Meir-Keeler 型写像の不動点定理

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治
Koji Aoyama
Graduate School of Social Sciences,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09.
Keywords and phrases. Meir-Keeler 型写像, 不動点, 推移関係.

概要

文献 [1] で得られた Meir-Keeler 型写像の特徴付けとその写像の不動点定理に関連する結果を報告する.

1 はじめに

(X, d) を距離空間, R を $X \times X$ の部分集合とする. このとき, 写像 $T \colon X \to X$ が R 上で **Meir-Keeler 型**であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$(x, y) \in R,\ \epsilon \leq d(x, y) < \epsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \epsilon$$

が成り立つときをいう [1]. 本稿では, この Meir-Keeler 型写像の特徴付け, および, 不動点定理を紹介する.

この Meir-Keeler 型写像は, いわゆる Meir-Keeler contraction に基づいている. 写像 $T \colon X \to X$ が *Meir-Keeler contraction* [7] であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して

$$x, y \in X,\ \epsilon \leq d(x, y) < \epsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \epsilon$$

が成り立つときをいう[*1]. Meir-Keeler contraction は, 縮小写像の一般化である. 実際, $T \colon X \to X$ が縮小写像, つまり, 任意の $x, y \in X$ に対して $d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$ となる $r \in (0, 1)$ が存在するとき, 与えられた $\epsilon > 0$ に対して, $\delta = \epsilon(1 - r)/r$ とおけば,

$$x, y \in X,\ \epsilon \leq d(x, y) < \epsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq rd(x, y) < r(\epsilon + \delta) = \epsilon$$

となる. 一方, Meir-Keeler contraction は必ずしも縮小写像ではないことが知られている [7, Example].

[*1] 文献 [7] では, この写像を *weakly uniformly strict contraction* とよんでいる.

本稿では, 第 3 節で, Meir-Keeler 型写像の特徴付けに関する結果を述べる (定理 3.1). それは, Meir-Keeler contraction の特徴付けとして知られる文献 [6, 11] の結果を含んでいる. 次に, 第 4 節で, 推移関係をもつ完備距離空間上の Meir-Keeler 型写像の不動点定理を述べる (定理 4.1). この定理は, 文献 [4, 8–10] の不動点定理と関連がある.

2 準備

本稿では, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合, $\mathbb{R}$ を実数の集合, $\mathbb{R}_+$ を非負実数の集合とする.

関数 $l\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が **(L) 型**であるとは, 任意の $s > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $t \in [s, s+\delta] \Rightarrow l(t) \leq s$ が成り立つときをいう.

註 1. (L) 型関数は, 文献 [6] の L–関数に基づいている. 関数 $l\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が, [6] の意味で L–関数であるとは, l が (L) 型であり, さらに $l(0) = 0$, および, 任意の $s > 0$ に対して $l(s) > 0$ が成り立つときをいう.

関数 $w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が $t_0 \in \mathbb{R}_+$ で右下半連続であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $s \in [t_0, t_0+\delta) \Rightarrow w(t_0) - \epsilon < w(s)$ が成り立つときをいう. 関数 $w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が非減少ならば, w は任意の $t \in \mathbb{R}_+$ で右下半連続である. 関数 $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が $t_0 \in \mathbb{R}_+$ で右上半連続であるとは, $-\psi$ が t_0 で右下半連続であるときをいう.

3 Meir-Keeler 型写像の特徴付け

本節では, 二つの定理を紹介する. 一つ目の定理 3.1 は, 距離空間上で定義された Meir-Keeler 型写像の特徴付けをまとめたものである. 二つ目の定理 3.2 は, 定理 3.1 を抽象化したもので, 定理 3.1 は定理 3.2 より直ちに得られる.

定理 3.1 ([1, Theorem 1])**.** (X, d) を距離空間, T を X から X への写像, R を空でない $X \times X$ の部分集合とする. このとき, 以下は同値である.

(1) T は R 上で Meir-Keeler 型である. つまり, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, 以下が成り立つ.

$$(x, y) \in R,\ \epsilon \leq d(x, y) < \epsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \epsilon. \tag{3.1}$$

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, 以下が成り立つ.

$$(x, y) \in R,\ d(x, y) < \epsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \epsilon.$$

(3) 非減少関数 $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ が存在して, 以下が成り立つ.
- 任意の $s > 0$ に対して $\gamma(s) > s$;
- 任意の $(x,y) \in R$ に対して $\gamma\bigl(d(Tx,Ty)\bigr) \leq d(x,y)$.

(4) $(0,\infty)$ 上で右下半連続な関数 $w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在して, 以下が成り立つ.
- 任意の $s > 0$ に対して $w(s) > s$;
- 任意の $(x,y) \in R$ に対して $w\bigl(d(Tx,Ty)\bigr) \leq d(x,y)$.

(5) (L) 型関数 $l\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ が存在して, 以下が成り立つ.

$$(x,y) \in R,\ x \neq y \Rightarrow d(Tx,Ty) < l\bigl(d(x,y)\bigr).$$

(6) 非減少関数 $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ および $(0,\infty)$ 上で右上半連続な関数 $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在して, 以下が成り立つ.
- 任意の $t > 0$ に対して $\phi(t) > \psi(t)$;
- 任意の $(x,y) \in R$ に対して $\phi\bigl(d(Tx,Ty)\bigr) \leq \psi\bigl(d(x,y)\bigr)$.

さらに, (5) の l は非減少かつ右連続で, 任意の $s > 0$ に対して $l(s) > 0$ を満たすように選ぶことができる.

定理 3.1 において $R = X \times X$ とすれば, Meir-Keeler contraction の特徴付けが得られる.

註 2. 定理 3.1 の (4) は, [11, Theorem 1] を意識したものである. 文献 [11] では, 写像 $T\colon X \to X$ から関数 $w\colon \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ を, $w(0) = 0$ および $t > 0$ に対して

$$w(t) = \sup\{s > 0\colon x,y \in X,\ d(x,y) < s \Rightarrow d(Tx,Ty) < t\} \tag{3.2}$$

で定義し[*2], この w を使った Meir-Keeler contraction の特徴付けを試みている. しかし, その証明では w が ∞ 値関数であることに配慮がないように読める. つまり, $w(a) = \infty$ となる a における追加の説明が必要と思われる. また, [11, Abstract] では, T が Meir-Keeler contraction であることと, “There exists a function w of $[0,\infty)$ into $[0,\infty)$ such that $w(s) > s$ for all $s > 0, \ldots$” が同値と記述している. 一方, [11, Theorem 1] では, T が Meir-Keeler contraction であることと, “There exists a self map w of $[0,\infty)$ into $[0,\infty]$ such that $w(s) > s$ for all $s > 0, \ldots$” と書いており, Abstract の記述と合っていない.

[*2] 関数 w は T の *modulus of uniform continuity* とよばれる [2,3,11].

註 3. [6, Theorem 1] では, 定理 3.1 で $R = X \times X$ のとき, (3) と (4) が同値であることを示している. これは先行研究 [11, Theorem 1] の証明の曖昧さをなくたものと考えられる. なお, 文献 [6] では, $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\gamma(t) = \inf\{d(x,y) \colon x, y \in X,\, d(Tx,Ty) \geq t\}$$

で定義される関数 $\gamma \colon \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ が, (3.2) で定義される関数 $w \colon \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ と等しいことも示されている [6, Proposition 3].

註 4. 定理 3.1 の (6) は文献 [5] の weak type contraction に基づいている. 写像 $T \colon X \to X$ が [5] の意味で *weak type contraction* であるとは, 非減少関数 $\psi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, 連続関数 $\alpha \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, 下半連続関数 $\beta \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在して, 以下が成り立つときをいう.

- 任意の $t > 0$ に対して $\psi(t) - \alpha(t) + \beta(t) > 0$,
- 任意の $x, y \in X$ に対して $\psi\big(d(Tx,Ty)\big) \leq \alpha\big(d(x,y)\big) - \beta\big(d(x,y)\big)$.

この weak type contraction は, Meir-Keeler contraction である [5, Theorem 5].

定理 3.1 の仮定のもとで, $f(x,y) = d(Tx,Tx)$, $g(x,y) = d(x,y)$ として, $X \times X$ から $\mathbb{R}_+$ への関数 f および g を定義する. このとき, (3.1) は

$$(x,y) \in R,\, \epsilon \leq g(x,y) < \epsilon + \delta \Rightarrow f(x,y) < \epsilon$$

と表せる. つまり, Meir-Keeler 型写像の定義は二つの関数 f, g を用いて表すことができる. Meir-Keeler 型写像の定義および特徴付けを, このような非負値関数 f, g に関する条件として表したものが次の定理 3.2 である.

定理 3.2 ([1, Theorem 2])**.** K を空でない集合, f および g を K から $\mathbb{R}_+$ への関数とし, $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ を仮定する. このとき, 以下は同値である.

(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, 以下が成り立つ.

$$u \in K,\, \epsilon \leq g(u) < \epsilon + \delta \Rightarrow f(u) < \epsilon.$$

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, 以下が成り立つ.

$$u \in K,\, g(u) < \epsilon + \delta \Rightarrow f(u) < \epsilon.$$

(3) 非減少関数 $\gamma \colon \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ が存在して, 以下が成り立つ.
   - 任意の $s > 0$ に対して $\gamma(s) > s$;
   - 任意の $u \in K$ に対して $\gamma\big(f(u)\big) \leq g(u)$.

(4) $(0,\infty)$ 上で右下半連続な関数 $w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在して, 以下が成り立つ.
   - 任意の $s>0$ に対して $w(s)>s$;
   - 任意の $u\in K$ に対して $w\bigl(f(u)\bigr)\le g(u)$.

(5) (L) 型関数 $l\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ が存在して, 以下が成り立つ.

$$u\in K,\, g(u)\neq 0 \Rightarrow f(u) < l\bigl(g(u)\bigr).$$

(6) 非減少関数 $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ および $(0,\infty)$ 上で右上半連続な関数 $\psi\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ が存在して, 以下が成り立つ.
   - 任意の $t>0$ に対して $\phi(t)>\psi(t)$;
   - 任意の $u\in K$ に対して $\phi\bigl(f(u)\bigr)\le\psi\bigl(g(u)\bigr)$.

さらに, (5) の l は非減少かつ右連続で, 任意の $s>0$ に対して $l(s)>0$ を満たすように選ぶことができる.

文献 [1] が出版された後, [1, Lemma 6] の証明 — 定理 3.2 の (3) ならば (4) の証明 — に修正すべき点を発見したので, 以下に修正したものを記載する.

補助定理 3.3 ([1, Lemma 6] の修正版)**.** 定理 3.2 の条件 (3) のもとで, 定理 3.2 の条件 (4) が成り立つ.

証明. [6, Theorem 1] の証明を参考にする. まず, $A=\{t\in\mathbb{R}_+\colon \gamma(t)=\infty\}$ とおく. $A=\emptyset$ のときは, $w=\gamma$ とすればよいので, $A\neq\emptyset$ としてよい. $t_0=\inf A$ とおき, $\gamma(t_0)<\infty$ と $\gamma(t_0)=\infty$ の二つの場合に分けて考える.

$\gamma(t_0)<\infty$ のとき, 関数 $w_1\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ を次式で定義する*3.

$$w_1(t)=\begin{cases}\gamma(t) & t\in[0,t_0] \text{ のとき;}\\ \gamma(t_0)+2(t-t_0) & \text{上記以外のとき.}\end{cases}$$

このとき, 任意の $s>0$ に対して $w_1(s)>s$ である. 実際, $0<s\le t_0$ のとき, γ の性質より $w_1(s)=\gamma(s)>s$. $0<t_0<s$ のとき, $\gamma(t_0)>t_0$ だから

$$w_1(s)=\gamma(t_0)+2(s-t_0)=\bigl(\gamma(t_0)-t_0\bigr)+(s-t_0)+s>s.$$

$0=t_0<s$ のとき

$$w_1(s)=\gamma(t_0)+2(s-t_0)=\gamma(t_0)+2s\ge 2s>s.$$

*3 [1, Lemma 6] の証明では, $t>t_0$ のとき $w_1(t)=\gamma(t_0)+t-t_0$ と定義している. そうすると, $s>t_0$, $\gamma(t_0)=t_0=0$ のとき, $w_1(s)=s$ となってしまう.

定義より, w_1 は非減少関数だから, w_1 は $(0,\infty)$ で右下半連続である. さらに, $u \in K$ のとき, $f(u) \le t_0$ であるから (そうでないとすると, $\infty = \gamma\bigl(f(u)\bigr) \le g(u) < \infty$ となり矛盾が生じる), したがって, 任意の $u \in K$ に対して $w_1\bigl(f(u)\bigr) = \gamma\bigl(f(u)\bigr) \le g(u)$ となる.

$\gamma(t_0) = \infty$ のとき, 関数 $w_2 \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を次式で定義する.

$$w_2(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t \in [0,t_0) \text{ のとき}, \\ 2t & \text{上記以外のとき}. \end{cases}$$

このとき, 任意の $s > 0$ に対して $w_2(s) > s$ となることは容易に確認できる. w_2 は $(0,t_0)$ で非減少で, $[t_0,\infty)$ で連続だから, $(0,\infty)$ で右下半連続である. さらに, $u \in K$ のとき, $f(u) < t_0$ であるから (そうでないとすると, $\infty = \gamma\bigl(f(u)\bigr) \le g(u) < \infty$ となり矛盾が生じる), したがって, 任意の $u \in K$ に対して $w_2\bigl(f(u)\bigr) = \gamma\bigl(f(u)\bigr) \le g(u)$ となる. $\square$

次の例から, 定理 3.2 において, 仮定 $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ がないと, (1) $\Rightarrow$ (2) が成り立たないことがわかる.

例 3.4 ([1, Example 1]). $K = \{x\}$ とし, 関数 $f \colon K \to \mathbb{R}_+$ および $g \colon K \to \mathbb{R}_+$ を, $f(x) = 1$, $g(x) = 0$ で定義する. このとき, 定理 3.2 の (1) は成り立つが, (2) は成り立たない.

次の例から, 定理 3.2 において, 仮定 $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ がないと, (6) $\Rightarrow$ (2) が成り立たないことがわかる.

例 3.5 ([1, Remark 3]). K, f および g を例 3.4 と同じとし, 関数 $\phi \colon \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ および $\psi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ をそれぞれ, $\phi(t) \equiv 1/2$,

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & (t = 0); \\ 1/4 & (t \neq 0) \end{cases}$$

で定義する. このとき, ϕ は非減少, ψ は $(0,\infty)$ で右上半連続, すべての $t > 0$ に対して $\phi(t) > \psi(t)$ であり, 任意の $u \in K$ に対して $\phi\bigl(f(u)\bigr) \le \bigl(g(u)\bigr)$ である. つまり, 定理 3.2 の (6) は成り立つが, (2) は成り立たない.

4 Meir-Keeler 型写像の不動点定理

ここでは, 推移関係をもつ完備距離空間上での Meir-Keeler 型写像の不動点定理とそれに関連する結果を述べる.

定理 4.1 ([1, Theorem 3])**.** (X,d) を完備距離空間, T を X から X への写像, R を空でない $X \times X$ の部分集合とし, 以下を仮定する.

(1) $(u,v) \in R$, $(v,w) \in R$ ならば $(u,w) \in R$;

(2) $(x,Tx) \in R$ となる $x \in X$ が存在する;

(3) すべての $(u,v) \in R$ に対して $(Tu,Tv) \in R$;

(4) T は R 上で Meir-Kleer 型である;

(5) $\{x_n\}$ が X の点列で, $x_n \to y$, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(x_n, x_{n+1}) \in R$ ならば, $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在して, $\lim_k Tx_{n_k} = Ty$.

このとき, T の不動点が存在し, $\{T^n x\}$ は T の不動点に収束する. さらに, 以下を仮定する.

(6) 任意の $y \in X$ に対して $(x,y) \in R$;

(7) R は $X \times X$ の閉集合である.

このとき, T の不動点は一意である.

定理 4.1 より次の系が得られる.

系 4.2 (Nieto & Rodríguez-López [8, Theorem 2.2])**.** (X,d) を完備距離空間, T を X から X への写像, $\preceq$ を X における順序とし, 以下を仮定する.

(NR1) $x \preceq Tx$ となる $x \in X$ が存在する;

(NR2) $u, v \in X$, $u \preceq v \Rightarrow Tu \preceq Tv$;

(NR3) $\theta \in [0,1)$ が存在して, $u \preceq v$ となる任意の $u, v \in X$ に対して $d(Tu,Tv) \leq \theta d(u,v)$;

(NR4) $\{x_n\}$ が X の点列で, $x_n \to y$ かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \preceq x_{n+1}$ ならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \preceq y$ である.

このとき, T は不動点をもつ.

証明. $R = \{(u,v) \in X \times X \colon u \preceq v\}$ とおく. 仮定 (NR1) より $(x,Tx) \in R$ だから, R は空でない $X \times X$ の部分集合であり, 定理 4.1 の (2) が満たされることがわかる. 定理 4.1 の (1) が成り立つことは容易にわかる. 定理 4.1 の (3) および (4) は, それぞれ (NR2) および (NR3) から従う. 以下, 定理 4.1 の (5) が成り立つことを示す. X を $\{x_n\}$ の点列で, $x_n \to y$ であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(x_n, x_{n+1}) \in R$ とする. 仮定 (NR3) および (NR4) より, $n \to \infty$ のとき

$$d(Tx_n, Ty) \leq \theta d(x_n, y) \to 0$$

だから, $Tx_n \to Ty$ である. したがって, 定理 4.1 より結論が得られる. □

定理 4.1 を使うと, [10, Theorem 1.2] と似た次の不動点定理も得られる. これらの違いは, 定理の後の表を参照されたい.

定理 4.3 ([1, Theorem 4])**.** (Y, d) を完備距離空間, $\preceq$ を Y における順序, X を Y の空でない閉集合, T を X から X への写像とし, 以下を仮定する.

(RZ0) $\{(u, v) \in Y \times Y : u \preceq v\}$ は $Y \times Y$ の閉集合である;
(RZ1) T のグラフは $Y \times Y$ の閉集合である;
(RZ2) $u, v \in X$, $u \preceq v \Rightarrow Tu \preceq Tv$;
(RZ3) 以下の条件を満たす右上半連続な関数 $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在する.

- 任意の $t > 0$ に対して $t > \psi(t)$,
- $u, v \in X$, $u \preceq v \Rightarrow d(Tu, Tv) \leq \psi\big(d(u, v)\big)$.

(RZ4) $x \in X$ が存在して, 任意の $y \in X$ に対して $x \preceq y$.

このとき, $\{T^n x\}$ は T の唯一の不動点に収束する.

定理 4.3 と [10, Theorem 1.2] の仮定の主な違いは次の通りである.

	定理 4.3	[10, Theorem 1.2]
X	空でない	1 点集合ではない
T	X から X への写像	X から Y への写像, $T^i x \in X$ $(\forall i \in \mathbb{N})$
ψ	右上半連続	上半連続

参考文献

[1] K. Aoyama and M. Toyoda, *Fixed point theorem for a Meir-Keeler type mapping in a metric space with a transitive relation*, Transylv. J. Math. Mech. **14** (2022), 1–9.

[2] N. Aronszajn and P. Panitchpakdi, *Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces*, Pacific J. Math. **6** (1956), 405–439.

[3] ———, *Correction to: "Extension of uniformly continuous transformations in hyperconvex metric spaces"*, Pacific J. Math. **7** (1957), 1729.

[4] H. Ben-El-Mechaiekh, *The Ran-Reurings fixed point theorem without partial order: a simple proof*, J. Fixed Point Theory Appl. **16** (2014), 373–383.

[5] L. Găvruţa, P. Găvruţa, and F. Khojasteh, *Two classes of meir-keeler contractions*, arXiv preprint arXiv:1405.5034 (2014).

[6] T.-C. Lim, *On characterizations of Meir-Keeler contractive maps*, Nonlinear Anal. **46** (2001), 113–120.

[7] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contraction mappings*, J. Math. Anal. Appl. **28** (1969), 326–329.

[8] J. J. Nieto and R. Rodríguez-López, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order **22** (2005), 223–239 (2006).

[9] A. C. M. Ran and M. C. B. Reurings, *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 1435–1443.

[10] S Reich and A. Zaslavski, *Monotone contractive mappings*, J. Nonlinear Var. Anal **1** (2017), 391–401.

[11] C. S. Wong, *Characterizations of certain maps of contractive type*, Pacific J. Math. **68** (1977), 293–296.