n 次元中間値の定理と戦略形ゲームへのその応用
An n-dimensional intermediate-value theorem and its application to a strategic game

川崎英文 *

Hidefumi Kawasaki

九州大学大学院数理学研究院

Faculty of Mathematics, Kyushu University

Abstract

Poincaré-Miranda の定理は n 次元の零点定理で，Poincaré [5] の予想を Miranda [4] が証明したものである．Miranda [4] は零点定理が Brouwer の不動点定理と同値であることも示している．Poincaré-Miranda の定理は中間値の定理の拡張と言よばれることがあるが，教科書にある慣れ親しんだ形の記述はこれまでなかった．川崎は [2] で n 次元中間値の定理を明示し，それが Poincaré-Miranda の定理と同値であることを示した．さらに，対戦型の 2 人ゲームと 3 人ゲームへの応用を図り，混合戦略により実現可能な利得関数の値域を示した．

本稿では，[2] で与えた n 次元中間値の定理の意味を考察し，定理の仮定の必然性を示す．さらに，対戦型の n 人ゲームに応用した結果を報告する．

1　序

$a_i < b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ として，$I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $f = (f_1, \ldots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とする．1 次元の中間値の定理は次のようになる．

(A) $\min\{f(a), f(b)\} \leq \gamma \leq \max\{f(a), f(b)\}$ なる任意の γ に対し，$f(c) = \gamma$ なる $a \leq c \leq b$ が存在する．

(B) 特に $\min\{f(a), f(b)\} < \gamma < \max\{f(a), f(b)\}$ ならば，$f(c) = \gamma$ なる $a < c < b$ が存在する．

通常，中間値の定理は (B) の形で述べられるが，(A) は Brouwer の不動点定理（1 次元）や Poincaré-Miranda の定理（1 次元）と同値なので，(A) の形式で n 次元中間値の定理を記述する．

定理 1 （Poincaré-Miranda の定理）連続写像 $g = (g_1, \ldots, g_n) : I \to \mathbb{R}^n$ について，各 g_i が境界条件 (1) または (2) を満たすならば g は I に零点をもつ．

$$g_i(x) \leq 0 \ (x \in I,\ x_i = a_i), \quad 0 \leq g_i(x) \ (x \in I,\ x_i = b_i), \tag{1}$$

$$g_i(x) \geq 0 \ (x \in I,\ x_i = a_i), \quad 0 \geq g_i(x) \ (x \in I,\ x_i = b_i). \tag{2}$$

*kawasaki.hidefumi.245@m.kyushu-u.ac.jp

零点定理から中間値の定理を導くには，連続写像 $f: I \to \mathbb{R}^n$ と $\gamma \in \mathbb{R}^n$ に対し，$g(x) := f(x) - \gamma$ に零点定理を適用し，境界条件 (1)(2) を適切に翻訳すればよい．

定理 2 （n 次元中間値の定理 [2]）連続写像 $f: I \to \mathbb{R}^n$ に対して

$$\overline{\alpha}_i := \max\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = a_i\},\ \overline{\beta}_i := \max\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = b_i\},$$

$$\underline{\alpha_i} := \min\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = a_i\},\ \underline{\beta_i} := \min\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = b_i\}$$

とおくとき，

$$\min\{\overline{\alpha}_i,\ \overline{\beta}_i\} \le \gamma_i \le \max\{\underline{\alpha_i},\ \underline{\beta_i}\} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

を満たす任意の $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ に対して，$f(c) = \gamma$ なる $c \in I$ が存在する．さらに，(3) が狭義の不等式で成立する γ_i については $a_i < c_i < b_i$ が成立する．

定理 2 の証明には Poincaré-Miranda の定理を用いたが，$\gamma = \mathbf{0}$ をとることにより逆の関係を示すことができる [2]．また，Poincaré-Miranda の定理と Brouwer の不動点定理が同値であることを含めて，諸定理の関係は Mawhin[3] が分かり易い．

2　不等式 (3) の意味

不等式 (3) を満たす γ_i が存在しないとき，定理 2 は何も述べていないことになる．そこで，(3) の意味を考えることにする．因みに，[2] には本節の考察はない．

補題 1 次の 3 条件は同値である．

(a) 不等式 (3) を満たす γ_i が存在する．

(b) $(\underline{\alpha_i}, \overline{\alpha}_i) \cap (\underline{\beta_i}, \overline{\beta}_i) = \emptyset$.

(c) 関数 f_i の向かい合った 2 つの境界での値域 $\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = a_i\}, \{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = b_i\}$ の重なりは高々1 点である．

このとき，(3) は γ_i がこれらの 2 つの開区間の隙間にあることを意味する．

証明. (a) は $\min\{\overline{\alpha}_i,\ \overline{\beta}_i\} \le \max\{\underline{\alpha_i},\ \underline{\beta_i}\}$ と同値で，これは $\overline{\alpha}_i \le \underline{\beta_i}\ (\le \overline{\beta}_i)$ または $\overline{\beta}_i \le \underline{\alpha_i}\ (\le \overline{\alpha}_i)$ と同値である．つまり，$(\underline{\alpha_i}, \overline{\alpha}_i)$ と $(\underline{\beta_i}, \overline{\beta}_i)$ は交わらない．また，$\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = a_i\} = [\underline{\alpha_i}, \overline{\alpha}_i]$, $\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = b_i\} = [\underline{\beta_i}, \overline{\beta}_i]$ なので，(b) は (c) と同値である．∎

注意 1 補題 1 により，向かい合う 2 つの境界での f_i の値域

$$\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = a_i\} = [\underline{\alpha_i}, \overline{\alpha}_i], \quad \{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = b_i\} = [\underline{\beta_i}, \overline{\beta}_i]$$

の隙間が大きいほど，γ_i の範囲が広がることになる．1 次元の場合は $[a, b]$ の境界における $f(x)$ の値は $f(a)$ と $f(b)$ であり，(c) が成立するので中間値の定理の主張が空になることはない．

また，2 次元以上の場合，I の向かい合う境界での f_i の値域の重なりが高々1 点ならば，その隙間に γ_i が入り込むことができる．その様子を描いたのが次の図 1 である．

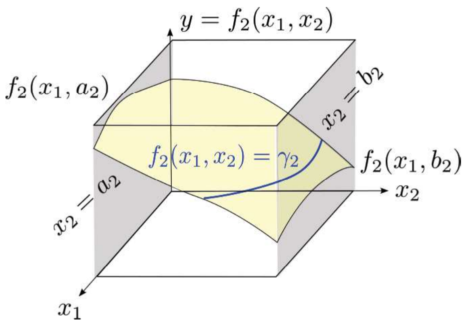

図 1: 関数 f_2 の境界 $x \in I,\, x_2 = a_2$ での値域は，境界 $x \in I,\, x_2 = b_2$ での値域より上にある．2 つの値域の間の値 γ_2 をとり，水平面 $y = \gamma_2$ でグラフをカットすると，曲線 $f_2(x_1, x_2) = \gamma_2$ が表れる．

3　戦略形 n 人ゲームへの応用

本節では定理 2 を，純戦略が 2 つである次の戦略形 n 人ゲームに適用する．

- プレイヤーを $i = 1, \dots, n$ で表し，特定のプレイヤーには k を充てる．
- 各プレイヤーの選択肢（純戦略）を j, l で表し，l ではない選択肢を $\bar{l}$ で表す．

$$\text{i.e.} \quad \bar{l} := \begin{cases} 2 & (l = 1) \\ 1 & (l = 2) \end{cases} \tag{4}$$

- 1 次元確率ベクトルの空間を Δ_1 で表す．プレイヤー i の確率ベクトル $\boldsymbol{x}_i = (x_i^1, x_i^2) \in \Delta_1$ が混合戦略である．
- $a_i^{j_1 \cdots j_n}$ $(i = 1, \dots, n.,\ j = 1, 2)$ を実数として，プレイヤー i の利得関数を多重線形関数

$$f_i(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{j_1=1}^{2} \cdots \sum_{j_n=1}^{2} a_i^{j_1 \cdots j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$$

　とする．プレイヤー i は他のプレイヤーの戦略を考慮して，利得 f_i の最大化を図る．

プレイヤー $k = 1, \dots, n$ と選択肢 $l = 1, 2$ に対して，α_k^l を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha}_k^l &:= \min\{f_k(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \mid x_k^{\bar{l}} = 1,\ \boldsymbol{x}_i \in \Delta_1\ (i = 1, \dots, n)\}, \\
\overline{\alpha}_k^l &:= \max\{f_k(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \mid x_k^{\bar{l}} = 1,\ \boldsymbol{x}_i \in \Delta_1\ (i = 1, \dots, n)\}, \\
\underline{\beta}_k^l &:= \min\{f_k(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \mid x_k^{l} = 1,\ \boldsymbol{x}_i \in \Delta_1\ (i = 1, \dots, n)\}, \\
\overline{\beta}_k^l &:= \max\{f_k(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \mid x_k^{l} = 1,\ \boldsymbol{x}_i \in \Delta_1\ (i = 1, \dots, n)\}.
\end{aligned}$$

例えば，$\underline{\beta}_k^l$ はプレイヤー k が純戦略 l を確率 1 で選択したとき，考えられる最小利得であり，$\overline{\beta}_k^l$ は考えられる最大利得である．

次の補題 2 と定理 3 は，$n = 2, 3$ の場合に [2] で示している．

補題 2 プレイヤー k とその選択肢 $l=1,2$ について，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha}_k^l &= \min\{a_k^{j_1,\dots,j_n} \mid j_k=\bar{l},\ j_i=1,2\ (i\neq k)\}, && (5)\\
\overline{\alpha}_k^l &= \max\{a_k^{j_1,\dots,j_n} \mid j_k=\bar{l},\ j_i=1,2\ (i\neq k)\}, && (6)\\
\underline{\beta}_k^l &= \min\{a_k^{j_1,\dots,j_n} \mid j_k=l,\ j_i=1,2\ (i\neq k)\}, && (7)\\
\overline{\beta}_k^l &= \max\{a_k^{j_1,\dots,j_n} \mid j_k=l,\ j_i=1,2\ (i\neq k)\}. && (8)
\end{aligned}$$

ただし，$\bar{l}$ は (4) で定義される．

証明. (7) の右辺を $\underline{b}_k^l$ とおき，$k=1$ の場合に等式を示すことにする．$(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)$ を $\underline{\beta}_k^l$ の定義式の最小解とすると，

$$\begin{aligned}
\underline{\beta}_1^l &= \sum_{j_2=1}^{2}\cdots\sum_{j_n=1}^{2} x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n} a_1^{lj_2\cdots j_n}\\
&\geq \underline{b}_1^l \sum_{j_2=1}^{2}\cdots\sum_{j_n=1}^{2} x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n} = \underline{b}_1^l \prod_{i=2}^{n}(x_i^1+x_i^2) = \underline{b}_1^l.
\end{aligned}$$

逆に，$\underline{b}_1^l = a_1^{lj_2,\dots,j_n}$ とすると，$\boldsymbol{e}_1=(1,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$ として，$a_1^{lj_2,\dots,j_n} = f_1(\boldsymbol{e}_l,\boldsymbol{e}_{j_2},\dots,\boldsymbol{e}_{j_n}) \geq \underline{\beta}_1^l$ なので (7) が示された．(8) も同様に示される．また，$\underline{\alpha}_k^l = \underline{\beta}_k^{\bar{l}}$, $\overline{\alpha}_k^l = \overline{\beta}_k^{\bar{l}}$ なので，(7) と (8) から (5) と (6) が得られる．∎

定理 3 各プレイヤーが 2 つの純戦略をもつ上述の n 人戦略形ゲームにおいて，

$$\begin{aligned}
&\underline{\alpha}_k := \min\{a_k^{j_1\cdots j_n} \mid j_k=1,\ j_i=1,2\ (i\neq k)\},\\
&\overline{\alpha}_k := \max\{a_k^{j_1\cdots j_n} \mid j_k=1,\ j_i=1,2\ (i\neq k)\},\\
&\underline{\beta}_k := \min\{a_k^{j_1\cdots j_n} \mid j_k=2,\ j_i=1,2\ (i\neq k)\},\\
&\overline{\beta}_k := \max\{a_k^{j_1\cdots j_n} \mid j_k=2,\ j_i=1,2\ (i\neq k)\}
\end{aligned}$$

とおく．このとき，

$$\min\{\overline{\alpha}_i,\overline{\beta}_i\} \leq \gamma_i \leq \max\{\underline{\alpha}_i,\underline{\beta}_i\} \quad (i=1,\dots,n) \tag{9}$$

を満たす任意の $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ に対して，利得 γ を実現する混合戦略 $(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)\in\Delta_1^n$ が存在する．すなわち，

$$f_i(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)=\gamma_i \quad (i=1,\dots,n).$$

さらに，(9) が狭義の不等式で成立する γ_i については，$\boldsymbol{x}_i=(x_i^1,x_i^2)$ は Δ_1 の内点である．

証明．定理 2 と補題 2 を組み合わせればよい．∎

例 1 （[2]）プレイヤーが 2 人のゲーム（双行列ゲーム）を考える．記述を簡潔にするために混合戦略を $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)\in\Delta_1$，プレイヤー i の利得を

$$f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(x_1,x_2)\begin{pmatrix} a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

で表す．このとき，

$$\min\{\max\{a_1, b_1\}, \max\{c_1, d_1\}\} \leq \gamma_1 \leq \max\{\min\{a_1, b_1\}, \min\{c_1, d_1\}\} \tag{10}$$

$$\min\{\max\{a_2, c_2\}, \max\{b_2, d_2\}\} \leq \gamma_2 \leq \max\{\min\{a_2, c_2\}, \min\{b_2, d_2\}\}, \tag{11}$$

を満たす任意の (γ_1, γ_2) に対して，その利得を実現する混合戦略 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Delta_1^2$ が存在する．さらに，γ_1 が (10) を狭義に満たせば $\boldsymbol{x}$ は Δ_1 の内点であり，γ_2 が (11) を狭義に満たせば $\boldsymbol{y}$ は Δ_1 の内点である．

プレイヤーが 3 人のときも同様である [2].

4 結び

純戦略が 3 つ以上のときは，以下のような対応が考えられる．ポイントは，注意 1 で述べたように，利得関数の値域に大きな差ができるように向かい合う 2 つの境界を選ぶことである．そのためには境界が狭い方がよい．3 節で考察したゲームとの違いは以下の通りである．

- プレイヤー i の選択肢（純戦略）を $j_i = 1, 2, \ldots, m_i$ で表す．
- m 次元確率ベクトルの空間を Δ_m で表し，確率ベクトル $\boldsymbol{x}_i \in \Delta_{m_i-1}$ をプレイヤー i の混合戦略とよぶ．標準単位ベクトル $e_{j_i} \in \Delta_{m_i-1}$ は純戦略 j_i を表す．
- $a_i^{j_1 \cdots j_n}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j_i \leq m_i)$ を実数として，プレイヤー i の利得関数は

$$f_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} a_i^{j_1 \cdots j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}.$$

プレイヤー i に対し，任意に 2 つの選択肢 $j_i \neq l_i$ をとり固定する．$[\boldsymbol{e}_{j_i}, \boldsymbol{e}_{l_i}]$ を $\boldsymbol{e}_{j_i}$ と $\boldsymbol{e}_{l_i}$ を結ぶ線分として

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha}_k &:= \min\{f_k(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \mid \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{e}_{j_k},\ \boldsymbol{x}_i \in [\boldsymbol{e}_{j_i}, \boldsymbol{e}_{l_i}]\ (i \neq k)\}, \\
\overline{\alpha}_k &:= \max\{f_k(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \mid \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{e}_{j_k},\ \boldsymbol{x}_i \in [\boldsymbol{e}_{j_i}, \boldsymbol{e}_{l_i}]\ (i \neq k)\}, \\
\underline{\beta}_k &:= \min\{f_k(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \mid \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{e}_{l_k}, \boldsymbol{x}_i \in [\boldsymbol{e}_{j_i}, \boldsymbol{e}_{l_i}]\ (i \neq k)\}, \\
\overline{\beta}_k &:= \max\{f_k(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \mid \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{e}_{l_k},\ \boldsymbol{x}_i \in [\boldsymbol{e}_{j_i}, \boldsymbol{e}_{l_i}]\ (i \neq k)\}
\end{aligned}$$

とする．つまり，それぞれのプレイヤーの選択肢を 2 つに絞った上で 3 節と同様に定義する．これにより，選択肢が 2 の場合に帰着され，3 節の結果が適用できる．また，プレイヤー i の 2 つの選択肢の組合せが増えるため，γ_i の範囲が広がることが期待できる．

この方法以外に，例えば

$$\begin{aligned}
\underline{\beta}_k &:= \min\{f_k(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \mid \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{e}_{j_k},\ \boldsymbol{x}_i \in \Delta_{m_i-1}\ (i \neq k)\} \\
\overline{\beta}_k &:= \max\{f_k(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \mid \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{e}_{j_k},\ \boldsymbol{x}_i \in \Delta_{m_i-1}\ (i \neq k)\}
\end{aligned}$$

と定義することも考えられるが，$[\underline{\beta}_k, \overline{\beta}_k]$ が広がるため，隙間が出来ない可能性が高くなってしまう．なお，補題 2 の証明と同様にして，次の等式他を示すことができる．

$$\underline{\beta}_k = \min\{a_k^{j_1,\dots,j_n} \mid 1 \leq j_i \leq m_i \ (i \neq k)\}.$$

最後に Nash 均衡に触れておく．残念ながら，本稿の手法では Nash 均衡を捉えることができない．つまり，Nash 均衡 x^* での利得 $\gamma := f(x^*)$ が不等式 (3) を満たすとは限らない．そのような例は簡単につくることができる．

5　謝辞

本研究は科研費 JSPS KAKENHI Grant Number 20K03751 の助成を受けている．

参　考 文 献

[1] J. Hadamard, *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, in: J. Tannery, (ed.) Introduction a la Théorie des Fonctions d'Une Variable. **2**, 2nd ed. Paris: Hermann, 1910, pp. 437–477.

[2] H. Kawasaki, An n-dimensional intermediate value theorem and its application to the game theory, Linear and Nonlinear Analysis, **8**, No.1, (2022) 81–87.

[3] J. Mawhin, *Simple Proofs of the Hadamard and Poincaré-Miranda Theorems Using the Brouwer Fixed Point Theorem*, The American Mathematical Monthly. **126** (2019) 260–263.

[4] C. Miranda, *Un osservatione su un theorema di Brouwer*, Boll. Unione Mat. Ital. **3** (1940) 5–7.

[5] H. Poincaré, *Sur certaines solutions particuliéres du probléme des trois corps*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **97** (1883) 251–252.