集合最適化問題における完備束アプローチについて

On the complete lattice approach in set optimization problem

秋田県立大学　システム科学技術学部　経営システム工学科
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University
荒谷　洋輔 (Araya, Yousuke) *

1　はじめに

多目的最適化問題の拡張である集合最適化問題は、1997 年に黒岩-田中-Ha[14] によって提唱された。この問題は、集合値写像の像空間の元（集合）における大小の比較について 6 種類の順序を導入し、その順序による最適化問題を考えるというものである。近年では、**集合最適化問題が「多目的のロバスト最適化問題」に変換できることの発見 [9] などの重要な成果がある。**

本稿では、ある関係式を満たす集合族での集合最適化問題を考える。従来の lower 型・upper 型の集合関係に完備束 (complete lattice) の構造が追加された完備束最適化問題を定式化する。集合最適化問題に代数構造・順序構造が加わることにより全く新しい展開が期待される。尚、所々に筆者の感想と今後への展望がある。

2　準備

2.1　ベクトル最適化からの準備

本稿では Y を線形位相空間、$\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。集合 $A \subset Y$ に対し、A の位相的内部、位相的閉包をそれぞれ $\mathrm{int}A$、$\mathrm{cl}A$ と表す。また、この論文で、$C \subset Y$ は閉凸錐を表すものとする。つまり、以下の条件を満たす。

(a) $\mathrm{cl}C = C$、
(b) $C + C \subseteq C$、
(c) $\lambda C \subseteq C \ \forall \lambda \in [0, \infty)$。

尚、錐 $C \subset Y$ が solid とは $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed であるとは $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Y\}$ が成立する場合である。凸錐 $C \subset Y$ によって以下のようなベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Y, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_C y_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} y_2 - y_1 \in C$$

もし、C が pointed ならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。逆に一般の（実）順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる [18]。

*(*E-mail:* **y-araya@akita-pu.ac.jp**)

2.2　集合最適化からの準備

$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合全体とする。$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$、$\alpha \in \mathbb{R}$、$V \in \mathcal{V}$ に対して、２つの集合の和・スカラー積は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \qquad \alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

定義 2.1 (集合関係：黒岩-田中-Ha[14]). Y を線形位相空間、$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合の族とする。$A, B \in \mathcal{V}$ と、solid な閉凸錐 $C \subset Y$ に対して、以下の集合関係を定義する。

[**lower**]　$A \leq_C^l B$　by　$B \subset A + C$　　(**type 3**)

[**upper**]　$A \leq_C^u B$　by　$A \subset B - C$　　(**type 5**)

[**lower & upper**]　$A \leq_C^{l\&u} B$　by　$B \subset A + C$　and　$A \subset B - C$

注意 1. ベクトル順序と集合順序はさまざまな違いがある。ベクトル順序の場合、$x, y \in Y$ と $C \subset Y$ に対して

$$y - x \in C \ (x \leq_C y) \iff y \in x + C \iff x \in y - C$$

である。一方、集合順序の場合、$A, B \in \mathcal{V}$ と $C \subset Y$ に対して、上記の真ん中と右の順序に対応する $B \subset A + C$ ($A \leq_C^l B$) と $A \subset B - C$ ($A \leq_C^u B$) は一般に異なる（[2] を参照)。

例 1 ([11]). 集合の特別な場合として、「区間」を考える。

$$Y = \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \qquad A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2] \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

このとき、$\leq_C^l$、$\leq_C^u$ について次が分かる。

$$A \leq_C^l B \iff a_1 \leq b_1, \qquad A \leq_C^u B \iff a_2 \leq b_2$$

$$A \leq_C^{l\&u} B \iff a_1 \leq b_1 \quad \text{and} \quad a_2 \leq b_2$$

命題 2.2 ([2]). $A, B, D \in \mathcal{V}$、$\alpha \geq 0$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^{l[u]} B \implies A + D \leq_C^{l[u]} B + D$

(ii) $A \leq_C^{l[u]} B \implies \alpha A \leq_C^{l[u]} \alpha B$

(iii) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

(iv) $A \leq_C^u b \Longrightarrow A \leq_C^l b$

(v) $a \leq_C^l B \Longrightarrow a \leq_C^u B$

(vi) $A \leq_C^l B \ \textit{and}\ B \leq_C^l A \iff A + C = B + C$

(vii) $A \leq_C^u B \ \textit{and}\ B \leq_C^u A \iff A - C = B - C$

定義 2.3 (C-proper：Hernandez-Rodriguez-Marin[8]). $A \in \mathcal{V}$ が C-proper [$(-C)$-proper] であるとは、$A + C \neq Y$ [$A - C \neq Y$] が成り立つときである。また、$\mathcal{V}_C$ [$\mathcal{V}_{-C}$] を Y の C-proper [$(-C)$-proper] である部分集合の族とする。

定義 2.4 (Luc[17])**.** $A \in \mathcal{V}$ とする。

(i) A が C-closed $[(-C)$-closed$]$ であるとは、$A+C$ $[A-C]$ が閉集合であることと定義する。

(ii) A が C-有界 $\left[(-C)\text{-有界}\right]$ であるとは、それぞれの Y の近傍 U に対して、次を満たすような正の数 $t>0$ が存在するときである。

$$A \subset tU + C \quad [A \subset tU - C]$$

(iii) A が C-compact $\left[(-C)\text{-compact}\right]$ であるとは、以下の形をした A の任意の被覆

$$\{U_\alpha + C |\ U_\alpha \text{ are open}\} \qquad [\{U_\alpha - C |\ U_\alpha \text{ are open}\}]$$

が有限個の被覆で A を覆うことが出来るときである。

任意の C-compact 集合は、C-closed かつ C-有界である。

注意 2. ベクトル順序 $\leq_C$ と $\leq_{\mathrm{int}C}$ は明らかに異なる。しかし、集合における順序の場合について、$\leq_C^l$ と $\leq_{\mathrm{int}C}^l$ が同値になることもある。よって、$\leq_C^l$ と $\leq_{\mathrm{int}C}^l$ を区別したいとき、集合 A に C-closed の仮定が必要となる（[2] を参照)。

定義 2.5. $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ とする。$\mathcal{V}$ に次のような同値関係を導入する。

$$V_1 \sim_l V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^l V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^l V_1$$

$$V_1 \sim_u V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^u V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^u V_1$$

$$V_1 \sim_{l\&u} V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^{l\&u} V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^{l\&u} V_1$$

同値類の集合をそれぞれ $[\cdot]^l$、$[\cdot]^u$、$[\cdot]^{l\&u}$ と書く。同値関係の定義より次が分かる。

$$A \in [B]^l \Leftrightarrow A + C = B + C$$

$$A \in [B]^u \Leftrightarrow A - C = B - C$$

$$A \in [B]^{l\&u} \Leftrightarrow A + C = B + C \quad \text{and} \quad A - C = B - C$$

定義 2.6. $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ とする。$A \in \mathcal{S}$ が $l[u]$-minimal element であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$B \leq_C^{l[u]} A \quad \Longrightarrow \quad A \leq_C^{l[u]} B$$

が成り立つことである。$\mathcal{S}$ の $l[u]$-minimal element の族を $l[u]$-$\mathrm{Min}(\mathcal{S}; C)$ と書く。同様にして、$A \in \mathcal{S}$ が $l[u]$-maximal element であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$A \leq_C^{l[u]} B \quad \Longrightarrow \quad B \leq_C^{l[u]} A$$

が成り立つことである。$\mathcal{S}$ の maximal element の族を $l[u]$-$\mathrm{Max}(\mathcal{S}; C)$ と書く。

定義 2.7. $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ とする。$A \in \mathcal{S}$ が $l[u]$-weak minimal element であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$B \leq_{\mathrm{int}C}^{l[u]} A \quad \Longrightarrow \quad A \leq_{\mathrm{int}C}^{l[u]} B$$

が成り立つことである。$\mathcal{S}$ の $l[u]$-weak minimal element の族を $l[u]$-$\mathrm{wMin}(\mathcal{S}; \mathrm{int}C)$ と書く。同様にして、$A \in \mathcal{S}$ が $l[u]$-weak maximal element であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$A \leq_{\mathrm{int}C}^{l[u]} B \quad \Longrightarrow \quad B \leq_{\mathrm{int}C}^{l[u]} A$$

が成り立つことである。$\mathcal{S}$ の weak maximal element の族を $l[u]$-$\mathrm{wMax}(\mathcal{S}; \mathrm{int}C)$ と書く。

3　完備束最適化問題

この節では、完備束最適化問題について定式化する。まずは、束に関する定義・性質について、基本的で重要なものを振り返る。P を空でない順序集合、$x, y \in P$ とする。

- x **と** y **の結び**を、$\sup\{x, y\}$ の代わりとして $x \vee y$ と書く。
- x **と** y **の交わり**を、$\inf\{x, y\}$ の代わりとして $x \wedge y$ と書く。

同様に、$S \subseteq P$ に対して S の結びと S の交わりが存在するとき、$\sup S$ と $\inf S$ の代わりして、$\bigvee_P S$、$\bigwedge_P S$ と書く。

定義 3.1 (束、完備束 [5])**.** P を空でない順序集合とする。

(i) もし、任意の $x, y \in P$ に対して $x \vee y$ と $x \wedge y$ が存在するとき、P は束と呼ばれる。

(ii) もし、任意の $S \subseteq P$ に対して $\bigvee S$ と $\bigwedge S$ が存在するとき、P は完備束と呼ばれる。

命題 3.2 ([5])**.** L を束、$a, b \in L$ とする。このとき、次は同値である。

(i) $a \leq b$

(ii) $a \vee b = b$

(iii) $a \wedge b = a$

命題 3.3 ([5])**.** L を束とする。そのとき、任意の $a, b, c \in L$ について $\vee$ と $\wedge$ は次を満たす。

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$　(結合則)

(L1') $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

(L2) $a \vee b = b \vee a$　(交換則)

(L2') $a \wedge b = b \wedge a$

(L3) $a \vee a = a$　(冪等則)

(L3') $a \wedge a = a$

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a$　(吸収則)

(L4') $a \wedge (a \vee b) = a.$

3.1　解の概念と定式化

この節以降は、以下の集合族を考える。

$$\mathcal{P}(Y, C) := \{A \in 2^Y \,|A = A + C\}, \qquad \mathcal{P}(Y, -C) := \{A \in 2^Y \,|A = A - C\}$$

$$\mathcal{V}^l := \{A \in \mathcal{V} \,|A = A + C\}, \qquad \mathcal{V}^u := \{A \in \mathcal{V} \,|A = A - C\}$$

$$\mathrm{cl}(\mathcal{V})^l := \{A \in \mathcal{V} \,|A = \mathrm{cl}(A + C)\}, \qquad \mathrm{cl}(\mathcal{V})^u := \{A \in \mathcal{V} \,|A = \mathrm{cl}(A - C)\}$$

命題 2.2 (vi)、(vii) から、$(\mathcal{P}(Y, C), \supseteq)$, $(\mathcal{P}(Y, -C), \supseteq)$, は反射律・推移律に加えて反対称律も成り立つようになるため、それらは半順序集合となる。

命題 3.4 (Hamel et al.[7]). 集合族 $(\mathcal{P}(Y,C),\supseteq)$ は完備束となる。さらに、$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(Y,C)$ に対して、$\mathcal{A}$ の上限と下限は以下で与えられる。

$$\inf\mathcal{A}=\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A,\qquad \sup\mathcal{A}=\bigcap_{A\in\mathcal{A}}A$$

（$\mathcal{A}=\emptyset$ のときは $\inf\mathcal{A}=\emptyset$、$\sup\mathcal{A}=Y$ と定義される。）$\mathcal{P}(Y,C)$ の $\supseteq$ に関する最大元は $\emptyset$ であり、最小元は Y である。

命題 3.5 (Hamel et al.[7]). $A,B,D,E\in\mathcal{P}(Y,C)$、$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(Y,C)$、$s\geq 0$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A\supseteq B,\ D\supseteq E\implies A+D\supseteq B+E$

(ii) $A\supseteq B\implies sA\supseteq sB$

(iii) $\mathcal{A}+B=\{A+B\,|A\in\mathcal{V}\}$ と定義すると、以下が成り立つ。

$$\inf(\mathcal{A}+B)=(\inf\mathcal{A})+B\qquad\text{and}\qquad\sup(\mathcal{A}+B)\supseteq(\sup\mathcal{A})+B$$

定理 3.6 (Knaster-Tarski の不動点定理 [20]). L を完備束、$F:L\to L$ を順序を保存する写像とする。そのとき、

$$\alpha:=\bigvee\{x\in L\mid x\leq F(x)\}$$

は F の不動点である。さらには、α は F の最大の不動点である。また、F は最小の不動点も持ち、それは $\bigwedge\{x\in L\mid F(x)\leq x\}$ で表される。

（コメント）

Knaster-Tarski の不動点定理 [20] は約半世紀前に発表されたもので、不動点定理の中でも重要なものの一つである。この定理の応用は山のようにあるが、集合最適化問題の枠組みで解釈するという試みは筆者の知る限りない。命題 3.4 から、上記の不動点定理は集合族 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(Y,C)$ での $\inf\mathcal{A}$ と $\sup\mathcal{A}$ の存在性を保障しているようにも見える。詳細はこれからの研究課題である。

定義 3.7 (順序集合における閉作用素 [5]). P を順序集合とする。写像 $c:P\to P$ が P 上で閉作用素であるとは、任意の $x,y\in P$ に対して以下が成り立つときである。

(1) $x\leq c(x)$

(2) $x\leq y\Longrightarrow c(x)\leq c(y)$

(3) $c(c(x))=c(x)$

要素 $x\in P$ が閉であるとは、$c(x)=x$ のときである。P の閉である要素の集合は P_c と記述される。

（コメント）

順序集合での閉作用素に関する上記の性質を見ると分かるように、(1), (2), (3) は位相空間における閉集合の性質とよく似ている。その他、[5] には閉作用素の定義の他に束の連続性の定義もある。実際、[5] の著者は位相空間論の定義を参考にしたそうで、ガロア接続への応用を視野に入れているようである（[5] の P145 参照)。上記の定義は、集合最適化問題とガロア接続との架け橋になるのかも知れない。また、位相空間による連続性と順序空間における連続性の関係性については今後の研究課題である。

次に、完備束最適化問題の解の概念について考える。それは、定義 2.6、2.7 の変形である。

定義 3.8 (l-minimal, l-maximal, u-minimal, u-maximal)**.** $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{V})^l$、$\mathcal{B} \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{V})^u$ とする。$\bar{A} \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{A}$ の l-minimal [l-maximal] であるとは、以下を満たすときである。

$$A \in \mathcal{A}, \quad A \supseteq \bar{A} \quad \Longrightarrow \quad A = \bar{A} \qquad [A \in \mathcal{A}, \quad A \subseteq \bar{A} \quad \Longrightarrow \quad A = \bar{A}]$$

同様にして、$\bar{B} \in \mathcal{B}$ が $\mathcal{B}$ の u-minimal [u-maximal] であるとは、以下を満たすときである。

$$B \in \mathcal{B}, \quad B \subseteq \bar{B} \quad \Longrightarrow \quad B = \bar{B} \qquad [B \in \mathcal{B}, \quad B \supseteq \bar{B} \quad \Longrightarrow \quad B = \bar{B}]$$

$\mathcal{A}$ の l-minimal [l-maximal] である集合族を l-Min$\mathcal{A}$ [l-Max$\mathcal{A}$] と書き、$\mathcal{A}$ の u-minimal [u-maximal] である集合族を u-Min$\mathcal{B}$ [u-Max$\mathcal{B}$] と書く。

定義 3.9 (l-weak minimal, l-weak maximal, u-weak minimal, u-weak maximal)**.** $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}^l$、$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}^u$ とする。$\bar{A} \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{A}$ の l-weak minimal [l-weak maximal] であるとは、以下を満たすときである。

$$A \in \mathcal{A}, \quad \mathrm{int}A \supseteq \mathrm{int}\bar{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{int}A = \mathrm{int}\bar{A} \qquad [\mathrm{int}A \subseteq \mathrm{int}\bar{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{int}A = \mathrm{int}\bar{A}]$$

同様にして、$\bar{B} \in \mathcal{B}$ が $\mathcal{B}$ の u-weak minimal [u-weak maximal] であるとは、以下を満たすときである。

$$B \in \mathcal{B}, \quad \mathrm{int}B \subseteq \mathrm{int}\bar{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{int}B = \mathrm{int}\bar{B} \qquad [\mathrm{int}B \supseteq \mathrm{int}\bar{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{int}B = \mathrm{int}\bar{B}]$$

$\mathcal{A}$ の l-weak minimal [l-weak maximal] である集合族を l-wMin$\mathcal{A}$ [l-wMax$\mathcal{A}$] と書き、$\mathcal{A}$ の u-weak minimal [u-weak maximal] である集合族を u-wMin$\mathcal{B}$ [u-wMax$\mathcal{B}$] と書く。

注意 3. 定義 3.8 の定義式に注目すると、l-minimal と u-maximal、u-minimal と l-maximal は式の見かけ上では全く同じ形である。この事からも、集合関係における lower 型と upper 型は双対の概念であることが分かる。

定義 3.10 (**完備束最適化問題**)**.** X を空でない集合、$F : X \to \mathcal{V}^l$ [$F : X \to \mathcal{V}^u$] を domain が X である集合値写像（それぞれの $x \in X$ に対して $F(x) \neq \emptyset$）とする。L 型 [U 型] 完備束最適化問題とは、$x \in X$ のもとで $F(x)$ の l-minimal (maximal) [u-minimal (maximal)] な要素を求める問題と定式化する。

（コメント）
筆者は集合最適化問題の定式化 [15] を参考にして、minimal (maximal) の概念だけで完備束最適化問題を定式化した。一方、Hamel et al.[7] では、ベクトル値の上限・下限の概念 [16, 19] も解の概念に取り入れている。多目的ロバスト最適化問題への応用 [9, 10] なども考慮することで、解の概念に関する議論の余地は大いにありそうである。

一方筆者は [4] で、集合のスカラー化手法を利用することで、集合最適化問題における minimal element theorem を発表している。[4] では存在定理を示すために定義域空間の完備性を仮定しているのだが、もしかしたら特別な順序構造の元では空間の完備性は不要なのかも知れない。それらの議論は今後の課題である。

3.2 完備束最適化問題における非線形スカラー化関数と変換定理

[2, 3, 4] では、集合最適化問題における非線形スカラー化手法について調査した。$k^0 \in C \setminus (-C)$ とする。$\inf \emptyset = \infty$ と $\sup \emptyset = -\infty$ を認めることにより、

$$h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^l_{\sup}, h^u_{\sup} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [-\infty, \infty]$$

を次のように定義する。関数 $h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^l_{\sup}, h^u_{\sup}$ は、効用関数の役割を果たしている。

$$h^l_{\inf}(V_1, V_2) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, V_1 \leq^l_C tk^0 + V_2\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,\big|\, tk^0 + V_2 \subset V_1 + C\}$$

$$h^u_{\inf}(V_1, V_2) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,\big|\, V_1 \leq^u_C tk^0 + V_2\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,\big|\, V_1 \subset tk^0 + V_2 - C\}$$

$$h^l_{\sup}(V_1, V_2) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, tk^0 + V_2 \leq^l_C V_1\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,\big|\, V_1 \subset tk^0 + V_2 + C\}$$

$$h^u_{\sup}(V_1, V_2) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,\big|\, tk^0 + V_2 \leq^u_C V_1\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,\big|\, tk^0 + V_2 \subset V_1 - C\}$$

上記のスカラー化関数について、前節で定式化した完備束最適化問題という特別な枠組みの中で考えてみる。まずは、定義 2.3 と定義 2.4 について、完備束最適化問題に適用できるように再定義することを考える。

定義 3.11 ($\mathcal{V}^l$-proper set, $\mathcal{V}^u$-proper set)**.** $A \in \mathcal{V}^l$ $(A + C \in \mathcal{V}^l)[B \in \mathcal{V}^u$ $(B - C \in \mathcal{V}^u)]$ が $\mathcal{V}^l[\mathcal{V}^u]$-proper であるとは、$A \neq Y$ $[B \neq Y]$ が成り立つときである。また、$\mathcal{V}^l_C[\mathcal{V}^u_{-C}]$ を Y の $\mathcal{V}^l$-proper $[\mathcal{V}^u$-proper$]$ である部分集合の族とする。

定義 3.12 ($\mathcal{V}^{l[u]}$-closed, $\mathcal{V}^{l[u]}$-bounded, $\mathcal{V}^{l[u]}$-compact)**.** $A \in \mathcal{V}^l$、$B \in \mathcal{V}^u$ とする。

(i) A が $\mathcal{V}^l$-closed $[B$ が $\mathcal{V}^u$-closed$]$ であるとは、A $[B]$ が閉集合であることと定義する。

(ii) A が $\mathcal{V}^l$-有界 $[B$ が $\mathcal{V}^u$-有界$]$ であるとは、それぞれの Y の近傍

$$U = U + C \quad [U = U - C]$$

に対して、$A \subset tU$ を満たすような正の数 $t > 0$ が存在するときである。

(iii) A が $\mathcal{V}^l$-compact $[B$ が $\mathcal{V}^u$-compact$]$ であるとは、以下の形をした A の任意の被覆

$$\{U_\alpha |\, U_\alpha \text{ are open}, U_\alpha + C = U_\alpha\} \qquad \big[\{U_\alpha |\, U_\alpha \text{ are open}, U_\alpha - C = U_\alpha\}\big]$$

が有限個の被覆で A を覆うことが出来るときである。

任意の $\mathcal{V}^{l[u]}$-compact 集合は、$\mathcal{V}^{l[u]}$-closed かつ $\mathcal{V}^{l[u]}$-有界である。

注意 4. ここで、上記の定義と束における compact の定義を比較してみる。

定義 3.13 (束における compact 性 [5])**.** L を完備束、$k \in L$ とする。k が compact であるとは、$S \subseteq L$ に対して S の有限な部分集合 T が存在して、以下が成り立つときである。

$$k \leq \bigvee S \quad \Longrightarrow \quad k \leq \bigvee T$$

L のコンパクト要素の集合は $K(L)$ と記述される。

U_α の有限な部分集合を U_β とするとき、定義 3.12 (iii) は以下のように書ける。

$$A \leq \bigvee U_\alpha \quad (A \subset \bigvee U_\alpha) \quad \Longrightarrow \quad A \leq \bigvee U_\beta \quad (A \subset \bigvee U_\beta)$$

つまり、両者は完全に一致することが分かる。さらには、以下も分かる。

位相空間の compact 性 $\quad \Longrightarrow \quad$ 束 (順序空間) の compact 性

順序空間では、compact 性の概念を広げられることが分かる。

$\inf\emptyset = \infty$ と $\sup\emptyset = -\infty$ を認めることにより、

$$h^l_{\inf}, h^l_{\sup}, : \mathcal{V}^l \times \mathcal{V}^l \to [-\infty, \infty], \qquad h^u_{\inf}, h^u_{\sup} : \mathcal{V}^u \times \mathcal{V}^u \to [-\infty, \infty]$$

を次のように定義する。関数 $h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^l_{\sup}, h^u_{\sup}$ は、効用関数の役割を果たしている。

$$h^l_{\inf}(V_1, V_2) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \subset V_1\}, \quad h^l_{\sup}(V_1, V_2) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \subset tk^0 + V_2\}$$

$$h^u_{\inf}(V_1, V_2) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \subset tk^0 + V_2\}, \quad h^u_{\sup}(V_1, V_2) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \subset V_1\}$$

上記の定義式から、$h^l_{\inf}$ と $h^u_{\sup}$、$h^u_{\inf}$ と $h^l_{\sup}$ は双対の関係であることがはっきり読み取れる。

定理 3.14 (l-inf **型変換定理**)**.** $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし、$V_1 \in \mathcal{V}^l_C$ が $\mathcal{V}^l$-*closed*、 $V_2 \in \mathcal{V}^l$ ならば、次が言える。

$$V_2 \subset V_1 \Longleftrightarrow h^l_{\inf}(V_1, V_2) \leq 0$$

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}^l_C$、$V_2 \in \mathcal{V}^l$ が $\mathcal{V}^l$-*compact* ならば、次が言える。

$$V_2 \subset \mathrm{int}V_1 \Longleftrightarrow h^l_{\inf}(V_1, V_2) < 0$$

定理 3.15 (u-inf **型変換定理**)**.** $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし、$V_1 \in \mathcal{V}^u$、$V_2 \in \mathcal{V}^u_{-C}$ が $\mathcal{V}^u$-*closed* ならば、次が言える。

$$V_1 \subset V_2 \Longleftrightarrow h^u_{\inf}(V_1, V_2) \leq 0$$

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}^u$ が $\mathcal{V}^u$-*compact*、$V_2 \in \mathcal{V}^u_{-C}$ ならば、次が言える。

$$V_1 \subset \mathrm{int}V_2 \Longleftrightarrow h^u_{\inf}(V_1, V_2) < 0$$

定理 3.16 (l-sup **型変換定理**)**.** $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし、$V_1 \in \mathcal{V}^l$、$V_2 \in \mathcal{V}^l_C$ が $\mathcal{V}^l$-*closed* ならば、次が言える。

$$V_1 \subset V_2 \Longleftrightarrow h^l_{\sup}(V_1, V_2) \geq 0$$

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}$ が $\mathcal{V}^l$-*compact* で、$V_2 \in \mathcal{V}^l_C$ ならば、次が言える。

$$V_1 \subset \mathrm{int}V_2 \Longleftrightarrow h^l_{\sup}(V_1, V_2) > 0$$

定理 3.17 (u-sup **型変換定理**)**.** $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし、$V_1 \in \mathcal{V}^u_{-C}$ が $\mathcal{V}^u$-*closed* で、$V_2 \in \mathcal{V}^u$ ならば、次が言える。

$$V_2 \subset V_1 \Longleftrightarrow h^u_{\sup}(V_1, V_2) \geq 0$$

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}^u_{-C}$ で、$V_2 \in \mathcal{V}^u$ が $\mathcal{V}^u$-*compact* ならば、次が言える。

$$V_2 \subset \mathrm{int}V_1 \Longleftrightarrow h^u_{\sup}(V_1, V_2) > 0$$

変換定理も同様に $h^l_{\inf}$ と $h^u_{\sup}$、$h^u_{\inf}$ と $h^l_{\sup}$ は双対の関係であることが分かる。

3.3 完備束における不動点定理

定義 3.18 (ベクトル束の unit [12]). X をベクトル束とする。$e \in X$ が unit であるとは、任意の $x \in X$、$x > 0$ に対して $e \wedge x > 0$ であるときである。

定義 3.19 (Archimedean [13]). X を unit を持つベクトル束、$\mathcal{K}_R$ を正の実数の集合とする。
ベクトル束が Archimedean であるとは、任意の $r \in \mathcal{K}_R$ に対して $0 \leq rx \leq y$ を満たすような $y \in X$、$y \geq 0$ が存在するときは何時でも $x = 0$ となるときである。

定理 3.20 (川崎-豊田-渡辺の不動点定理 [13]). *X を Hausdorff、Archimedean である unit を持つベクトル束、$Y \subset X$ を compact 集合、$Z \subset Y$ を凸集合とする。写像 $f : Z \to 2^Y$ が、次を満たすとする。*

(a) $f^{-1}(y)$ は、任意の $y \in Y$ で凸である。

さらに、写像 $g : Z \to 2^Y$ が存在して、次を満たすとする。

(1) 任意の $z \in Z$ について、$g(z) \subset f(z)$ である。

(2) 任意の $y \in Y$ について、$g^{-1}(y) \neq \emptyset$ である。

(3) $g(z)$ は任意の $z \in Z$ に対して X の空でない開集合である。

そのとき、$z_0 \in f(z_0)$ を満たす $z_0 \in Z$ が存在する。

（コメント）
上記の定理はベクトル束における不動点定理であるが、完備束最適化問題にも適用できそうである。筆者は、上記の定理が完備束最適化問題における重要な存在定理に関与している可能性が非常に高いのではないかと予想している。その適用方法については、今後の研究課題である。

4 まとめと今後の課題

本稿では、集合最適化問題に束構造を加えた、完備束最適化問題を新たに提案した。ポイントは以下の通りである。

- lower 型の集合関係において、特別な集合族 ($A = A + C$ を満たすもの) を考えると、従来の集合関係は推移律が成り立つようになり、それは順序集合となる。また、**その特別な集合族は束 (lattice) の構造を持つようになる**。upper 型も同様である。

- **束構造（順序構造）は、代数学と解析学を結びつけるものである。**本稿の議論により、集合最適化問題に代数構造が加わったことで、ガロア接続・ブール代数などの新たな応用が期待される。

- 集合最適化問題において、特別な集合族 ($A = A + C$ を満たすもの) で解の概念を考えると、それは「集合の包含関係」となり、見た目では「集合による順序」が消える。

- 完備束最適化問題における非線形スカラー化関数を定式化し、さらに変換定理も導出した。スカラー化関数について、$h^l_{\inf}$ と $h^u_{\sup}$、$h^u_{\inf}$ と $h^l_{\sup}$ は双対の関係であることがより明確になった。

- 川崎-豊田-渡辺の不動点定理 [13] は、完備束最適化問題での存在定理を議論する上でとても重要となる可能性が非常に高い。

参考文献

[1] Y. Araya, *Nonlinear scalarizations and some applications in vector optimization*, Nihonkai Math. J. 21 (2010) 35–45.

[2] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, Nonlinear Anal. 75 (2012) 3821–3835.

[3] Y. Araya, *Existence theorems of cone saddle-points in set optimization applying nonlinear scalarizations*, Linear Nonlinear Anal. 6 (2020) 13–33.

[4] Y. Araya, *Some types of minimal element theorems and Ekeland's variational principles in set optimization*, Linear Nonlinear Anal. 6 (2020) 187–204.

[5] B. A. Davey, H. A. Priestley, *Introduction to lattices and order* , Second edition. Cambridge University Press, New York, 2002.

[6] A. Hamel, A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland's principle with set relations*, J. Nonlinear and Convex Anal. 7 (2006) 19–37.

[7] A. Hamel, F. Heyde, A. Löhne, B. Rudloff, C. Schrage, *Set optimization—a rather short introduction*, Set optimization and applications—the state of the art, 65–141, Springer Proc. Math. Stat., 151, Springer, Heidelberg, 2015.

[8] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Nonconvex scalarization in set-optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007) 1–18.

[9] J. Ide, E. Köbis, D. Kuroiwa, A. Schöbel, C. Tammer, *The relationship between multi-objective robustness concepts and set-valued optimization*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:83, 20.

[10] J. Ide, A. Schöbel, *Robustness for uncertain multi-objective optimization: a survey and analysis of different concepts*, OR Spectrum 38 (2016) 235–271.

[11] J. Jahn, T.X.D. Ha, *New order relations in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. 148 (2011) 209–236.

[12] T. Kawasaki, *Denjoy integral and Henstock-Kurzweil integral in vector lattices. I, II*, Czechoslovak Math. J. 59(134) (2009), no. 2, 381–399, 401–417.

[13] T. Kawasaki, M. Toyoda, T. Watanabe, *Takahashi's and Fan-Browder's fixed point theorems in a vector lattice*, J. Nonlinear Convex Anal. 10 (2009), no. 3, 455–461.

[14] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30 (1997) 1487–1496.

[15] D. Kuroiwa, *On set-valued optimization*, Nonlinear Anal. 47, (2001) 1395–1400.

[16] A. Löhne, *Vector optimization with infimum and supremum*, Vector Optimization. Springer, Heidelberg, 2011.

[17] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[18] A. L. Peressini *Ordered topological vector spaces*, Harper & Row, Publishers, New York-London 1967.

[19] T. Tanino, *On supremum of a set in a multidimensional space*, J. Math. Anal. Appl. 130 (1988), no. 2, 386–397.

[20] A. Tarski, *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific J. Math. 5 (1955), 285–309.