Classification of nonlinear projections in a Banach space

岩手大学　本田　卓
Takashi Honda
Faculty of Education, Iwate University, Japan
E-mail address: thonda7@iwate-u.ac.jp

概　要　Hilbert 空間において, 閉凸集合の上への距離射影は常に定義でき, 非常に良い性質をみたすことが知られている. しかし, Bnach 空間では, 距離射影はあまりよい性質を持たず, それらの性質は, Alber [2, 3], 茨城-高橋 [10, 12] らの発見した様々な射影に分散されているように見える. [4] などでも試みられていることではあるが, 今回, これらの性質について知られている結果をまとめ整理してみることにする.

1　はじめに

本論文では, 基本的に実 Hilbert 空間, 実 Banach 空間を扱う. また, バナッハ空間においては, 特に断りがなければ, 滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間とする. 最初に Hilbert 空間における距離射影について述べていく. 距離射影の概念自体は古くから知られていたが, 後に述べる射影やレトラクションと関係する非常に重要な性質をもっている.

Definition 1.1 ([7, 14]). *H を Hilbert 空間, $C \subset H$ を H の空でない閉凸集合とする. H の任意の元 $x \in H$ に対して, $\|x - x_0\| = d(x, C)$ となる $x_0 \in C$ が一意に定まる（この様な性質を持つ集合 C を* **Chebyshev 集合**という）. このような, H から C の上への写像 $P_C x = x_0$ を**距離射影 (metric projection)** という.

Theorem 1.1 ([7, 14]). *H を実 Hilbert 空間, $C \subset H$ を空ではない閉凸部分集合とする. 距離射影 $P_C : H \to C$ は以下の性質を満たす.*

1. *P_C は冪等（idempotent）である. つまり,*

$$P_C^2 = P_C.$$

また, C の要素はすべて P_C の不動点である. つまり,

$$P_C x = x \quad (\forall x \in C).$$

2. *P_C は firmly 非拡大である. つまり, 任意の $x, y \in H$ において,*

$$\langle P_C x - P_C y, x - y \rangle \geq \|Px - Py\|^2$$

が成り立つ.

3. *P_C は 単調である. つまり, 任意の $x, y \in H$ において,*

$$\langle P_C x - P_C y, x - y \rangle \geq 0$$

が成り立つ.

4. 任意の $x \in H$ において, $z_0 \in C$ が
$$z_0 = P_C x$$
を満たすための必要十分条件は, 不等式
$$\langle x - z_0, z_0 - z \rangle \geq 0 \quad (\forall z \in C)$$
を満たすことである.
5. P_C は非拡大である. つまり, 任意の $x, y \in H$ において,
$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\|.$$
6. P_C はサニーである. つまり, 等式
$$P_C\left(P_C x + t(x - P_C x)\right) = P_C x \quad (\forall x \in H,\ \forall t \geq 0)$$
が成り立つ.

ただし, Banach 空間になると, 距離射影がこれらの性質をみたさなくなる.

2 Banach 空間での距離射影 P

Theorem 2.1. 実ノルム空間 E が, 狭義凸で回帰的であるとする. E のすべての非空閉凸部分集合は *Chebyshev* 集合である.

Proof. G を E の空ではない閉凸部分集合とする. $x_0 \in E \setminus C$ に対し,
$$d(x_0, C) = \inf_{g \in C} \|x_0 - g\|$$
と定義すると, 下限の定義より, 任意の自然数 n に対し
$$d(x_0, C) \leq \|x_0 - g_n\| < d(x_0, C) + \frac{1}{n}$$
を満たす $g_n \in C$ が存在する. このとき,
$$\lim_{n \to \infty} \|x_0 - g_n\| = d(x_0, C)$$
が成り立つ. 点列 $\{g_n\}$ は有界なので, E が回帰的であることより, ある $g_0 \in E$ に弱収束する部分列 $\{g_{n_i}\} \subset \{g_n\}$ が存在する. C は弱閉集合でもあるので, $g_0 \in C$ が言える. また, ノルムの弱下半連続性より,
$$d(x_0, C) = \lim_{n \to \infty} \|x_0 - g_n\| = \lim_{i \to \infty} \|x_0 - g_{n_i}\| = \liminf_{i \to \infty} \|x_0 - g_{n_i}\| \geq \|x_0 - g_0\| \geq d(x_0, C)$$
が成り立ち,
$$\|x_0 - g_0\| = d(x_0, C)$$

が得られる. また, もし, $g_0, g_1 \in C$, $g_0 \neq g_1$ において,

$$\|x_0 - g_1\| = \|x_0 - g_0\| = d(x_0, C)$$

が成り立つとすると, E が狭義凸であることより,

$$\left\| \frac{(x_0 - g_1) + (x_0 - g_0)}{2} \right\| = \left\| x_0 - \frac{g_1 + g_0}{2} \right\| < \|x_0 - g_1\| = \|x_0 - g_0\| = d(x_0, C)$$

が得られる. C は凸なので $\frac{g_1+g_0}{2} \in C$ が言えるが, これは $\|x_0 - g_1\| = \|x_0 - g_0\| = d(x_0, C)$ に矛盾する. 従ってこのような $g \in C$ は一意に存在する. $\square$

Theorem 2.2 ([14])**.** E を滑らかなバナッハ空間, $C \subset E$ を空ではない凸部分集合とする. $x \in E$ において, $z_0 \in C$ が

$$\|x - z_0\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

を満たすための必要十分条件は, 不等式

$$\langle z_0 - z, J(x - z_0) \rangle \geq 0 \quad (\forall z \in C)$$

を満たすことである.

ここで, J は正規化双対写像 (normalized duality mapping) で,

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義される共役空間 E^* に値を持つ集合値写像とする. どんな Bnach 空間 E でも一般にすべての要素 $x \in E$ で定義できる. さらに, E が滑らかな Banach 空間の場合はノルム位相から weak*位相に関して連続な一価写像である. また, $x, y \in E$ と $f \in J(x)$, $g \in J(y)$ において,

$$\langle x - y, f - g \rangle \geq 0$$

が成立する. その他詳細は [6, 15] を参照.

Corollary 2.1. E を狭義凸, 滑らか, 回帰的なバナッハ空間とする. C を E の空ではない閉凸部分集合とし , x を C に含まれない E の要素とする. このとき,

$$\|x - P_C x\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

満たす要素 $P_C x \in C$ が唯一つ存在し, $z_0 \in C$ が $z_0 = P_C x$ であるための必要十分条件は,

$$\langle z_0 - z, J(x - z_0) \rangle \geq 0 \quad (\forall z \in C)$$

を満たすことである.

Banach 空間での距離射影については, [13] も参照.

3　一般化射影 Π

ここでは 1996 年に Alber によって導入された, 一般化射影の概念について述べる.

Definition 3.1 ([1])**.** *E を滑らかな Banach 空間とする. J は一価写像なので, 汎関数 $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ を*

$$\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$$

と定義する. E を狭義凸かつ滑らかなバナッハ空間とする. $x, y \in E$ において, $\phi(x,y) = 0$ が成り立つための必要十分条件は $x = y$ である.

Definition 3.2 ([1])**.** *E を狭義凸, 滑らか, 回帰的な Banach 空間, $C \subset E$ を空でない閉凸部分集合とする. 写像 $\Pi_C : E \to C$*

$$\phi(\Pi_C x, x) = \inf_{z \in C} \phi(z, x)$$

を一般化射影と呼ぶ. 任意の閉凸部分集合 $C \subset E$ において, $\Pi_C : E \to C$ は常に一意に定義される.

Lemma 3.1 ([1, 11])**.** *E を滑らかな Banach 空間, $C \subset E$ を空でない閉凸部分集合とする. 任意の $x \in E$ において, $z_0 \in C$ が $z_0 = \Pi_C x$ であるための必要十分条件は,*

$$\langle z_0 - z, Jx - Jz_0\rangle \geq 0 \quad (\forall z \in C)$$

を満たすことである.

Theorem 3.1. *E を狭義凸, 滑らか, 回帰的な Banach 空間, $C \subset E$ を空でない閉凸部分集合とする. 一般化射影 $\Pi_C : E \to C$ は以下の性質を満たす.*

1. *Π_C は冪等（idempotent）である. つまり,*

   $$\Pi_C^2 = \Pi_C.$$

   また, C の要素はすべて Π_C の不動点である. つまり,

   $$\Pi_C x = x \quad (\forall x \in C).$$

2. *Π_C は d-accretive である. つまり, 任意の $x, y \in E$ において,*

   $$\langle \Pi_C x - \Pi_C y, Jx - Jy\rangle \geq 0$$

   が成り立つ.

3. *任意の $x \in E$ において, $z_0 \in C$ が*

   $$z_0 = \Pi_C x$$

   を満たすための必要十分条件は, 不等式

   $$\langle z_0 - z, Jx - Jz_0\rangle \geq 0 \quad (\forall z \in C)$$

   を満たすことである.

4. 任意の $x \in E$ において, 不等式

$$\phi(z, \Pi_C x) + \phi(\Pi_C x, x) \leq \phi(z, x) \quad (\forall z \in C)$$

が成り立つ.

5. 任意の $x \in E$ において, 不等式

$$\phi(z, \Pi_C x) \leq \phi(z, x) \quad (\forall z \in C)$$

が成り立つ.

6.

$$\langle \Pi_C x - z, Jx - Jz \rangle \geq 0 \quad (\forall z \in C).$$

7.

$$\langle x - z, Jx - J\Pi_C x \rangle \geq 0 \quad (\forall z \in C).$$

Proof. 1. 任意の $x \in C$ において, $\Pi_C x = x$ が成り立つ. 実際, このとき $\phi(x,x) = 0$ なので, $\phi(x,x) = \inf_{z \in C} \phi(x,z)$ が成り立つ. また, このときのみ $\phi(x,\cdot)$ は 0 になるので, $\Pi_C x = x$ が言える.

Π_C は E から C の上への写像なので, 任意の $x \in E$ において, $\Pi_C x$ は Π_C の不動点. 従って, $\Pi_C(\Pi_C x) = \Pi_C x$ が成り立つ.

2. Π_C の定義より, $x, y \in E$ において,

$$\begin{aligned} \phi(\Pi_C x, x) &\leq \phi(\xi, x) \quad (\forall \xi \in C) \\ \phi(\Pi_C y, y) &\leq \phi(\eta, y) \quad (\forall \eta \in C) \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\phi(\Pi_C x, x) \leq \phi(\Pi_C y, x), \ \phi(\Pi_C y, y) \leq \phi(\Pi_C x, y)$$

が得られる. つまり,

$$\begin{aligned} &\|\Pi_C x\|^2 - 2\langle \Pi_C x, Jx \rangle + \|x\|^2 + \|\Pi_C y\|^2 - 2\langle \Pi_C y, Jy \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|\Pi_C y\|^2 - 2\langle \Pi_C y, Jx \rangle + \|x\|^2 + \|\Pi_C x\|^2 - 2\langle \Pi_C x, Jy \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

が得られるが, これより不等式

$$\langle \Pi_C x, Jx \rangle + \langle \Pi_C y, Jy \rangle \geq \langle \Pi_C y, Jx \rangle + \langle \Pi_C x, Jy \rangle$$

つまり

$$\langle \Pi_C x - \Pi_C y, Jx - Jy \rangle \geq 0$$

が成り立つ.

3. Lemma 3.1 より導かれる.

4. 任意の $x \in E$, $z \in C$ において,

$$\begin{aligned}
&\phi(z,x) - \phi(z,\Pi_C x) - \phi(\Pi_C x, x) \\
&= \|z\|^2 - 2\langle z, Jx\rangle + \|x\|^2 - \|z\|^2 + 2\langle z, J\Pi_C x\rangle - \|\Pi_C x\|^2 \\
&\quad - \|\Pi_C x\|^2 + \langle \Pi_C x, Jx\rangle - \|x\|^2 \\
&= -2\langle z, Jx\rangle + 2\langle z, J\Pi_C x\rangle + \langle \Pi_C x, Jx\rangle - 2\|\Pi_C x\|^2 \\
&= 2\langle \Pi_C x - z, Jx\rangle + 2\langle z - \Pi_C x, J\Pi_C x\rangle \\
&= 2\langle \Pi_C x - z, Jx - J\Pi_C x\rangle
\end{aligned}$$

が言えるが, 3. より $\langle \Pi_C x - z, Jx - J\Pi_C x\rangle \geq 0$ なので,

$$\phi(z,\Pi_C x) + \phi(\Pi_C x, x) \leq \phi(z,x) \quad (\forall z \in C)$$

が成り立つ.

5. 4. より自明.

□

4　サニー一般化非拡大レトラクション R

ここでは, 茨城-高橋によって導入されたサニー一般化非拡大射影の概念について述べる.

Definition 4.1 ([10, 12])**.** E を狭義凸, 滑らか, 回帰的な *Banach* 空間, $C^* \subset E^*$ を空でない閉凸部分集合とする. 写像 $R_{C^*} : E \to J^{-1}C^*$

$$\phi(x, R_{C^*}x) = \inf_{Jz \in C^*} \phi(x,z)$$

をサニー一般化非拡大レトラクションと呼ぶ. 任意の閉凸部分集合 $C^* \subset E^*$ において, J はノルム位相から *weak**位相に関して連続なので, $J^{-1}C^* \subset E$ は閉集合で, $R_{C^*} : E \to J^{-1}C^*$ は常に一意に定義される.

Lemma 4.1 ([10])**.** E を狭義凸, 滑らか, 回帰的な *Banach* 空間, $C \subset E$ を空でない閉部分集合とする. $R : E \to C$ を E の C の上へのサニー一般化非拡大レトラクションとしたとき, 任意の $x \in E$ において, $z_0 \in C$ が $z_0 = Rx$ であるための必要十分条件は,

$$\langle x - z_0, Jz_0 - Jz\rangle \geq 0 \quad (\forall z \in C)$$

を満たすことである.

Theorem 4.1. E を狭義凸, 滑らか, 回帰的な *Banach* 空間, $C^* \subset E^*$ を空でない閉凸部分集合とする. サニー一般化非拡大レトラクション $R_{C^*} : E \to J^{-1}C^*$ は以下の性質を満たす.

1. R_{C^*} は冪等（*idempotent*）である. つまり,

$$R_{C^*}^2 = R_{C^*}.$$

また, $J^{-1}C^*$ の要素はすべて R_{C^*} の不動点である. つまり,

$$R_{C^*}x = x \quad (\forall x \in J^{-1}C^*).$$

2. $JR_{C^*} : E \to C^*$ は単調である. つまり, 任意の $x, y \in E$ において,

$$\langle x - y, JR_{C^*}x - JR_{C^*}y \rangle \geq 0$$

が成り立つ.

3. 任意の $x \in E$ において, $z_0 \in J^{-1}C^*$ が

$$z_0 = R_{C^*}x$$

を満たすための必要十分条件は, 不等式

$$\langle x - z_0, Jz_0 - Jz \rangle \geq 0 \quad (\forall z \in J^{-1}C^*)$$

を満たすことである.

4. 任意の $x \in E$ において, 不等式

$$\phi(R_{C^*}x, z) + \phi(x, R_{C^*}x) \leq \phi(x, z) \quad (\forall z \in J^{-1}C^*)$$

が成り立つ.

5. 任意の $x \in E$ において, 不等式

$$\phi(R_{C^*}x, z) \leq \phi(x, z) \quad (\forall z \in J^{-1}C^*)$$

が成り立つ.

6. R_{C^*} はサニーである. つまり, 等式

$$R_{C^*}\left(R_{C^*}x + t(x - R_{C^*}x)\right) = R_{C^*}x \quad (\forall x \in E,\ \forall t \geq 0)$$

が成り立つ.

Proof. 1. Theorem 3.1 と同様に求められる.

2. R_{C^*} の定義より, $x, y \in E$ において,

$$\begin{aligned} \phi(x, R_{C^*}x) &\leq \phi(x, \xi) \quad (\forall \xi \in J^{-1}C^*) \\ \phi(y, R_{C^*}y) &\leq \phi(y, \eta) \quad (\forall \eta \in J^{-1}C^*) \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\phi(x, R_{C^*}x) \leq \phi(x, R_{C^*}y),\ \phi(y, R_{C^*}y) \leq \phi(y, R_{C^*}x)$$

が得られる. つまり,

$$\begin{aligned} &\|x\|^2 - 2\langle x, JR_{C^*}x \rangle + \|R_{C^*}x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle y, JR_{C^*}y \rangle + \|R_{C^*}y\|^2 \\ \leq\ &\|x\|^2 - 2\langle x, JR_{C^*}y \rangle + \|R_{C^*}y\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle y, JR_{C^*}x \rangle + \|R_{C^*}x\|^2 \end{aligned}$$

が得られるが, これより不等式

$$\langle x, JR_{C^*}x\rangle + \langle y, JR_{C^*}y\rangle \geq \langle x, JR_{C^*}y\rangle + \langle y, JR_{C^*}x\rangle$$

つまり

$$\langle x-y, JR_{C^*}x - JR_{C^*}y\rangle \geq 0$$

が成り立つ.

3. Lemma 4.1 より導かれる.
4. 4. より自明.
5. 任意の $x \in E$, $t > 0$ において, $x_t = R_{C^*}x + t(x - R_{C^*}x)$ とすると, 3. より

$$\langle x_t - R_{C^*}x_t, JR_{C^*}x_t - JR_{C^*}x\rangle \geq 0, \tag{4.1}$$
$$\langle x - R_{C^*}x, JR_{C^*}x - JR_{C^*}x_t\rangle \geq 0 \tag{4.2}$$

が成り立つ. $x_t - R_{C^*}x = t(x - R_{C^*}x)$ と (4.2) より,

$$\langle x_t - R_{C^*}x, JR_{C^*}x - JR_{C^*}x_t\rangle = t\langle x - R_{C^*}x, JR_{C^*}x - JR_{C^*}x_t\rangle \geq 0$$

が成り立つ. これと, (4.1) より, 不等式

$$\langle R_{C^*}x_t - R_{C^*}x, JR_{C^*}x_t - JR_{C^*}x\rangle \leq 0$$

を得るが, J の性質より

$$\langle R_{C^*}x_t - R_{C^*}x, JR_{C^*}x_t - JR_{C^*}x\rangle = 0$$

が導かれる. よって, J の性質より, $R_{C^*}x_t = R_{C^*}x$ が得られる.

□

5 サニー非拡大レトラクション Q

サニー非拡大レトラクションについては次の結果が有名である.

Theorem 5.1 ([5]). *E を滑らかな Banach 空間, C を E の空ではない部分集合とする. E の C の上へのレトラクション $Q : E \to C$ が存在するとき, 以下は同値である.*

(a) Q はサニー非拡大レトラクションである. つまり, 任意の $x, y \in E$ において

$$\|Qx - Qy\| \leq \|x - y\|,$$

かつ

$$Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx \quad (\forall t \geq 0).$$

(b) Q は *firmly* 非拡大レトラクションである. つまり, 任意の $x, y \in E$ において

$$\|Qx - Qy\|^2 \leq \langle x - y, J(Qx - Qy)\rangle.$$

(c) Q は不等式

$$\langle x - Qx, J(Qx - z)\rangle \geq 0 \quad (\forall x \in E,\ \forall z \in C)$$

を満たす.

さらに, この条件を満たすレトラクション Q は存在しても高々一つである.

しかし, サニー非拡大レトラクションに関しては, E のレトラクトであるための必要十分条件はまだ得られていないし, レトラクトに関する情報も非常に少ない. ただ, E が狭義凸の場合, レトラクトは非拡大写像の不動点集合なので, 閉凸集合になることは分かる.

6　結論

これらの射影及びレトラクションの各性質をまとめると以下のようになる.

距離射影 $\langle J(x-Px), Px-z\rangle \geq 0 \quad (\forall x \in E,\ \forall z \in C)$ $\|x-Px\| = \inf_{z\in C}\|x-z\|$ C は閉凸集合	**サニー一般化非拡大レトラクション** $\langle x-Rx, JRx-Jz\rangle \geq 0 \quad (\forall x \in E,\ \forall z \in C)$ $\phi(x,Rx) = \inf_{z\in C}\phi(x,z)$ JC は閉凸集合 JR は 単調 $\langle JRx-JRy, x-y\rangle \geq 0$ $\phi(Rx,z) \leq \phi(x,z) \quad (\forall z \in C)$ サニー
一般化射影 $\langle Jx-J\Pi x, \Pi x-z\rangle \geq 0 \quad (\forall x \in E,\ \forall z \in C)$ $\phi(\Pi x, x) = \inf_{z\in C}\phi(z,x)$ C は閉凸集合 Π は d-accretive $\langle \Pi x-\Pi y, Jx-Jy\rangle \geq 0$ $\phi(z,\Pi x) \leq \phi(z,x) \quad (\forall z \in C)$	**サニー非拡大レトラクション** $\langle x-Qx, J(Qx-z)\rangle \geq 0 \quad (\forall x \in E,\ \forall z \in C)$ Q は firmly 非拡大 $\langle J(Qx-Qy), x-y\rangle \geq 0$ $\|Qx-z\| \leq \|x-z\| \quad (\forall z \in C)$ サニー

筆者は, 故高橋名誉教授との共同研究で, レトラクトにある種の仮定を加えると, 表の右側が一致すること示したが [8, 9], この様に眺めると, 左右に違いがあるようにも見える. 左側に関しても何か共通点を見いだすことを考えていきたい.

Acknowledgment

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] Ya. I. Alber, *Generalized Projections, Decompositions, and the Pythagorean-Type Theorem in Banach Spaces*, Appl. Math. Lett. **11** (1998), 115–121.

[3] Ya. I. Alber, *James orthogonality and orthogonal decompositions of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **312** (2005), 330–342.

[4] K. Aoyama, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuous properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[5] R. E. Bruck, *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341 – -355.

[6] I. Cioranescu *Geometry of Banach spaces, duality mappings, and nonlinear problems*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[7] F. Deutsch, *Best Approximation in Inner Product Spaces*, Springer Science & Business Media, 2001.

[8] T. Honda and W. Takahashi, *Norm One Projections and Generalized Conditional Expectations*, Sci. Math. Jpn. **69** (2009), 303–313.

[9] T. Honda and W. Takahashi, *Nonlinear projections and generalized conditional expectations in Banach spaces*, Taiwanese J. Math., **15** (2011), 2169–2193.

[10] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[11] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[13] I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

[14] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[15] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points* (in Japanese), Yokohama Publishers, 2000.