Isozaki-Kitada modifierについて

Kouichi Taira

Department of Mathematical Sciences,
Ritsumeikan university

1 Introduction

1.1 背景

本稿では，Schrödinger 作用素

$$H_0 = -\Delta, \quad H = H_0 + V(x)$$

の長距離型散乱で用いられる Isozaki-Kitada modifier の簡単な構成法について，できるだけ簡単な構成法を説明する（2 章）．更に，Enss による修正波動作用素の存在と漸近完全性の証明で用いられた漸近物理量の存在についても解説する（3 章）．ここで，$V(x)$ は実数値関数を表し，

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \le C_\alpha \langle x\rangle^{-\mu-|\alpha|},\ \mu > 0. \tag{1.1}$$

を満たすと仮定する．

ポテンシャル V が短距離型のとき，つまり $\mu > 1$ のときには波動作用素

$$W_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_0} \tag{1.2}$$

が存在して漸近完全，つまり $W_\pm$ が H の絶対連続部分空間へのユニタリ作用素となることが知られている：

$$HE_{ac}(H) = W_\pm H_0 W_\pm^{-1}.$$

特に H の絶対連続部分は H_0 とユニタリ同値になる．これは H の絶対連続スペクトルの構造は H_0 のスペクトルの構造と本質的に同じであることを意味している．

一方 V が長距離型のとき，つまり $\mu > 0$ のときには波動作用素 (1.2) は存在するとは限らない．しかし，スペクトル論において重要なのは H_0 と H の絶対連続部分を結ぶユニタリ作用素を構成することなので，(1.2) が存在しなくても悲観する必要はない．そこで，(1.2) を少し修正した作用素

$$W_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}Je^{-itH_0}$$

が存在して漸近完全になるか（この極限が存在して漸近完全になるような有界作用素 J を見つけることができるか）という問題を考えると，0 エネルギー部分を無視すればこれは

概ね肯定的に解くことができる [2]．一方，[2] における J の構成は古典軌道の詳細な評価に基づいており，近年の論文 [5] において詳しい証明が書かれているが，これを実行するのはかなり困難である．

そこで，ここでは Yafaev の議論（[8]，[9, §10]）に基づいて J の簡単な構成法について述べよう．実際には Yafaev は何故か $\mu > 1/2$ の場合のみを取り扱っていて，この場合は J が少し悪いシンボルを持つ擬微分作用素になって多少扱いやすくなるが，本質的に $\mu > 0$ の場合も同じ議論ができる．

1.2 修正波動作用素の存在と漸近完全性の証明の概略

（修正）波動作用素の存在の証明の概略を話そう．Enss の方法において，存在の証明と漸近完全性の証明は本質的に等価なので，基本的には存在の証明がわかればよい．

そのために Cook-Kuroda の方法による波動作用素の存在の証明を思い出す：$u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ は $\operatorname{supp} \hat{u} \subset [a^2, b^2]$ を満たすものとする．このとき（修正）波動作用素の存在の証明のためには

$$\frac{d}{dt} e^{itH} J e^{-itH_0} u = e^{itH}(HJ - H_0 J) e^{-itH_0} u$$

が t に関して可積分であることを示せばよいのであった．e^{-itH} がユニタリ作用素であることを用いると

$$\int_0^\infty \|(HJ - H_0 J) e^{-itH_0} u\| dt < \infty \tag{1.3}$$

となれば十分である．そこで，修正子 J をこの積分が可積分になるように構成することを考える．短距離型の減衰

$$HJ - H_0 J = O(\langle x \rangle^{-\mu-1})$$

をするように J があれば，短距離型の波動作用素の存在の証明と同様にして，(1.3) がわかる．しかし，このような J を探すのは困難（あるいは不可能？）なので，代わりに

- 外向領域（$x \cdot \xi \geq \frac{1}{2}|x||\xi|$ となる領域）及び内向領域（$x \cdot \xi \leq -\frac{1}{2}|x||\xi|$ となる領域）では $HJ - H_0 J = O(\langle x \rangle^{-\mu-1})$ を満たし，
- それ以外の領域（$|x \cdot \xi| \leq \frac{1}{2}|x||\xi|$ となる領域）では長距離型の減衰 $HJ - H_0 J = O(\langle x \rangle^{-\mu})$ をする

ような J を構成しよう．すると，（少し荒い説明ではあるが）外向領域及び内向領域では短距離型の場合と同様にして (1.3) がわかり，それ以外の領域では propagation estimates あるいは one-sided esitimate（時間発展 e^{-itH_0} に沿って，全ての粒子が外向領域に逃げていくことを表す評価）によって (1.3) が成り立つことが示される．実際，この方針で修正波動作用素の存在と完全性が証明できる（[8, §4]，[9, §10]））．

外向領域と内向領域以外の領域の処理については，本質的には one-sided な評価（[3, Lemma 2.1 (1)]）を用いることができる．一方，Enss による元々の証明はこの方針とは少しだけ異なっていて，そこでは，漸近物理量の存在定理を用いる．この証明は例えば [1, Proof of Theorem 2.4] と [7, Sketch of Proof for Lemma 2.4] に載っているが，（自分にとって）よくわからなかったので，詳細な証明を 3 章にて与える．

2 Isozaki-Kitada modifier

2.1 Cook-Kuroda's idea and the Eikonal equation

まず，$HJ - JH_0$ を計算してみよう．

Lemma 2.1. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ を実数値関数とし，$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$J_\varphi u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,\xi)}\hat{u}(\xi)d\xi$$

と定める．このとき，

$$HJ_\varphi u(x) - J_\varphi H_0 u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla\varphi(x,\xi)|^2 + V(x) - |\xi|^2 - i\Delta_x\varphi(x,\xi))e^{i\varphi(x,\xi)}\hat{u}(\xi)d\xi \tag{2.1}$$

が成り立つ．

証明．$\widehat{H_0 u}(\xi) = |\xi|^2\hat{u}(\xi)$ なので，J_φ の定義から

$$HJ_\varphi u(x) - J_\varphi H_0 u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta_x + V(x) - |\xi|^2)e^{i\varphi(x,\xi)}\hat{u}(\xi)d\xi$$

が成り立つ．一方，

$$-\Delta_x e^{i\varphi(x,\xi)} = -\nabla_x(i\nabla_x\varphi(x,\xi)e^{i\varphi(x,\xi)}) = \left(|\nabla_x\varphi(x,\xi)|^2 - i\Delta_x\varphi(x,\xi)\right)e^{i\varphi(x,\xi)}$$

なので (2.1) が従う．

□

この Lemma から，

$$|\nabla\varphi(x,\xi)|^2 + V(x) - |\xi|^2 - i\Delta_x\varphi(x,\xi)$$

が（外向領域，内向領域上で）十分小さくなるように φ を構成すればよいことがわかる．φ を微分すると減衰が良くなるものとすれば，実際には

$$|\nabla\varphi(x,\xi)|^2 + V(x) - |\xi|^2$$

が小さくなれば十分である．この式 $= 0$ となる方程式 $|\nabla\varphi(x,\xi)|^2 + V(x) - |\xi|^2 = 0$ を Eikonal 方程式という．Eikonal 方程式の近似解は，次の節で述べるように外向領域，内向領域上では簡単に構成することができる．それを 1 の分割で貼り合わせると以下の Proposition を得る．

Proposition 2.2. $a > 0$ を固定する．このときある実数値関数 $\varphi = \varphi_a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ が存在して，以下の主張が成り立つ：φ は

$$\begin{aligned}|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(\varphi(x,\xi) - x\cdot\xi)| &\le C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{1-\mu-|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-1-|\beta|},\\ |\partial_x\partial_\xi(\varphi(x,\xi) - x\cdot\xi)| &< \frac{1}{2}\end{aligned}$$

を満たし，

$$J := J_\varphi, \quad S := HJ - JH_0, \quad s(x,\xi) = |\nabla\varphi(x,\xi)|^2 + V(x) - |\xi|^2 - i\Delta_x\varphi(x,\xi)$$

とおくと，

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s(x,\xi)| \le \begin{cases} C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{-1-\mu-|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-1-|\beta|}, \ \textit{if}\ |x\cdot\xi| \ge \frac{1}{2}|x||\xi|, \ |\xi| \ge a/2 \\ C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{-\mu-|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-1-|\beta|}, \ \textit{if}\ |x\cdot\xi| \le \frac{1}{2}|x||\xi|, \ |\xi| \ge a/2 \end{cases}$$

が成り立つ．

Remark 2.3. s は外向領域，内向領域では短距離型の減衰 $O(\langle x\rangle^{-1-\mu})$ をしていて， それ以外の部分では長距離型の減衰 $O(\langle x\rangle^{-\mu})$ をしていることがわかる．先ほど説明したように，この Proposition によって外向領域及び内向領域では波動作用素の存在がわかることになる．

証明. 次の節の Proposition 2.4 で構成された $\varphi_\pm$ を 1 の分割で貼り合わせればよい．貼り合わせの方法については [2, Theorem 2.5] の証明を見よ（この部分は独立に読めるし，読むのは非常に簡単である）． □

2.2 Approximation solutions to the Eikonal equation on outgoing/incoming regions

この節では，Eikonal 方程式

$$|\nabla_x\varphi(x,\xi)|^2 + V(x) = |\xi|^2, \quad \varphi(x,\xi) - x\cdot\xi = O(\langle x\rangle^{1-\mu})$$

の近似解を構成しよう．$k \in \mathbb{R}$ と $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ に対して，

$$a \in S_\pm^k \Leftrightarrow |\partial_x^\alpha \partial_\xi a(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^k |\xi|^{-1-|\beta|} \quad \text{for} \quad \pm x\cdot\xi \ge -\frac{1}{2}|x||\xi|, \ |\xi| \ge 1.$$

と定義する．

Proposition 2.4. ある実数値関数 $\varphi_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ が存在して，

$$|\nabla_x\varphi_\pm(x,\xi)|^2 + V(x) - |\xi|^2 \in S_\pm^{-1-\mu}, \quad \varphi_\pm(x,\xi) - x\cdot\xi \in S_\pm^{1-\mu} \tag{2.2}$$

を満たす．

Remark 2.5. この Proposition は φ_+, φ_- がそれぞれ外向領域上，内向領域上での Eikonal 方程式の近似解でありかつ，φ_+ は外向領域上でのみいい評価を満たし，φ_- は内向領域上でのみいい評価を満たすことを意味している．実際に $\varphi_\pm$ が悪い挙動を示すのは $x\cdot\xi = \mp|x||\xi|$ のときのみなので，この近傍を除けば $\varphi_\pm$ は十分良い挙動をする．つまり，$S_\pm^k$ の定義に現れる $-\frac{1}{2}$ はどんな $\sigma \in (-1,1)$ に置き換えても同じ主張が成り立つ．

証明. $+$ の場合のみ証明しよう．

$$\varphi_+(x,\xi) = x\cdot\xi + \sum_{j=1}^N R_j(x,\xi), \ R_j \in S_+^{1-j\mu}.$$

の形で近似解を探すことを考える．計算すると，

$$
\begin{aligned}
|\nabla_x\varphi_+(x,\xi)|^2+V(x)-|\xi|^2 =&V(x)+2\sum_{j=1}^N\xi\cdot\nabla_xR_j+\sum_{k,l=1}^N\nabla_xR_k\cdot\nabla_xR_l\\
=&V(x)+2\xi\cdot\nabla_xR_1+\sum_{j=2}^N(2\xi\cdot\nabla_xR_j+\sum_{k+l=j}\nabla_xR_k\cdot\nabla_xR_l)\\
&+S_\pm^{-(N+1)\mu}
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
V(x)+2\xi\cdot\nabla_xR_1+\sum_{j=2}^N(2\xi\cdot\nabla_xR_j+\sum_{k+l=j}\nabla_xR_k\cdot\nabla_xR_l)=0
$$

となるように R_j を決めれば良い．そこで

$$
V_0(x,\xi)=V(x),\ V_j(x,\xi)=\sum_{k+l=j}\nabla_xR_k(x,\xi)\cdot\nabla_xR_l(x,\xi)\in S_+^{-j\mu},\ j\geq 1
$$

とおいて，帰納的に

$$
\begin{aligned}
R_j(x,\xi)=&\int_0^\infty V_j(x+2t\xi,\xi)-V_j(2t\xi,\xi)dt\\
=&\frac{1}{2|\xi|}\int_0^\infty V_j(x+t\frac{\xi}{|\xi|},\xi)-V_j(t\frac{\xi}{|\xi|},\xi)dt
\end{aligned}
$$

と定めれば，$R_j\in S_+^{1-j\mu}$ であり，

$$
|\nabla_x\varphi_+(x,\xi)|^2+V(x)-|\xi|^2\in S_+^{-(N+1)\mu}.
$$

がわかる．$(N+1)\mu>1+\mu$ となるように大きく N をとれば，φ_+ は (2.2) を満たす．

□

3 Existence of asymptotic observables

この節の目標は以下の定理を証明することである．

Theorem 3.1. *[1, Theorem 2.4]* $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき，$u\in\mathcal{H}_{ac}(H)$ に対し，

$$
\lim_{|t|\to\infty}\left\|\left(f\left(\frac{x}{2t}\right)-f(D_x)\right)e^{-itH}u\right\|=0
$$

が成り立つ．

これは，散乱状態にある粒子は $|t|\to\infty$ で古典軌道に沿って運動していることを意味している．

3.1 A key estimate

Theorem 3.1 は本質的には以下の Proposition から従う．

Proposition 3.2. $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}_{ac}(H)$ に対し，

$$\lim_{|t|\to\infty} \left\| \left(\frac{x}{2t} - D_x \right) e^{-itH} u \right\| = 0$$

が成り立つ．

Remark 3.3. 今の場合，e^{-itH} は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を保つので，$e^{-itH}u$ に $\frac{x}{2t} - D_x$ を作用させた関数は $L^2(\mathbb{R}^n)$ に入ることに注意せよ．

これは [7, Lemma 2.4] の証明内で示されているが，もう少し詳しく証明を書こう．まず，$V = 0$ の場合を証明してみよう．

Lemma 3.4. $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$\lim_{|t|\to\infty} \left\| \left(\frac{x}{2t} - D_x \right) e^{-itH_0} u \right\| = 0$$

が成り立つ．

Remark 3.5. 実際には，$\left\| (x - 2tD_x)\, e^{-itH_0} u \right\| = \|xu\|$ が成り立つ．

証明. $A = \frac{x \cdot D_x + D_x \cdot x}{2}$ とおく．簡単な計算により，

$$[H_0, i|x|^2] = 4A,\ [H_0, iA] = 2H_0,\ \left(\frac{x}{2t} - D_x \right)^2 = \frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{1}{t}A + H_0 \tag{3.1}$$

となるので，

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{2t} - D_x \right)^2 = -\frac{|x|^2}{2t} + \frac{1}{t^2}A, \quad [H_0, i\left(\frac{x}{2t} - D_x \right)^2] = \frac{1}{t^2}A - \frac{2}{t}H_0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{2t} - D_x \right)^2 + [H_0, i\left(\frac{x}{2t} - D_x \right)^2] = -\frac{2}{t}\left(\frac{|x|^2}{4t} - \frac{1}{t}A + H_0 \right) = -\frac{2}{t}\left(\frac{x}{2t} - D_x \right)^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

である．よって，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\| \left(\frac{x}{2t} - D_x \right) e^{-itH_0} u \right\|^2 =& \frac{d}{dt}(u, e^{itH_0}\left(\frac{x}{2t} - D_x \right)^2 e^{-itH_0}u) \\ =& (u, e^{itH_0}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{2t} - D_x \right)^2 + [H_0, i\left(\frac{x}{2t} - D_x \right)^2] \right) e^{-itH_0}u) \\ =& -\frac{2}{t}(u, e^{itH_0}\left(\frac{x}{2t} - D_x \right)^2 e^{-itH_0}u) \\ =& -\frac{2}{t}\left\| \left(\frac{x}{2t} - D_x \right) e^{-itH_0} u \right\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ．この常微分方程式を解けば，ある定数 $C \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\left\| \left(\frac{x}{2t} - D_x \right) e^{-itH_0} u \right\|^2 = \frac{C}{t^2}$$

と書けるので，$|t| \to \infty$ とすればこれが 0 に収束することがわかる．

$\square$

Theorem 3.2 の証明．$t \geq 0$ の場合のみ考える．3 つの等式

$$\lim_{t\to\infty}(e^{-itH}u, \frac{|x|^2}{4t^2}e^{-itH}u) = (u, Hu), \quad \lim_{t\to\infty}(e^{-itH}u, \frac{1}{t}Ae^{-itH}u) = 2(u, Hu), \tag{3.3}$$

$$\lim_{t\to\infty}(e^{-itH}u, H_0e^{-itH}u) = (u, Hu) \tag{3.4}$$

を証明すれば十分である．実際，(3.1)，(3.3)，(3.4) より，

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{x}{2t} - D_x\right)e^{-itH}u\right\|^2 =&(e^{-itH}u, \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{1}{t}A + H_0\right)e^{-itH}u)\\ \to&(u, Hu) - 2(u, Hu) + (u, Hu) = 0, \quad t \to \infty\end{aligned}$$

を得る．

まず，(3.3) の 2 式目を証明する．関数 W を

$$W(x) = -2V(x) + [V(x), iA]$$

と定義する．(3.1) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{-itH}u, Ae^{-itH}u) =&(e^{-itH}u, [H, iA]e^{-itH}u)\\ =&(e^{-itH}u, (2H_0 + [V(x), iA])e^{-itH}u)\\ =&2(u, Hu) + (e^{-itH}u, W(x)e^{-itH}u)\end{aligned}$$

となる．両辺を積分すると，

$$(e^{-itH}u, Ae^{-itH}u) - (u, Au) = 2t(u, Hu) + \int_0^t (e^{-isH}u, W(x)e^{-isH}u)ds \tag{3.5}$$

を得る．長距離型の仮定 (1.1) から $|x| \to \infty$ で $W(x) = O(\langle x\rangle^{-\mu})$ となるので，RAGE Theorem（[6, p.341, Theorem XI. 115]）と $u \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ から，

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t (e^{-isH}u, W(x)e^{-isH}u)ds\right| \leq C\frac{1}{t}\int_0^t \|\langle x\rangle^{-\frac{\mu}{2}}e^{-isH}u\|^2 ds \to 0 \ t \to \infty$$

が成り立つ．よって，(3.5) の両辺を t で割って $t \to \infty$ とすると，(3.3) の 2 式目を得る．

次に，(3.3) の 1 式目を証明する．(3.1) と (3.5) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{-itH}u, |x|^2e^{-itH}u) =&(e^{-itH}u, [H, i|x|^2]e^{-itH}u)\\ =&4(e^{-itH}u, Ae^{-itH}u)\\ =&4(u, Au) + 8t(u, Hu) + 4\int_0^t (e^{-isH}u, W(x)e^{-isH}u)ds\end{aligned}$$

となるので，両辺を積分すれば

$$\begin{aligned}(e^{-itH}u, |x|^2e^{-itH}u) - (u, |x|^2u) =&4t(u, Au) + 4t^2(u, Hu)\\ &+ 4\int_0^t (t-s)(e^{-isH}u, W(x)e^{-isH}u)ds\end{aligned} \tag{3.6}$$

を得る．長距離型の仮定 (1.1) から $|x| \to \infty$ で $W(x) = O(\langle x \rangle^{-\mu})$ となるので，

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2}\left|\int_0^t (t-s)(e^{-isH}u, W(x)e^{-isH}u)ds\right| \le& \frac{1}{t}\left|\int_0^t (e^{-isH}u, W(x)e^{-isH}u)ds\right| \\ \le& \frac{C}{t}\int_0^t \|\langle x \rangle^{-\frac{\mu}{2}} e^{-isH}u\|^2 ds\end{aligned}$$

であり，RAGE Theorem（[6, p.341, Theorem XI. 115]）と $u \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ から，これは $t \to \infty$ で 0 に収束する．よって，(3.6) の両辺を $4t^2$ で割って $t \to \infty$ とすると，(3.3) の 1 式目が成り立つことがわかる．

最後に (3.4) を証明しよう．

$$\begin{aligned}(e^{-itH}u, H_0 e^{-itH}u) =& (e^{-itH}u, He^{-itH}u) - (e^{-itH}u, V(x)e^{-itH}u) \\ =& (u, Hu) - (e^{-itH}u, V(x)e^{-itH}u)\end{aligned}$$

となるので，右辺の 2 項目が $t \to \infty$ で 0 に収束することを言えば良い．$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}_{ac}(H)$ なので，$w = (H-i)^{-1}u$ とおけば $w \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ が成り立つ．よって，長距離型の仮定 (1.1) により

$$|(e^{-itH}u, V(x)e^{-itH}u)| \le C\|\langle x \rangle^{-\frac{\mu}{2}}(H-i)^{-1}e^{-itH}w\|^2$$

となる．$w \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ なので $e^{-itH}w$ は 0 に弱収束し，$\langle x \rangle^{-\frac{\mu}{2}}(H-i)^{-1}$ はコンパクト作用素なので $\|\langle x \rangle^{-\frac{\mu}{2}}(H-i)^{-1}e^{-itH}w\|^2$ は 0 に収束する．これで，(3.4) が証明された．

□

3.2 Theorem 3.1 の証明

Theorem 3.1 の証明に移る前に，1 つ補題を用意しよう．

Lemma 3.6. $\eta \in \mathbb{R}^n$ とする．
(*i*) $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とすると，$e^{is\eta\cdot(\frac{x}{2t} - D_x)}u(x) = e^{is\frac{\eta\cdot x}{2t}}u(x - s\eta)$.
(*ii*) $(e^{i\frac{\eta\cdot x}{2t}} - e^{i\eta\cdot D_x}) = e^{i\eta\cdot D_x}\cdot(e^{-i\frac{|\eta|^2}{2t}}e^{i\eta\cdot(\frac{x}{2t} - D_x)} - 1)$.

Remark 3.7. (*ii*) に関して，Baker-Campell-Hausdorff の公式と x, D_x に関する 2 階以上の交換子が消えることを用いて証明することができる（[1, (4.29)]）が，ここではより直接的な証明を与える．このような初等的な等式に対して Baker-Campell-Hausdorff の公式を用いるのは，少なくとも自分にとっては over kill であるように感じる．

証明. (*i*) $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とすると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(e^{is\frac{\eta\cdot x}{2t}}u(x - s\eta)\right)|_{s=0} =& i\frac{\eta\cdot x}{2t}u(x) - \eta\cdot\partial_x u(x) \\ =& i\eta\cdot\left(\frac{x}{2t} - D_x\right)u(x),\end{aligned}$$

が成り立つので，全ての $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^{is\eta\cdot(\frac{x}{2t} - D_x)}u(x) = e^{is\frac{\eta\cdot x}{2t}}u(x - s\eta)$$

となる．$\eta\cdot(\frac{x}{2t}-D_x)$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上本質的自己共役なので，これは $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対しても成り立つ．$s=1$ として，特に，$e^{i\eta\cdot(\frac{x}{2t}-D_x)}u(x)=e^{i\frac{\eta\cdot x}{2t}}u(x-\eta)$ を得る．
(ii) 簡単な計算により，

$$\begin{aligned}
e^{-i\eta\cdot D_x}\circ e^{i\eta\cdot\frac{x}{2t}}u(x)=&e^{i\frac{\eta\cdot(x-\eta)}{2t}}u(x-\eta)\\
=&e^{-i\frac{|\eta|^2}{2t}}e^{i\frac{\eta\cdot x}{2t}}u(x-\eta)\\
=&e^{-i\frac{|\eta|^2}{2t}}e^{i\eta\cdot(\frac{x}{2t}-D_x)}u(x)
\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}
(e^{i\frac{\eta\cdot x}{2t}}-e^{i\eta\cdot D_x})u(x)=&e^{i\eta\cdot D_x}\cdot(e^{-i\eta\cdot D_x}\cdot e^{i\frac{\eta\cdot x}{2t}}-1)u(x)\\
=&e^{i\eta\cdot D_x}\cdot(e^{-i\frac{|\eta|^2}{2t}}e^{i\eta\cdot(\frac{x}{2t}-D_x)}-1)u(x).
\end{aligned}$$

が従う．

□

Theorem 3.1 の証明．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{H}_{ac}(H)$ は $\mathcal{H}_{ac}(H)$ で稠密なので，$u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{H}_{ac}(H)$ としてよい．Fourier 反転公式より，

$$f\left(\frac{x}{2t}\right)-f(D_x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\eta)(e^{\frac{i\eta\cdot x}{2t}}-e^{i\eta\cdot D_x})d\eta \tag{3.7}$$

が成り立つ．

$w\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする．今，Lemma 3.6 によって

$$\begin{aligned}
\|(e^{\frac{i\eta\cdot x}{2t}}-e^{i\eta\cdot D_x})w\|=&\|e^{i\eta\cdot D_x}\cdot(e^{-i\frac{|\eta|^2}{2t}}e^{i\eta\cdot(\frac{x}{2t}-D_x)}-1)w\|\\
=&\|(e^{-i\frac{|\eta|^2}{2t}}e^{i\eta\cdot(\frac{x}{2t}-D_x)}-1)w\|\\
\leq&\|(e^{i\eta\cdot(\frac{x}{2t}-D_x)}-1)w\|+\|(e^{i\frac{|\eta|^2}{2t}}-1)w\|
\end{aligned}$$

である．$B=\eta\cdot(\frac{x}{2t}-D_x)$ は自己共役なので e^{isB} はユニタリ作用素であり，

$$\begin{aligned}
\|(e^{iB}-1)w\|=&\|\int_0^1 e^{isB}Bwds\|\\
\leq&\|Bw\|
\end{aligned}$$

となる．また，Taylor の定理より $|e^{i\frac{|\eta|^2}{2t}}-1|\leq\frac{|\eta|^2}{2|t|}$ なので，

$$\begin{aligned}
\|(e^{\frac{i\eta\cdot x}{2t}}-e^{i\eta\cdot D_x})w\|\leq&\|Bw\|+\frac{|\eta|^2}{2|t|}\|w\|\\
\leq&|\eta|\left\|\left(\frac{x}{2t}-D_x\right)w\right\|+\frac{|\eta|^2}{2|t|}\|w\|
\end{aligned}$$

を得る．$w=e^{-itH}u$ として (3.7) を用いると，$f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ より

$$\left\|\left(f\left(\frac{x}{2t}\right)-f(D_x)\right)e^{-itH}u\right\|\leq C\left\|\left(\frac{x}{2t}-D_x\right)e^{-itH}\right\|+\frac{C}{2|t|}\|u\|$$

を得る．Proposition 3.2 を用いれば，この式の右辺は $|t|\to\infty$ で 0 に収束する．これで Theorem 3.1 が証明された．

□

References

[1] V. Enss, Asymptotic observables on scattering states. Comm. Math. Phys. **89** (1983), no. 2, 245–268.

[2] H. Isozaki, H. Kitada, Modified wave operators with time independent modifiers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **32** (1985) 77–104.

[3] H. Isozaki, H. Kitada, H, A remark on the microlocal resolvent estimates for two body Schrödinger operators. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), no. 5, 889–910.

[4] S. Nakamura, Modified wave operators for discrete Schrödinger operators with long-range perturbations, J. Math. Phys. **55** (2014), 112101.

[5] S. Nakamura, Long-range scattering matrix for Schrödinger-type operators, to appear in Anal. PDE.

[6] M. Reed, B. Simon, *The Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I–IV. Academic Press, 1972–1980.

[7] D. Robert, On scattering theory for long range perturbations of Laplace operators. J. Anal. Math. **59** (1992), 189–203.

[8] D.R. Yafaev, The Scattering amplitude for the Schrödinger equation with a long-range potential, Commun. Math. Phys. **191**, (1998), 183–218.

[9] D.R. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory. Analytic Theory, Mathematical Surveys and Monographs, 158. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.*