エントロピー及び相対エントロピーの上界・下界の精密化とその応用

城西大学・理学部　　柳　研二郎

Kenjiro Yanagi
Department of Mathematics
Faculty of Science
Josai University

1 Introduction

$f(x)$ を $[a,b]$ 上で定義された convex function とする．このときエルミート・アダマール不等式は次で与えられる．

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

最近、エルミート・アダマール不等式の 1 つの拡張として次の 2 つの不等式が得られた．

Proposition 1.1 $f(x)$ を $[a,b]$ 上の *convex function* とする．任意の $m,n \in \mathbb{N}$ に対して

$$L_{f,n}^{(1)}(a,b) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq L_{f,m}^{(2)}(a,b),$$

ただし

$$L_{f,n}^{(1)}(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f((1-\frac{2k-1}{2n})a + \frac{2k-1}{2n}b),$$

$$L_{f,m}^{(2)}(a,b) = \frac{1}{2m}\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{m-1} f((1-\frac{k}{m})a+\frac{k}{m}b\})\}.$$

Proposition 1.2 $f(x)$ を $[a,b]$ 上の *convex function* とする．任意の $m,n \in \mathbb{N}$ と任意の $v \in [0,1]$ に対して

$$r_{f,v,n}^{(1)}(a,b) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq r_{f,v,m}^{(2)}(a,b),$$

ただし

$$
\begin{aligned}
& r^{(1)}_{f,v,n}(a,b) \\
= \ & \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{vf((1-\frac{(2k-1)v}{2n})a+\frac{(2k-1)v}{2n}b) \\
& +(1-v)f((1-v-\frac{(2k-1)(1-v)}{2n})a+(v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2n})b)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& r^{(2)}_{f,v,m}(a,b) \\
= \ & \frac{1}{2m}\{vf(a)+(1-v)f(b)+f((1-v)a+vb)\} \\
& +\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\{vf((1-\frac{kv}{m})a+\frac{kv}{m}b)+(1-v)f((1-v-\frac{k(1-v)}{m})a+(v+\frac{k(1-v)}{m})b)\}.
\end{aligned}
$$

２つの確率分布 $Q=(q_1,q_2,\ldots,q_N)$ と $P=(p_1,p_2,\ldots,p_N)$ に対して Shannon entropy $S(P)$ と相対エントロピー (relative entropy) $S(Q|P)$ はそれぞれ次で与えられる.

$$
S(P)=-\sum_{i=1}^{N}p_i\log p_i, \qquad S(Q|P)=\sum_{i=1}^{N}q_i\log\frac{q_i}{p_i},
$$

ただし $0\log 0=0$ であり, ある i について $p_i=0$ のときには $q_i=0$ であるとする.

C.Tsallis は統計物理の解析のために Shannon entropy の one parameter 拡張である Tsallis entropy $T_t(Q)$ と関連する Tsallis relative entropy$T_t(Q|P)$ をそれぞれ次のように定義した.

$$
T_t(Q)=-\sum_{i=1}^{N}q_i^{1-t}\ln_t q_i, \qquad T_t(Q|P)=\sum_{i=1}^{N}q_i^{1-t}(\ln_t q_i-\ln_t p_i),
$$

ただし　$\ln_t$ はt-logarithmic function であり, parameter $t\in\mathbb{R}$ をもつ function $\ln_t(x)=\frac{x^t-1}{t}$ で定義される．それらは $t\to 0$ のときそれぞれ Shannon entropy と relative entropy に収束する．つまり

$$
\lim_{t\to 0}T_t(Q)=S(Q), \quad \lim_{t\to 0}T_t(Q|P)=S(Q|P),
$$

同様に量子状態 ρ についての von Neumann entropy $S(\rho)$ と 量子状態 ρ,σ に対する Umegaki relative entropy $(\rho|\sigma)$ はそれぞれ次で定義される.

$$
S(\rho)=-Tr[\rho\log\rho], \quad S(\rho|\sigma)=Tr[\rho(\log\rho-\log\sigma)].
$$

またそれらの one-parameter 拡張である Tsallis entropy $T_t(\rho)$ と Tsallis relative entropy $T_t(Q|P)$ はそれぞれ次で定義される.

$$
T_t(\rho)=-Tr[\rho^{1-t}\ln_t\rho], \quad T_t(\rho|\sigma)=Tr[\rho^{1-t}(\ln_t\rho-\ln_t\sigma)].
$$

さらに J.I.Fujii-E.Kamei は positive operators $X, Y > 0$ に対して relative operator entropy $S(X|Y)$ を次で定義した.

$$S(X|Y) = X^{1/2}\log(X^{-1/2}YX^{-1/2})X^{1/2}.$$

また $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ に対して Tsallis relative operator entropy $T_t(X|Y)$ が次で定義された.

$$T_t(X|Y) = X^{1/2}\ln_t(X^{-1/2}YX^{-1/2})X^{1/2}.$$

ここで $\lim_{t\to 0} T_t(X|Y) = S(X|Y)$ であることは明らかである.

2 Tsallis entropy の上界・下界とその応用

$f(x) = x^{t-1}$ とする. このとき $r^{(1)}_{f,v,n}(x,1)$ と $r^{(2)}_{f,v,m}(x,1)$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} & r^{(1)}_{f,v,n}(x,1) \\ = \; & \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{v((1-\frac{(2k-1)v}{2n})x+\frac{(2k-1)v}{2n})^{t-1} \\ & +(1-v)((1-v-\frac{(2k-1)(1-v)}{2n})x+(v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2n}))^{t-1}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & r^{(2)}_{f,v,m}(x,1) \\ = \; & \frac{1}{2m}\{vx^{t-1}+(1-v)+((1-v)x+1)^{t-1}\} \\ & +\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\{v((1-\frac{kv}{m})x+\frac{kv}{m})^{t-1} \\ & +(1-v)((1-v-\frac{k(1-v)}{m})x+(v+\frac{k(1-v)}{m}))^{t-1}\}. \end{aligned}$$

このとき次の定理が得られる.

Theorem 2.1 $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$ を確率分布とする. このとき任意の $v \in [0,1]$ と 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ. $t < 1$ または $t > 2$ のとき

$$\sum_{i=1}^{N} r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1)q_i^{1-t}(1-q_i) \le T_t(Q) \le \sum_{i=1}^{N} r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1)q_i^{1-t}(1-q_i), \tag{1}$$

$1 < t < 2$ のとき

$$\sum_{i=1}^{N} r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1)q_i^{1-t}(1-q_i) \le T_t(Q) \le \sum_{i=1}^{N} r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1)q_i^{1-t}(1-q_i). \tag{2}$$

Proof. $t < 1$ または $t > 2$ のとき $f(x) = x^{t-1}$ は $x > 0$ 上で convex であるので, Proposition 1.2 より

$$r^{(1)}_{f,v,n}(x,1) \le \frac{1-x^t}{t(1-x)} = \frac{x^t-1}{t(x-1)} \le r^{(2)}_{f,v,m}(x,1). \tag{3}$$

$1 < t < 2$ のとき $f(x) = x^{t-1}$ は $x > 0$ 上で concave であるので, Proposition 1.2 より

$$r^{(2)}_{f,v,m}(x,1) \le \frac{1-x^t}{t(1-x)} = \frac{x^t-1}{t(x-1)} \le r^{(1)}_{f,v,n}(x,1). \tag{4}$$

$t < 1$ または $t > 2$ のとき, $x = q_i (< 1)$ とおくと (3) より

$$r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1) \le \frac{1}{q_i-1}\ln_t q_i \le r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1).$$

したがって $(q_i-1)r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1) \le \ln_t q_i \le (q_i-1)r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1)$. 両辺に $-q_i^{1-t}$ (< 0) をかけると

$$q_i^{1-t}(1-q_i)r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1) \le -q_i^{1-t}\ln_t q_i \le q_i^{1-t}(1-q_i)r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1).$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^{N} q_i^{1-t}(1-q_i)r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1) \le T_t(Q) \le \sum_{i=1}^{N} q_i^{1-t}(1-q_i)r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1).$$

また同様にして $1 < t < 2$ のとき, $x = q_i (< 1)$ とおくと (4) より

$$r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1) \le \frac{1}{q_i-1}\ln_t q_i \le r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1).$$

したがって $(q_i-1)r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1) \le \ln_t q_i \le (q_i-1)r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1)$. 両辺に $-q_i^{1-t}$ (< 0) をかけると

$$q_i^{1-t}(1-q_i)r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1) \le -q_i^{1-t}\ln_t q_i \le q_i^{1-t}(1-q_i)r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1).$$

したがって

$$\sum_{i=1}^{N} q_i^{1-t}(1-q_i)r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1) \le T_t(Q) \le \sum_{i=1}^{N} q_i^{1-t}(1-q_i)r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1).$$

□

(1) において $t = 0$ とおくと, 次が得られる.

Corollary 2.1 $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$ を確率分布とする． このとき任意の $v \in [0,1]$ と 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{N} q_i(1-q_i)r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1) \le S(Q) \le \sum_{i=1}^{N} q_i(1-q_i)r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1), \tag{5}$$

ただし

$$
\begin{aligned}
& r^{(1)}_{f,v,n}(q_i,1) \\
= \;& 2\sum_{k=1}^{n}\{\frac{v}{(2n-(2k-1)v)q_i+(2k-1)v} \\
& +\frac{1-v}{2n\{(1-v)q_i+v\}+(2k-1)(1-v)(1-q_i)}\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& r^{(2)}_{f,v,m}(q_i,1) \\
= \;& \frac{1}{2m}\left\{\frac{v}{q_i}+1-v+\frac{1}{(1-v)q_i+v}\right\} \\
& +\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{v}{(m-kv)q_i+kv}+\frac{1-v}{m\{(1-v)q_i+v\}+k(1-v)(1-q_i)}\right\}.
\end{aligned}
$$

(1) と (2) において $v=0$ または $v=1$ とおくと, $r^{(1)}_{f,0,n}(q_i,1)=r^{(1)}_{f,1,n}(q_i,1)=L^{(1)}_{f,n}(q_i,1)$ かつ $r^{(2)}_{f,0,m}(q_i,1)=r^{(2)}_{f,1,m}(q_i,1)=L^{(2)}_{f,m}(q_i,1)$ であるので次が得られる.

Corollary 2.2 $Q=(q_1,q_2,\ldots,q_N)$ を確率分布とする. このとき任意の $m,n\in\mathbb{N}$ に対して次が成り立つ. $t<1$ または $t>2$ のとき

$$
\sum_{i=1}^{N}L^{(1)}_{f,n}(q_i,1)q_i^{1-t}(1-q_i)\le T_t(Q)\le\sum_{i=1}^{N}L^{(2)}_{f,m}(q_i,1)q_i^{1-t}(1-q_i),
$$

$1<t<2$ のとき

$$
\sum_{i=1}^{N}L^{(2)}_{f,m}(q_i,1)q_i^{1-t}(1-q_i)\le T_t(Q)\le\sum_{i=1}^{N}L^{(1)}_{f,n}(q_i,1)q_i^{1-t}(1-q_i),
$$

ただし

$$
L^{(1)}_{f,n}(q_i,1)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{(1-\frac{2k-1}{2n})q_i+\frac{2k-1}{2n}\right\}^{t-1},
$$

$$
L^{(2)}_{f,m}(q_i,1)=\frac{1}{2m}\left\{1+(q_i+1)^{t-1}\right\}+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\left\{(1-\frac{k}{m})q_i+\frac{k}{m}\right\}^{t-1}.
$$

(5) において $v=0$ または $v=1$ とおくと次が得られる. .

Corollary 2.3 $Q=(q_1,q_2,\ldots,q_N)$ を確率分布とする. このとき任意の $m,n\in\mathbb{N}$ に対して

$$
\sum_{i=1}^{N}q_i(1-q_i)L^{(1)}_{f,n}(q_i,1)\le S(Q)\le\sum_{i=1}^{N}q_i(1-q_i)L^{(2)}_{f,m}(q_i,1), \tag{6}
$$

ただし

$$L^{(1)}_{f,n}(q_i,1)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n-(2k-1))q_i+2k-1},$$

$$L^{(2)}_{f,m}(q_i,1)=\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{q_i}+1\right)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{(2^m-k)q_i+k}.$$

(6) において $n=m=1$ とおくと

$$L^{(1)}_{f,1}(q_i,1)=\frac{2}{1+q_i},\quad L^{(2)}_{f,1}(q_i,1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_i}+1\right)$$

であるので, 次の結論が得られる.

Corollary 2.4 $Q=(q_1,q_2,\ldots,q_N)$ を確率分布とする. このとき次が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{2q_i(1-q_i)}{1+q_i}\le S(Q)\le\sum_{i=1}^{N}\frac{1-q_i^2}{2}.$$

3 Tsallis Relative Entropy の上界・下界とその応用

$f(x)=x^{t-1}$ とする. このとき $r^{(1)}_{f,v,n}(a,b)$ と $r^{(2)}_{f,v,m}(a,b)$ はそれぞれ次のように表される.

$$\begin{aligned}&r^{(1)}_{f,v,n}(a,b)\\ =\;&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{v((1-\frac{(2k-1)v}{2n})a+\frac{(2k-1)v}{2n}b)^{t-1}\\ &+(1-v)((1-v-\frac{(2k-1)(1-v)}{2n})a+(v+\frac{(2k-1)(1-v)}{2n})b)^{t-1}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&r^{(2)}_{f,v,m}(a,b)\\ =\;&\frac{1}{2m}\{va^{t-1}+(1-v)b^{t-1}+((1-v)a+vb)^{t-1}\}\\ &+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\{v((1-\frac{kv}{m})a+\frac{kv}{m}b)^{t-1}\\ &+(1-v)((1-v-\frac{k(1-v)}{m})a+(v+\frac{k(1-v)}{m})b)^{t-1}\}.\end{aligned}$$

このとき次の定理が得られる.

Theorem 3.1 $Q=(q_1,q_2,\dots,q_N)$ と $P=(p_1,p_2,\dots,p_N)$ を確率分布とする．. $I=\{1\le i\le N: p_i<q_i\}$ と $J=\{1\le i\le N: p_i>q_i\}$ とする．このとき任意の $v\in[0,1]$ と任意の $m,n\in\mathbb{N}$ に対して次が成り立つ．$t<1$ または $t>2$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(1)}_{f,v,n}(p_i,q_i)+\sum_{i\in J} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(2)}_{f,v,m}(p_i,q_i)\\
\le\ & T_t(Q|P) \qquad (7)\\
\le\ & \sum_{i\in I} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(2)}_{f,v,m}(p_i,q_i)+\sum_{i\in J} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(1)}_{f,v,n}(p_i,q_i),
\end{aligned}$$

$1<t<2$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(2)}_{f,v,m}(p_i,q_i)+\sum_{i\in J} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(1)}_{f,v,n}(p_i,q_i)\\
\le\ & T_t(Q|P) \qquad (8)\\
\le\ & \sum_{i\in I} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(1)}_{f,v,n}(p_i,q)+\sum_{i\in J} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(2)}_{f,v,m}(p_i,q_i).
\end{aligned}$$

Proof. $t<1$ または $t>2$ のとき，$f(x)=x^{t-1}$ は $x>0$ 上で convex であるので，Proposition 1.2 より次が成り立つ．

$$r^{(1)}_{f,v,n}(a,b)\le \frac{1}{b-a}\frac{b^t-a^t}{t}\le r^{(2)}_{f,v,m}(a,b). \qquad (9)$$

したがって $i\in I=\{1\le i\le N: p_i<q_i\}$ に対して $a=p_i$ かつ $b=q_i$ とおくと (9) より，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(1)}_{f,v,n}(p_i,q_i) \qquad (10)\\
\le\ & \sum_{i\in I} q_i^{1-t}(\ln_t q_i-\ln_t p_i)\le \sum_{i\in I} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(2)}_{f,v,m}(p_i,q_i).
\end{aligned}$$

また $i\in J=\{1\le i\le N: p_i>q_i\}$ に対して $a=p_i$ かつ $b=q_i$ とおくと (9) より，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in J} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(2)}_{f,v,m}(p_i,q_i) \qquad (11)\\
\le\ & \sum_{i\in J} q_i^{1-t}(\ln_t q_i-\ln_t p_i)\le \sum_{i\in J} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(1)}_{f,v,n}(p_i,q_i).
\end{aligned}$$

ゆえに (10) と (11) を結び付けることにより (7) が得られる．
同様にして $1<t<2$ のとき，$f(x)=x^{t-1}$ は $x>0$ 上で concave であるので，Proposition 1.2 より次が成り立つ．

$$r^{(2)}_{f,v,m}(a,b)\le \frac{1}{b-a}\frac{b^t-a^t}{t}\le r^{(1)}_{f,v,n}(a,b). \qquad (12)$$

したがって $i\in I=\{1\le i\le N: p_i<q_i\}$ に対して $a=p_i$ かつ $b=q_i$ とおくと (12) より次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(2)}_{f,v,m}(p_i,q_i) \qquad (13)\\
\le\ & \sum_{i\in I} q_i^{1-t}(\ln_t q_i-\ln_t p_i)\le \sum_{i\in I} q_i^{1-t}(q_i-p_i)r^{(1)}_{f,v,n}(p_i,q_i).
\end{aligned}$$

また $i \in J = \{1 \le i \le N : p_i > q_i\}$ に対して $a = p_i$ かつ $b = q_i$ とおくと, Proposition 1.2 より次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i \in J} q_i^{1-t}(q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i) \\
\le\ & \sum_{i \in J} q_i^{1-t}(\ln_t q_i - \ln_t p_i) \le \sum_{i \in J} q_i^{1-t}(q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i).
\end{aligned} \tag{14}
$$

ゆえに (13) と (14) を結び付けることにより (8) が得られる． □

(7) において $t = 0$ とおくと次の Corollary を得る．．

Corollary 3.1 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ と $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ を確率分布とする．このとき任意の $v \in [0, 1]$ と任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i \in I} q_i(q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i(q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i) \\
\le\ & S(Q|P) \\
\le\ & \sum_{i \in I} q_i(q_i - p_i) r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i(q_i - p_i) r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i),
\end{aligned} \tag{15}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
& r_{f,v,n}^{(1)}(p_i, q_i) \\
=\ & 2 \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{v}{(2n - (2k-1)v)p_i + (2k-1)vq_i} \right\} \\
& + 2 \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1-v}{2n\{(1-v)p_i + vq_i\} + (2k-1)(1-v)(q_i - p_i)} \right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& r_{f,v,m}^{(2)}(p_i, q_i) \\
=\ & \frac{1}{2m} \left\{ \frac{v}{p_i} + \frac{1-v}{q_i} + \frac{1}{(1-v)p_i + vq_i} \right\} \\
& + \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \frac{v}{(m-kv)p_i + kvq_i} + \frac{1-v}{m\{(1-v)p_i + vq_i\} + k(1-v)(q_i - p_i)} \right\}.
\end{aligned}
$$

(7) と (8) において $v = 0$ または $v = 1$ とおくと $r_{f,0,n}^{(1)}(p_i, q_i) = r_{f,1,n}^{(1)}(p_i, q_i) = L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i)$ かつ $r_{f,0,m}^{(2)}(p_i, q_i) = r_{f,1,m}^{(2)}(p_i, q_i) = L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i)$ であるので次の定理が得られる．．

Corollary 3.2 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ と $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ を確率分布とする．このとき任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ．$t < 1$ または $t > 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i \in I} q_i^{1-t}(q_i - p_i) L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i^{1-t}(q_i - p_i) L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i) \\
\le\ & T_t(Q|P) \\
\le\ & \sum_{i \in I} q_i^{1-t}(q_i - p_i) L_{f,m}^{(2)}(p_i, q_i) + \sum_{i \in J} q_i^{1-t}(q_i - p_i) L_{f,n}^{(1)}(p_i, q_i),
\end{aligned}
$$

また $1<t<2$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I} q_i^{1-t}(q_i-p_i)L_{f,m}^{(2)}(p_i,q_i)+\sum_{i\in J} q_i^{1-t}(q_i-p_i)L_{f,n}^{(1)}(p_i,q_i)\\
\leq\ & T_t(Q|P)\\
\leq\ & \sum_{i\in I} q_i^{1-t}(q_i-p_i)L_{f,n}^{(1)}(p_i,q_i)+\sum_{i\in J} q_i^{1-t}(q_i-p_i)L_{f,m}^{(2)}(p_i,q_i),
\end{aligned}$$

ただし

$$L_{f,n}^{(1)}(p_i,q_i)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{(1-\frac{2k-1}{2n})p_i+\frac{2k-1}{2n}q_i\right\}^{t-1},$$

$$L_{f,m}^{(2)}(p_i,q_i)=\frac{1}{2m}(p_i^{t-1}+q_i^{t-1})+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\left\{(1-\frac{k}{m})p_i+\frac{k}{m}q_i\right\}^{t-1}.$$

(15) において $v=0$ または $v=1$ とおくと次の Corollary が得られる. .

Corollary 3.3 $Q=(q_1,q_2,\ldots,q_N)$ と $P=(p_1,p_2,\ldots,p_N)$ を確率分布とする. このとき任意の $m,n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I} q_i(q_i-p_i)L_{f,n}^{(1)}(p_i,q_i)+\sum_{i\in J} q_i(q_i-p_i)L_{f,m}^{(2)}(p_i,q_i)\\
\leq\ & S(Q|P)\\
\leq\ & \sum_{i\in I} q_i(q_i-p_i)L_{f,m}^{(2)}(p_i,q_i)+\sum_{i\in J} q_i(q_i-p_i)L_{f,n}^{(1)}(p_i,q_i),
\end{aligned}\tag{16}$$

ただし

$$L_{f,n}^{(1)}(p_i,q_i)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2n-(2k-1))p_i+(2k-1)q_i},$$

$$L_{f,m}^{(2)}(p_i,q_i)=\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}\right)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{(m-k)p_i+kq_i}.$$

(16) において $n=m=1$ とおくと,

$$L_{f,1}^{(1)}(p_i,q_i)=\frac{2}{p_i+q_i},\qquad L_{f,1}^{(2)}(p_i,q_i)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}\right)=\frac{p_i+q_i}{2p_iq_i}$$

であるので, 次の Corollary が成り立つ. .

Corollary 3.4 $Q=(q_1,q_2,\ldots,q_N)$ と $P=(p_1,p_2,\ldots,p_N)$ を確率分布とする. このとき

$$\sum_{i\in I}\frac{2q_i(q_i-p_i)}{p_i+q_i}+\sum_{i\in J}\frac{q_i^2-p_i^2}{2p_i}\leq S(Q|P)\leq\sum_{i\in I}\frac{q_i^2-p_i^2}{2p_i}+\sum_{i\in J}\frac{2q_i(q_i-p_i)}{p_i+q_i}.$$

次に Pinsker inequality とその関連について述べる．Pinsker inequality は次の不等式として知られている．

$$\frac{1}{2}\|Q-P\|_1^2 \leq S(Q|P), \tag{17}$$

ただし

$$\|Q-P\|_1 = \sum_{i\in I}(q_i-p_i)+\sum_{i\in J}(p_i-q_i).$$

ここでは (16) は $S(Q|P)$ の下界としては (17) より強い評価を与えることを示す．$Q=(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$, $P=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ で (16) において $n=m=2$ とおく．このとき

$$L_{f,2}^{(1)}(p_i,q_i)=\frac{2}{3p_i+q_i}+\frac{2}{p_i+3q_i}=\frac{8(p_i+q_i)}{(3p_i+q_i)(p_i+3q_i)}$$

かつ

$$L_{f,2}^{(2)}(p_i,q_i)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}\right)+\frac{1}{p_i+q_i}$$

であるので

$$\sum_{i\in I}q_i(q_i-p_i)L_{f,2}^{(1)}(p_i,q_i)+\sum_{i\in J}q_i(q_i-p_i)L_{f,2}^{(2)}(p_i,q_i)=0.12594\cdots$$

かつ

$$\frac{1}{2}\|Q-P\|_1^2=0.125, \qquad S(Q|P)=0.13084\cdots.$$

したがって

$$\frac{1}{2}\|Q-P\|_1^2<\sum_{i\in I}q_i(q_i-p_i)L_{f,2}^{(1)}(p_i,q_i)+\sum_{i\in J}q_i(q_i-p_i)L_{f,2}^{(2)}(p_i,q_i)<S(Q|P).$$

4 Tsallis Relative Operator Entropy の上界・下界とその応用

$t<1$ または $t>2$ のとき, $f(x)=x^{t-1}$ は $x>0$ 上で convex であるので, Proposition 1.1 より次を得る．

$$L_{f,n}^{(1)}(a,b)\leq\frac{1}{b-a}\frac{b^t-a^t}{t}\leq L_{f,m}^{(2)}(a,b), \tag{18}$$

ただし

$$L_{f,n}^{(1)}(a,b)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{(1-\frac{2k-1}{2n})a+\frac{2k-1}{2n}b\right\}^{t-1},$$

$$L_{f,m}^{(2)}(a,b)=\frac{1}{2m}\left\{a^{t-1}+b^{t-1}+2\sum_{k=1}^{m-1}((1-\frac{k}{m})a+\frac{k}{m}b)^{t-1}\right\}.$$

$0<a<b$ のとき, 次の不等式を得る．

$$(b-a)L_{f,n}^{(1)}(a,b)\leq\frac{b^t-a^t}{t}\leq(b-a)L_{f,m}^{(2)}(a,b). \tag{19}$$

(19) において $a=1$ かつ $b=y$ とおく．このとき

$$(y-1)L_{f,n}^{(1)}(1,y) \leq \frac{y^t-1}{t} \leq (y-1)L_{f,m}^{(2)}(1,y). \tag{20}$$

次に (19) において　$a=y$ かつ $b=1$ とおく．このとき

$$(1-y)L_{f,n}^{(1)}(y,1) \leq \frac{1-y^t}{t} \leq (1-y)L_{f,m}^{(2)}(y,1). \tag{21}$$

一方, $0<b<a$ のときは次の不等式を得る．.

$$(b-a)L_{f,m}^{(2)}(a,b) \leq \frac{b^t-a^t}{t} \leq (b-a)L_{f,n}^{(1)}(a,b). \tag{22}$$

(22) において $a=1$ かつ $b=y$ とおく．　このとき

$$(y-1)L_{f,m}^{(2)}(1,y) \leq \frac{y^t-1}{t} \leq (y-1)L_{f,n}^{(1)}(a,b).$$

つまり

$$(1-y)L_{f,n}^{(1)}(a,b) \leq \frac{1-y^t}{t} \leq (1-y)L_{f,m}^{(2)}(1,y). \tag{23}$$

次に (22) において $a=y$ かつ $b=1$ とおく．このとき

$$(1-y)L_{f,m}^{(2)}(y,1) \leq \frac{1-y^t}{t} \leq (1-y)L_{f,n}^{(1)}(y,1).$$

つまり

$$(y-1)L_{f,n}^{(1)}(y,1) \leq \frac{y^t-1}{t} \leq (y-1)L_{f,m}^{(2)}(y,1). \tag{24}$$

$L_{f,n}^{(1)}(1,y)=L_{f,n}^{(1)}(y,1)$ かつ $L_{f,m}^{(2)}(1,y)=L_{f,m}^{(2)}(y,1)$ に注意する． したがって $y>1$ に対して (20) かつ (24) より次の不等式を得る．

$$(y-1)L_{f,n}^{(1)}(1,y) \leq \frac{y^t-1}{t} \leq (y-1)L_{f,m}^{(2)}(1,y). \tag{25}$$

また $y<1$ に対して (21) かつ (23) より次の不等式を得る． .

$$(1-y)L_{f,n}^{(1)}(1,y) \leq \frac{1-y^t}{t} \leq (1-y)L_{f,m}^{(2)}(1,y). \tag{26}$$

同様に $1<t<2$ のとき, $f(x)=x^{t-1}$ は $x>0$ 上で concave であるので, 同様な方法で次の不等式を得られる．$y>1$ に対して

$$(y-1)L_{f,m}^{(2)}(1,y) \leq \frac{y^t-1}{t} \leq (y-1)L_{f,n}^{(1)}(1,y). \tag{27}$$

また $y<1$ に対して

$$(1-y)L_{f,m}^{(2)}(1,y) \leq \frac{1-y^t}{t} \leq (1-y)L_{f,n}^{(1)}(1,y). \tag{28}$$

Tsallis relative operator entropy の上界・下界を得るために次の lemma を必要とする．

Lemma 4.1 A, B を *positive invertible operators,* また $0 < \ell < L$ を $\ell A \le B \le LA$ を満たす定数とする．$t < 1$ または $t > 2$ のとき, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次の不等式が成り立つ．$\ell > 1$ のとき

$$(B - A) \max_{\ell \le y \le L} L^{(1)}_{f,n}(1, y) \le T_t(A|B) \le (B - A) \min_{\ell \le y \le L} L^{(2)}_{f,m}(1, y).$$

$L < 1$ のとき

$$(B - A) \min_{\ell \le y \le L} L^{(2)}_{f,m}(1, y) \le T_t(A|B) \le (B - A) \max_{\ell \le y \le L} L^{(1)}_{f,n}(1, y).$$

$1 < t < 2$ のとき, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次の不等式が成り立つ．$\ell > 1$ のとき

$$(B - A) \max_{\ell \le y \le L} L^{(2)}_{f,m}(1, y) \le T_t(A|B) \le (B - A) \min_{\ell \le y \le L} L^{(1)}_{f,n}(1, y).$$

$L < 1$ のとき

$$(B - A) \min_{\ell \le y \le L} L^{(1)}_{f,n}(1, y) \le T_t(A|B) \le (B - A) \max_{\ell \le y \le L} L^{(2)}_{f,m}(1, y).$$

Proof. $t < 1$ または $t > 2$ とする．$\ell > 1$ のとき, $1 < \ell \le y \le L$ であるので次を得る．

$$(y - 1) \max_{\ell \le y \le L} L^{(1)}_{f,n}(1, y) \le \frac{y^t - 1}{t} \le (y - 1) \min_{\ell \le y \le L} L^{(2)}_{f,m}(1, y). \tag{29}$$

$L < 1$ のとき, $\ell \le y \le L < 1$ であるので次を得る．

$$(1 - y) \max_{\ell \le y \le L} L^{(1)}_{f,n}(1, y) \le \frac{1 - y^t}{t} \le (1 - y) \min_{\ell \le y \le L} L^{(2)}_{f,m}(1, y).$$

つまり

$$(y - 1) \min_{\ell \le y \le L} L^{(2)}_{f,m}(1, y) \le \frac{y^t - 1}{t} \le (y - 1) \max_{\ell \le y \le L} L^{(1)}_{f,n}(1, y). \tag{30}$$

$1 < t < 2$ とする．$\ell > 1$ のとき, $1 < \ell \le y \le L$ であるので次を得る．

$$(y - 1) \max_{\ell \le y \le L} L^{(2)}_{f,m}(1, y) \le \frac{y^t - 1}{t} \le (y - 1) \min_{\ell \le y \le L} L^{(1)}_{f,n}(1, y). \tag{31}$$

$L < 1$ のとき, $\ell \le y \le L < 1$ であるので次を得る．

$$(1 - y) \max_{\ell \le y \le L} L^{(2)}_{f,m}(1, y) \le \frac{1 - y^t}{t} \le (1 - y) \min_{\ell \le y \le L} L^{(1)}_{f,n}(1, y).$$

つまり

$$(y - 1) \min_{\ell \le y \le L} L^{(1)}_{f,n}(1, y) \le \frac{y^t - 1}{t} \le (y - 1) \max_{\ell \le y \le L} L^{(2)}_{f,m}(1, y). \tag{32}$$

$\ell A \le B \le LA$ かつ A は invertible であるので, 両辺に左右から $A^{-1/2}$ をかけることにより $\ell 1_H \le A^{-1/2} B A^{-1/2} \le L 1_H$ である． $X = A^{-1/2} B A^{-1/2}$ とおく． $[\ell, L]$ に含まれる spectra をもつ X に対する functional calculus を用い, かつ不等式 (29), (30), (31) および (32) より結論が得られる． $\square$

Theorem 4.1 A, B を *positive invertible operators,* また $0 < \ell < L$ を $\ell A \le B \le LA$ を満たす定数とする．$t < 1$ のとき, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次を得る．$\ell > 1$ のとき

$$(B-A)L_{f,n}^{(1)}(1,\ell) \le T_t(A|B) \le (B-A)L_{f,m}^{(2)}(1,L).$$

$L < 1$ のとき

$$(B-A)L_{f,m}^{(2)}(1,L) \le T_t(A|B) \le (B-A)L_{f,n}^{(1)}(1,\ell).$$

$t > 1$ のとき, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次を得る．$\ell > 1$ のとき

$$(B-A)L_{f,m}^{(2)}(1,L) \le T_t(A|B) \le (B-A)L_{f,n}^{(1)}(1,\ell).$$

$L < 1$ のとき

$$(B-A)L_{f,n}^{(1)}(1,\ell) \le T_t(A|B) \le (B-A)L_{f,m}^{(2)}(1,L).$$

Proof. $t < 1$ のとき

$$\max_{\ell \le y \le L} L_{f,n}^{(1)}(1,y) = L_{f,n}^{(1)}(1,\ell), \qquad \min_{\ell \le y \le L} L_{f,n}^{(1)}(1,y) = L_{f,n}^{(1)}(1,L)$$

かつ

$$\max_{\ell \le y \le L} L_{f,m}^{(2)}(1,y) = L_{f,m}^{(2)}(1,\ell), \qquad \min_{\ell \le y \le L} L_{f,m}^{(2)}(1,y) = L_{f,m}^{(2)}(1,L).$$

$1 < t < 2$ または $t > 2$ のとき

$$\max_{\ell \le y \le L} L_{f,n}^{(1)}(1,y) = L_{f,n}^{(1)}(1,L), \qquad \min_{\ell \le y \le L} L_{f,n}^{(1)}(1,y) = L_{f,n}^{(1)}(1,\ell)$$

かつ

$$\max_{\ell \le y \le L} L_{f,m}^{(2)}(1,y) = L_{f,m}^{(2)}(1,L), \qquad \min_{\ell \le y \le L} L_{f,m}^{(2)}(1,y) = L_{f,m}^{(2)}(1,\ell).$$

$t = 2$ のときは明らかであるので, Lemma 4.1 より結論が得られる． □

Theorem 4.1 において $m = n = 1$ とする． このとき次の Corollary が得られる．

Corollary 4.1 A, B を *positive invertible operators,* また $0 < \ell < L$ を $\ell A \le B \le LA$ を満たす定数とする．$t < 1$ のとき, 次の不等式が成り立つ．$\ell > 1$, 即ち, $A \le B$ のとき

$$(B-A)\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{t-1} \le T_t(A|B) \le (B-A)\left(\frac{1+L^{t-1}}{2}\right).$$

$L < 1$, 即ち, $B \le A$ のとき

$$(B-A)\left(\frac{1+L^{t-1}}{2}\right) \le T_t(A|B) \le (B-A)\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{t-1}.$$

$t > 1$ のとき, 次の不等式が成り立つ． $\ell > 1$, 即ち, $A \le B$ のとき

$$(B-A)\left(\frac{1+L^{t-1}}{2}\right) \le T_t(A|B) \le (B-A)\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{t-1}.$$

$L<1$, 即ち, $B \leq A$ のとき

$$(B-A)\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{t-1} \leq T_t(A|B) \leq (B-A)\left(\frac{1+L^{t-1}}{2}\right).$$

Proof. $m=n=1$ より

$$L_{f,1}^{(1)}(1,\ell)=\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{t-1}, \qquad L_{f,1}^{(2)}(1,L)=\frac{1+L^{t-1}}{2}.$$

したがって結論が得られる. □

$f(x)=\frac{b}{x}-1$ とする. このとき $L_{f,n}^{(1)}(a,b)$ かつ $L_{f,m}^{(2)}(a,b)$ はそれぞれ次のように表される.

$$L_{f,n}^{(1)}(a,b)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{2k-1}{2n}}{(1-\frac{2k-1}{2n})a+\frac{2k-1}{2n}b}$$

かつ

$$L_{f,m}^{(2)}(a,b)=\frac{b-a}{2m}\left\{\frac{1}{a}+2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1-\frac{k}{m}}{(1-\frac{k}{m})a+\frac{k}{m}b}\right\}.$$

エルミート・アダマール不等式より

$$L_{f,n}^{(1)}(a,b) \leq \frac{1}{b-a}\{b\log\frac{b}{a}-(b-a)\} \leq L_{f,m}^{(2)}(a,b).$$

$0<a<b$ のとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{2k-1}{2n}}{(1-\frac{2k-1}{2n})a+\frac{2k-1}{2n}b}\\
\leq\ & b\log\frac{b}{a}-(b-a) \qquad (33)\\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{2m}\left\{\frac{1}{a}+2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1-\frac{k}{m}}{(1-\frac{k}{m})a+\frac{k}{m}b}\right\}.
\end{aligned}$$

同様に $0<b<a$ のとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^2}{2m}\left\{\frac{1}{a}+2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1-\frac{k}{2^m}}{(1-\frac{k}{m})a+\frac{k}{m}b}\right\}.\\
\leq\ & b\log\frac{b}{a}-(b-a) \qquad (34)\\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{2k-1}{2n}}{(1-\frac{2k-1}{2n})a+\frac{2k-1}{2n}b}.
\end{aligned}$$

(33) において $a=1$ かつ $b=y$ とする．　このとき

$$
\begin{aligned}
&\frac{(y-1)^2}{ny}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n-(2k-1)}y} \\
\leq\ & \log y-\frac{y-1}{y} \\
\leq\ & \frac{(y-1)^2}{2my}\left\{1+2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{1+\frac{k}{m-k}y}\right\}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

また (33) において $a=y$ かつ $b=1$ とする．　このとき

$$
\begin{aligned}
&\frac{(y-1)^2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y+\frac{2k-1}{2n-(2k-1)}} \\
\leq\ & y-1-\log y \\
\leq\ & \frac{(y-1)^2}{2m}\left\{\frac{1}{y}+2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{y+\frac{k}{m-k}}\right\}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

一方, (34) において $a=y$ かつ $b=1$ とする．このとき

$$
\begin{aligned}
&\frac{(y-1)^2}{2m}\left\{\frac{1}{y}+2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{y+\frac{k}{m-k}}\right\} \\
\leq\ & y-1-\log y \\
\leq\ & \frac{(y-1)^2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y+\frac{2k-1}{2n-(2k-1)}}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

同様にして, (34) において $a=1$ かつ $b=y$ とする．このとき

$$
\begin{aligned}
&\frac{(y-1)^2}{2my}\left\{1+2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{1+\frac{k}{m-k}y}\right\} \\
\leq\ & \log y-\frac{y-1}{y} \\
\leq\ & \frac{(y-1)^2}{ny}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n-(2k-1)}y}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

次を定義する．

$$
\alpha(n,y)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{2j-1}{2n-(2j-1)}y\right)^{-1},
$$

$$
\beta(m,y)=\frac{1}{2m}\left\{1+2\sum_{j=1}^{m-1}\left(1+\frac{j}{m-j}y\right)^{-1}\right\},
$$

$$
\gamma(n,y)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y+\frac{2j-1}{2n-(2j-1)}\right)^{-1},
$$

$$\delta(m,y)=\frac{1}{2m}\left\{\frac{1}{y}+2\sum_{j=1}^{m-1}\left(y+\frac{j}{m-j}\right)^{-1}\right\}.$$

$y>1$ に対して $\alpha(n,y)\le\beta(m,y),\gamma(n,y)\ge\delta(m,y)$, また $y<1$ に対して $\alpha(n,y)\ge\beta(m,y),\gamma(n,y)\le\delta(m,y)$ が成り立つので (35), (36), (37), (38) より次の 2 つの表現が得られる．

$$\begin{aligned}&\frac{(y-1)^2}{y}\min\{\alpha(n,y),\beta(m,y)\}\le\log y-\frac{y-1}{y}\\ \le\ &\frac{(y-1)^2}{y}\max\{\alpha(n,y),\beta(m,y)\}\end{aligned}\tag{39}$$

かつ

$$\begin{aligned}&(y-1)^2\min\{\gamma(n,y),\delta(m,y)\}\le y-1-\log y\\ \le\ &(y-1)^2\max\{\gamma(n,y),\delta(m,y)\}.\end{aligned}\tag{40}$$

$0<k<K$ とする．このとき

$$M(k,K)=\max_{k\le y\le K}\frac{(y-1)^2}{y},\quad m(k,K)=\min_{k\le y\le K}\frac{(y-1)^2}{y},$$
$$N(k,K)=\max_{k\le y\le K}(y-1)^2,\quad n(k,K)=\min_{k\le y\le K}(y-1)^2.$$

とおくと, 次の 2 つの不等式が得られる．

$$m(k,K)\min\{\alpha(n,K),\beta(m,K)\}\le\log y-\frac{y-1}{y}\le M(k,K)\max\{\alpha(n,k),\beta(m,k)\}$$

かつ

$$n(k,K)\min\{\gamma(n,K),\delta(m,K)\}\le y-1-\log y\le N(k,K)\max\{\gamma(n,k),\delta(m,k)\}.$$

operator inequality を証明するために次の Lemma を必要とする．

Lemma 4.2 $0<k\le x\le K$ かつ $t>0$ とする．このとき

$$\begin{aligned}0\ &\le\ \min\{\alpha(n,K^t),\beta(m,K^t)\}\left(\frac{x^t-1}{t}-\frac{1-x^{-t}}{t}\right)\\ &\le\ \log x-\frac{1-x^{-t}}{t}\\ &\le\ \max\{\alpha(n,k^t),\beta(m,k^t)\}\left(\frac{x^t-1}{t}-\frac{1-x^{-t}}{t}\right),\end{aligned}\tag{41}$$

$$\begin{aligned}0\ &\le\ \min\{\gamma(n,K^t),\delta(m,K^t)\}t\left(\frac{x^t-1}{t}\right)^2\\ &\le\ \frac{x^t-1}{t}-\log x\\ &\le\ \max\{\gamma(n,k^t),\delta(m,k^t)\}t\left(\frac{x^t-1}{t}\right)^2.\end{aligned}\tag{42}$$

Proof. (39) かつ (40) において $y = x^t$ とおくことにより結論が得られる． □

Theorem 4.2 A, B を *positive invertible operators,* $0 < \ell < L$ を $\ell A \leq B \leq LA$ を満たす定数とする． このとき任意の $t > 0$ と任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\alpha(n, L^t), \beta(m, L^t)\}(T_t(A|B) - T_{-t}(A|B)) \\ &\leq S(A|B) - T_{-t}(A|B) \\ &\leq \max\{\alpha(n, \ell^t), \beta(m, \ell^t)\}(T_t(A|B) - T_{-t}(A|B)), \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\gamma(n, L^t), \delta(m, L^t)\} t T_t(A|B) A^{-1} T_t(A|B) \\ &\leq T_t(A|B) - S(A|B) \\ &\leq \max\{\gamma(n, \ell^t), \delta(m, \ell^t)\} t T_t(A|B) A^{-1} T_t(A|B), \end{aligned} \tag{44}$$

ただし

$$\begin{aligned} A\sharp_t B &= A^{1/2}(A^{-1/2} B A^{-1/2})^t A^{1/2}, \\ S(A|B) &= A^{1/2} \log(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}, \\ T_t(A|B) &= A^{1/2} \ln_t(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}. \end{aligned}$$

Proof. $\ell A \leq B \leq LA$ かつ A は invertible であるので, 両辺に左右から $A^{-1/2}$ をかけると $\ell 1_H \leq A^{-1/2} B A^{-1/2} \leq L 1_H$. $X = A^{-1/2} B A^{-1/2}$ とおく． $[\ell, L]$ に含まれる spectra をもつ X についての functional calculus を施すと不等式 (41) より任意の $t > 0$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\alpha(n, L^t), \beta(m, L^t)\} \left(\frac{X^t - 1_H}{t} - \frac{1_H - X^{-t}}{t} \right) \\ &\leq \log X - \frac{1_H - X^{-t}}{t} \\ &\leq \max\{\alpha(n, \ell^t), \beta(m, \ell^t)\} \left(\frac{X^t - 1_H}{t} - \frac{1_H - X^{-t}}{t} \right). \end{aligned} \tag{45}$$

ここで (45) の両辺に左右から $A^{1/2}$ をかけると次を得る．

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\alpha(n, L^t), \beta(m, L^t)\} A^{1/2} \left(\frac{X^t - 1_H}{t} - \frac{1_H - X^{-t}}{t} \right) A^{1/2} \\ &\leq A^{1/2} \log X - A^{1/2} \frac{1_H - X^{-t}}{t} A^{1/2} \\ &\leq \max\{\alpha(n, \ell^t), \beta(m, \ell^t)\} A^{1/2} \left(\frac{X^t - 1_H}{t} - \frac{1_H - X^{-t}}{t} \right) A^{1/2}. \end{aligned}$$

$$A^{1/2} \frac{1_H - X^{-t}}{t} A^{1/2} = A^{1/2} \frac{X^{-t} - 1_H}{-t} A^{1/2} = T_{-t}(A|B)$$

であるので (43) を得る． 同様に (42) を用いると任意の $t > 0$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\gamma(n, K^t), \delta(m, K^t)\} t \left(\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} \right)^2 \\ &\leq \frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} - \log(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \qquad (46) \\ &\leq \max\{\gamma(n, k^t), \delta(m, k^t)\} t \left(\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} \right)^2. \end{aligned}$$

(46) の両辺に左右から $A^{1/2}$ をかけると次を得る．

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\gamma(n, L^t), \delta(m, L^t)\} t A^{1/2} \left(\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} \right)^2 A^{1/2} \\ &\leq A^{1/2} \frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} A^{1/2} - A^{1/2} \log(A^{-1/2}BA^{-1/2}) A^{1/2} \\ &\leq \max\{\gamma(n, \ell^t), \delta(m, \ell^t)\} t A^{1/2} \left(\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} \right)^2 A^{1/2}. \end{aligned}$$

$$A^{1/2} \left(\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t - 1_H}{t} \right)^2 A^{1/2} = T_t(A|B) A^{-1} T_t(A|B)$$

であるので (44) を得る． □

(43) と (44) において $t = 1$ とおくと次が得られる．

Corollary 4.2 A, B を *positive invertible operators*, $0 < \ell < L$ を $\ell A \leq B \leq LA$ を満たす定数とする．このとき任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\alpha(n, L), \beta(m, L)\}(B - A)(A^{-1} - B^{-1})A \\ &\leq S(A|B) - (B - A)B^{-1}A \\ &\leq \max\{\alpha(n, \ell), \beta(m, \ell)\}(B - A)(A^{-1} - B^{-1})A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\gamma(n, L), \delta(m, L)\}(B - A)A^{-1}(B - A) \\ &\leq B - A - S(A|B) \\ &\leq \max\{\gamma(n, \ell), \delta(m, \ell)\}(B - A)A^{-1}(B - A). \end{aligned}$$

Proof. $t = 1$ のとき $T_1(A|B) = B - A$ かつ $T_{-1}(A|B) = (B - A)B^{-1}A$.

$$\begin{aligned} & T_1(A|B) - T_{-1}(A|B) = B - A - (B - A)B^{-1}A \\ = \ & (B - A)(I - B^{-1}A) = (B - A)(A^{-1} - B^{-1})A \end{aligned}$$

であるので, 結論が得られる． □

Acknowledgement The author was partially supported by JSPS KAKENHI 19K03525. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

[1] P. Cerone and S.S.Dragomir, *Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives satisfying certain convexity assumptions*, Demonstratio Math., vol.37, no.2, pp.299-308, 2004.

[2] S.S.Dragomir and R.p.Agarwal, *Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula*, Appl. Math. Lett., vol.11, no.5, pp.91-95, 1998.

[3] S.S.Dragomir, P.Cerone and A.Sofo, *Some remarks on the midpoint rule in numerical integration*, Studia Univ. Babes-Bolyai, Math., vol.XLV, no.1, pp.63-74, 2000.

[4] S.S.Dragomir, P.Cerone and A.Sofo, *Some remarks on the trapezid rule in numerical integration*, Indian J. Pure Appl. Math., vol.31, no.5, pp.475-494, 2000.

[5] A.El Farissi, Z.Latreuch and B.Balaidi, *Hadamard type inequalities for near convex functions*, Gazata Matematica Seria A, no.1-2, 2010.

[6] S.Furuichi and H.R.Moradi, *Advances in mathematical inequalities*, De Gruyter, 2020.

[7] F,Kubo and T.Ando, *Means of positive operators*, Math. Ann. vol.264, pp.205-224, 1980.

[8] F.C.Mitroi-Symeonidis, *About the precision in Jensen-Steffensen inequality*, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform., vol.37, no.4, pp.73-84, 2010.

[9] R.Pal, M.Singh, M.S.Moslehian and J.S.Aujla, *A new class of operator monotone functions via operator means*, Linear and Multilinear Algebra, vol.64, no.12, pp.2463-2473, 2016.

[10] Slavko Simic and Bandar Bin-Mohsin, *Some generalizations of the Hermite-Hadamard integral inequality*, Journal of Inequalities and Applications, 2021:72, pp.1-7,2021.

[11] K.Yanagi, *Refined Hermite-Hadamard inequality and weighted logarithmic mean*, Linear and Nonlinear Analysis, vol.6, no.2, pp.167-177, 2020.

[12] K.Yanagi, *Refined Hermite-Hadamard inequality and its application*, Linear and Nonlinear Analysis, vol.7, no.2, pp.173-183, 2021.