2323} &= (b + c)^2 - ad
\end{aligned}$$

で与えられる. さらにその共変微分 $S = \nabla R$ は

$$\begin{aligned}
S_{12121} &= -2(b - c)R_{1213}, \\
S_{12122} &= S_{12123} = 0, \\
S_{12131} &= (b - c)(R_{1212} - R_{1313}), \\
S_{12132} &= S_{12133} = S_{12231} = 0, \\
S_{12232} &= (b + c)R_{1212} - aR_{1213} - (b + c)R_{2323}, \\
S_{12233} &= dR_{1212} - (b + c)R_{1213} - dR_{2323}, \\
S_{13131} &= 2(b - c)R_{1213}, \\
S_{13132} &= S_{13133} = S_{13231} = 0, \\
S_{13232} &= (b + c)R_{1213} - aR_{1313} + aR_{2323}, \\
S_{13233} &= dR_{1213} - (b + c)R_{1313} + (b + c)R_{2323}, \\
S_{23231} &= S_{23232} = S_{23233} = 0
\end{aligned}$$

となる. これらから Rivertz の条件式のうち $r_3 = r_5 = 0$ が常に成り立つことがわかる. また

$$r_6 = -(b - c)\{(a - d)^2 + 4(b + c)^2\}\{(b + c)^2 - ad\}^2$$

から, $r_6 = 0$ のとき (i) $b = c$, (ii) $a = d$ かつ $b + c = 0$, (iii) $(b + c)^2 = ad$ のいずれかが成り立つ.

(i) $b=c$ の場合. このとき $S_{12121}=S_{12131}=S_{13131}=0$ となり, さらに r_1, r_2, r_4 は

$$
\begin{aligned}
r_1 &= -4b(ad-4b^2)^3,\\
r_2 &= 2(a-d)(ad-4b^2)^3,\\
r_4 &= 4b(ad-4b^2)^3
\end{aligned}
$$

となる. したがって $r_1=r_2=r_4=0$ のとき $ad=4b^2$ または $a=d$, $b(=c)=0$ を得る.

(ii) $a=d$ かつ $b+c=0$ の場合. このとき $R_{1212}=R_{1313}=R_{2323}=-a^2$, $R_{1213}=R_{1223}=R_{1323}=0$. さらに任意の i,j,k,l,m に対して $S_{ijklm}=0$ となる. 特に $r_1=r_2=r_4=0$ が成り立つ.

(iii) $(b+c)^2=ad$ の場合.

$$
\begin{aligned}
r_1 &= -(b-c)\{a^2+(b+c)^2\}(b-c)^2(a+d)^2,\\
r_2 &= -2(a+d)(b^2-c^2)(b-c)^2(a+d)^2,\\
r_4 &= -(b-c)\{(b+c)^2+d^2\}(b-c)^2(a+d)^2
\end{aligned}
$$

となる. よって $r_1=r_2=r_4=0$ ならば $b=c$ または $a+d=0$ となる. したがって, Rivertz の条件式を満たすならば 1 または 2 のいずれかを満たす.

逆に 1 または 2 を満たすとき, Rivertz の条件式を満たすことも上記の計算からわかる. $\square$

我々が調べる 3 次元内積付き可解リー代数の分類結果を眺めると, ブラケット積が

$$[e_1,e_2]=ae_2+2be_3,\quad [e_1,e_3]=2ce_2+de_3,\quad [e_2,e_3]=0\quad (\exists a,b,c,d\in\mathbb{R}),$$

で $ad=4b^2$, $b=c$ または $a=d$, $b+c=0$ を満たすものは, 定理 5.1 の例を除くと $\mathfrak{r}_{3,1}$, または $\mathfrak{r}'_{3,\alpha}(\alpha>0)$, $\lambda=1$ のみである (つまり補題 5.2, 定理 3.3 からこれら以外は $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み不可能である) ことがわかる. さらに $|\widetilde{R}|$ を計算すると, $\mathfrak{r}_{3,1}$ の場合, $|\widetilde{R}|=-1<0$, $\mathfrak{r}'_{3,\alpha}(\alpha>0)$, $\lambda=1$ の場合, $|\widetilde{R}|=-\alpha^6<0$ を得る. よって定理 3.3 (1) からこれらも $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み不可能である. したがって可解リー代数上の内積については, 定理 5.1 の 1, 2, 3 以外はすべて $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み不可能であることが示された. なお, $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{r}_{3,0}$ 上の $\lambda=0$ に対応する内積, および $\mathfrak{r}'_{3,0}$ 上の $\lambda=1$ に対応する内積はいずれも $|\widetilde{R}|=0$ となるため, 定理 3.3(2) を用いて局所等長埋め込み可能であることは証明できない.

5.2 単純の場合

次に $\mathfrak{g}^3$ が単純リー代数の場合を考える. $\langle,\rangle$ を $\mathfrak{g}^3$ 上の内積とすると, $(\mathfrak{g},\langle,\rangle)$ の正規直交基底 $\{e_1,e_2,e_3\}$ でブラケット積が以下で与えられるものが存在する:

$$[e_1,e_2]=\lambda_3e_3,\ \ [e_2,e_3]=e_1,\ \ [e_3,e_1]=\lambda_2e_2\ (\exists\lambda_2>0,\lambda_3\neq 0).$$

このとき $R_{1213} = R_{1223} = R_{1323} = 0$ であり, さらに任意の $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 \neq 0$ に対して, $|\widetilde{R}| = R_{1212}R_{1313}R_{2323} \neq 0$ となる (cf. 命題 4.9, [1]). S_{ijklm} についても $S_{12131}, S_{12232}, S_{13233}$ 以外は全て 0 となることが直接計算によりわかる. したがって Rivertz の条件式のうち $r_2 = r_3 = r_5 = 0$ は自動的に成り立つ. 残る r_1, r_4, r_6 については

$$\begin{aligned}
r_1 &= -R_{1212}(R_{2323}S_{12131} + R_{1313}S_{12232}), \\
r_4 &= R_{1313}(R_{2323}S_{12131} - R_{1212}S_{13233}), \\
r_6 &= R_{2323}(R_{1313}S_{12232} + R_{1212}S_{13233})
\end{aligned}$$

となる. このとき次が成り立つ.

補題 5.3. Rivertz の条件式を満たすことと, 次を満たすことが同値となる:

$$R_{2323}S_{12131} = -R_{1313}S_{12232} = R_{1212}S_{13233}.$$

$\lambda_2 > 0, \lambda_3 \neq 0$ のとき, $R_{2323}S_{12131} = -R_{1313}S_{12232} = R_{1212}S_{13233}$ を解くと $(\lambda_2, \lambda_3) = (1, 1)$ を得る (cf. 命題 5.6, [1]). したがって補題 5.3 および定理 3.3 (1) から 単純リー代数上の $(\lambda_2, \lambda_3) = (1, 1)$ 以外の内積は $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み不可能である. また, $(\lambda_2, \lambda_3) = (1, 1)$ のとき $|\widetilde{R}| > 0$ を満たすことが直接計算によりわかる. よって補題 5.3 および 定理 3.3 (2) から $\mathfrak{so}(3)$ 上の $(\lambda_2, \lambda_3) = (1, 1)$ に対応する内積は $\mathbb{R}^4$ へ局所等長埋め込み可能である. 先の可解リー代数の場合の議論と合わせると定理 5.1 が得られる.

定理 1.1 より任意の $(\mathfrak{g}^3, \langle , \rangle)$ は $\mathbb{R}^6$ へ局所等長埋め込み可能である. $\mathbb{R}^5$ へ局所等長埋め込み可能なものについては, 部分的な結果はあるが (cf. [2], [20]) 完全な分類は得られていない. また $(\mathfrak{g}^3, \langle , \rangle)$ が 4 次元定曲率空間へ局所等長埋め込み可能かどうかについては, $|\overline{R}| \neq 0$ を満たす場合には定理 3.5 を用いることで判定可能である ([3]).

参考文献

[1] Agaoka, Y., Hashinaga, T.: On local isometric embeddings of three-dimensional Lie groups. Geom. Dedicata **205** (2020), 191–219.

[2] Agaoka, Y., Hashinaga, T.: Intrinsic characterization of 3-dimensional Riemannian submanifolds of $\mathbb{R}^4$. arXiv:2206.03634.

[3] Agaoka, Y., Hashinaga, T.: Local isometric embeddings of three-dimensional Lie groups into four-dimensional space forms. in preparation.

[4] Agaoka, Y., Kaneda E.: Local isometric imbeddings of Riemannian symmetric spaces and their rigidity. Sugaku Expositions **21** (2008), 33–54.

[5] Borisenko, A. A.: Isometric immersions of space forms into Riemannian and pseudo-Riemannian spaces of constant curvature. Russian Math. Surveys **56** No.3 (2001), 425–497.

[6] Cartan, E.: Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien. Ann. Soc. Polon. Math. **6** (1927), 1–7.

[7] Chen, B.Y.: Riemannian submanifolds. in "Handbook of Differential Geometry Vol.I", eds. F.J.E.Dillen, L.C.A.Verstraelen, 187–418, Elsevier Sci., Amsterdam, 2000.

[8] Chen, B.Y.: Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds. World Scientific, Singapore, 2017.

[9] Dajczer, M.: Submanifolds and Isometric Immersions. Math. Lecture Ser. **13**, Publish or Perish, Houston, 1990.

[10] Dajczer, M., Tojeiro, R.: Submanifold Theory. Springer, New York, 2019.

[11] Dolgachev, I.: Lectures on Invariant Theory. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **296**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[12] Greene, R. E., Jacobowitz, H.: Analytic isometric embeddings. Ann. of Math. **93** (1971), 189–204.

[13] Gromov, M. L.: Partial Differential Relations. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[14] Gromov, M. L., Rokhlin, V. A.: Embeddings and immersions in Riemannian geometry. Russian Math. Surveys **25**, No.5 (1970), 1–57.

[15] Günther, M.: Isometric embeddings of Riemannian manifolds. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol.II (Kyoto 1990), 1137–1143, Math. Soc. Japan, 1991.

[16] Gurevich, G. B.: Foundations of the Theory of Algebraic Invariants. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1964.

[17] Hashinaga, T., Tamaru, H.: Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds. Internat. J. Math. **28** (2017), 31 pp.

[18] Hashinaga, T., Tamaru, H., Terada, K.: Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups. J. Math. Soc. Japan **68** (2016), 669–684.

[19] Janet, M.: Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien. Ann. Soc. Polon. Math. **5** (1926), 38–43.

[20] Kaneda, E.: Isometric immersions of three-dimensional Riemannian manifolds into the five-dimensional Euclidean space. preprint.

[21] Kobayashi, S.: Isometric embeddings of compact symmetric spaces. Tohoku Math. J. **20** (1968), 21–25.

[22] Kobayashi, S., Nomizu, K.: Foundations of Differential Geometry, vol.II. John Wiley & Sons, New York, 1969.

[23] Kodama, H., Takahara, A., Tamaru, H.: The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling. Manuscripta Math. **135** (2011), 229–243.

[24] Matsumoto, M.: Local imbedding of Riemann spaces I, II (in Japanese). Sûgaku **5** (1953), 210–219; **6** (1954), 6–16.

[25] Nash, J.: The imbedding problem for Riemannian manifolds. Ann. of Math. **63** (1956), 20–63.

[26] Olver, P.J.: Classical Invariant Theory. London Math. Soc. Student Texts **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[27] Poznyak, E.G., Sokolov, D.D.: Isometric immersions of Riemannian spaces in Euclidean spaces. J. Soviet Math. **14** (1980), 1407–1428.

[28] Rivertz, H. J.: On isometric and Conformal Immersions into Riemannian Manifolds. Ph. D. Thesis, Univ. Olso (1999).

[29] Spivak, M.: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol.V. Publish or Perish, Boston, 1975.

[30] Thomas, T. Y.: Riemann spaces of class one and their characterization. Acta. Math. **67** (1936), 169–211.

[31] Weise, K. H.: Beiträge zum Klassenproblem der quadratischen Differentialformen. Math. Ann. **110** (1935), 522–570.