Regret Robustness の多次元への拡張

(A Multi-dimensional Extension of Regret Robustness)

秋田県立大学大学院 システム科学技術研究科 経営システム工学専攻 [1]
秋田県立大学　システム科学技術学部　経営システム工学科 [2,3,4]
爲島海太 [1], 木村寛 [2], 星野満博 [3], 荒谷洋輔 [4]

Kaita Tameshima[1],Yutaka Kimura[2],Mitsuhiro Hoshino[3] and Yousuke Araya[4]
Course of Management Science and Engineering, Graduate School of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University[1]
Department of Management Science and Engineering, Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University [2,3,4]

1 はじめに

最適化問題に関する研究は理論から応用まで幅広く行われており，生産計画やスケジューリング、配送計画、金融問題など，現実の社会の中でも様々な分野で適用されている．このような問題のなかには最適化したい目的がひとつではなく複数存在するときや数理モデルで用いるデータの中には外れ値や計測ミスをはじめとした不確実性に対してパフォーマンスの劣化を抑制したいときもあり，これら 2 つの要望が同時に求められる場合がある．多目的のロバスト最適化問題における最適化解について考えるにあたりベクトルの最大値や最小値について議論をする必要があり，T.Tanino[8] ではベクトルの上限の形に対する解釈が述べられている．M.Goerigk 他 [4] では，単一目的のロバスト最適化問題におけるロバスト性の概念や性質についてまとめられている．また，J.Ide 他 [6] では，代表的なロバスト性の概念ごとに単一目的のロバスト最適化問題を多目的のロバスト最適化問題へ拡張し，拡張した問題の解の概念についてまとめられている．加えて概念間の関係性についてもまとめられている．

本稿では先述した 2 つの要素を regret の観点から導入した単一問題のロバスト最適化問題 [4] を拡張し，新たな 2 つの解の概念を提案する．またそれら解の特徴付けを行い，数値実験を行うことでそれら解の具体的性質を論じる．

2 多目的最適化問題

$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ を実行可能集合，$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^k$ をベクトル値関数とする．このとき，$x \in \mathcal{X}$ に対する $f(x)$ を最小化する問題を多目的最適化問題とよび次のように与える [6]：

$$
(\mathrm{MP}) \left| \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{X}. \end{array} \right. \tag{1}
$$

$\mathbb{R}^k$ においては全順序が存在しないため，通常とは異なる順序関係によってベクトル関数の最小値を定義する必要がある．$y^1, y^2 \in \mathbb{R}^k$ とする．このとき，各順序を以下のように定義する．

- $y^1 \leq y^2 \Leftrightarrow y_i^2 \in [y_i^1, \infty)$ for all $i = 1, 2, \ldots, k$
- $y^1 \preceq y^2 \Leftrightarrow y_i^2 \in [y_i^1, \infty)$ for all $i = 1, 2, \ldots, k$ and $y^1 \neq y^2$
- $y^1 < y^2 \Leftrightarrow y_i^2 \in (y_i^1, \infty)$ for all $i = 1, 2, \ldots, k$

多目的最適化問題 (MP) において，次の式を満たすような $x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\}$ が存在しないとき，$\hat{x}$ を問題 (MP) の efficient とよぶ.

$$f(x) \in \{f(\hat{x})\} - \mathbb{R}^k_{\succeq}. \tag{2}$$

また，$\{f(\hat{x})\} - \mathbb{R}^k_{\geq}$ および，$\{f(\hat{x})\} - \mathbb{R}^k_{>}$ を満たすような $x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\}$ が存在しないとき，$\hat{x}$ をそれぞれ問題 (MP) の strictly efficient ,weakly efficient よぶ.

3 Regret Robustness

Regret とは，目的関数の実際の値とシナリオにおける最良の値との差のことをいい，それを最小化することでロバスト性を担保しようとする考え方である．これに基づいた最適化問題を次のように与える [4]：

$$\mathcal{P}(\xi) \left| \begin{array}{ll} \min & \sup \ (f(x, \xi) - f^*(\xi)) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{X}. \end{array} \right. \tag{3}$$

ここで関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，実行可能集合 $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$，シナリオの集合 (不確実性集合) $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ とし，シナリオ $\xi \in \mathcal{U}$ は目的関数の特定のパラメータの値を示す．また，$\mathcal{P}(\xi)$ は $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ の１つの問題を示す.

集合 $Y \subset \mathbb{R}^1$ の sup を $\hat{y}$ とし，次のように定義する [8].

$$\hat{y} = \sup Y \ \text{ iff } \begin{cases} \text{(i) } \hat{y} \geqq y \ \text{ for any } y \in Y; \\ \text{(ii)if } y' \geqq y \ \text{ for any } y \in Y, \ \text{ then } y' \geqq \hat{y}. \end{cases} \tag{4}$$

問題 $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ において次の式を満たすような $x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\}$ が存在しないとき $\hat{x} \in \mathcal{X}$ を robust optimal とよぶ.

$$\sup_{\xi \in \mathcal{U}} (f(x, \xi) - f^*(\xi)) \ < \ \sup_{\xi \in \mathcal{U}} (f(\hat{x}, \xi) - f^*(\xi)). \tag{5}$$

また，$\sup_{\xi \in \mathcal{U}} (f(x, \xi) - f^*(\xi)) \ \leq \ \sup_{\xi \in \mathcal{U}} (f(\hat{x}, \xi) - f^*(\xi))$ を満たすような $x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\}$ が存在しないとき，$\hat{x}$ を問題 $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ の unique robust optimal とよぶ.

4　本研究

4.1　集合的解釈による拡張

不確実性集合 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ に対して任意の固定されたシナリオを $\xi \in \mathcal{U}$ とし，目的関数 $f(\cdot,\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$，不確実性集合 $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ とする．このとき，次の最適化問題

$$\mathrm{RMP}_1(\xi)\left|\begin{array}{ll} \min & f(x,\xi) - f^*(\xi) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{X} \end{array}\right. \tag{6}$$

を考える．ただし，$f^*(\xi)$ はシナリオ $\xi \in \mathcal{U}$ で最小または最大の目的値のベクトルである．また，$\mathrm{RMP}_1(\xi)$ は $\mathrm{RMP}_1(\mathcal{U})$ の１つの問題である．この問題における解を次のように定義する．

定義 4.1 $\hat{x} \in \mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_1(\mathcal{U})$ における set-based minimax regret robust efficient であるとは

$$f_{\mathcal{U}}(x) \subset f_{\mathcal{U}}(\hat{x}) - \mathbb{R}^k_{\succeq} \tag{7}$$

を満たす $x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\}$ が存在しないことをいう．ただし，

$$f_{\mathcal{U}}(x) := \{f(x,\xi) - f^*(\xi) : \xi \in \mathcal{U}\}. \tag{8}$$

さらに上記の式の $\mathbb{R}^k_{\succeq}$ が $\mathbb{R}^k_{\geq}, \mathbb{R}^k_{>}$ であるとき，$\hat{x}$ はそれぞれ，strictly set-based minimax regret robust efficient (以下 strictly s-b.minimax r.r.e.) ,weakly set-based minimax regret robust efficient (以下 weakly s-b.minimax r.r.e.) とよぶ.

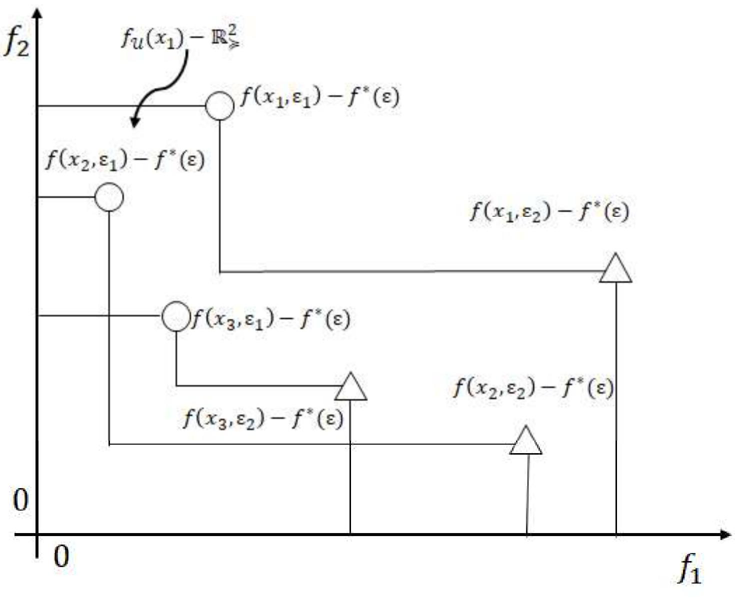

図 1: x_2, x_3 が s-b.minimax r.r.e. の例

図 4.1 は x_2, x_3 が s-b.minimax r.r.e. となる例を示す図となっている．実行可能解は 3 つ x_1, x_2, x_3，シナリオは 2 つ ξ_1, ξ_2 あると仮定して解のシナリオごとのパフォーマンスが図のようになったとする．例えば，$f_{\mathcal{U}}(x_1) - \mathbb{R}^2_{\succeq}$ は $f(x_1, \xi_1) - f^*(\xi), f(x_1, \xi_2) - f^*(\xi)$ から凸錐 $\mathbb{R}^2_{\succeq}$ をそれぞれ引いた領域の和集合となっていて，x_1 の 2 つの点をつなぐ実線は $f_{\mathcal{U}}(x_1) - \mathbb{R}^2_{\succeq}$ のとる領域を示している．図より $x_i (i = 2, 3)$ の領域と x_1 の領域との関係が

$$f_{\mathcal{U}}(x_1) \subset f_{\mathcal{U}}(x_i) - \mathbb{R}^k_{\succeq}$$

とはならないため，x_2, x_3 が s-b.minimax r.r.e. となる．

$\hat{x}$ が s-b.minimax r.r.e. について，目的関数が一つの場合 $(k = 1)$ とシナリオが一つの場合 $(|\mathcal{U}| = 1)$ について以下の命題と系が成り立つ．

命題 4.1 $k = 1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_1(\mathcal{U})$ における s-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ が unique robust optimal であることは同値である．

[証明]

$k = 1$ のとき，$\hat{x}$ が s-b.minimax r.r.e. ならば，$\hat{x}$ が robut optimal であることを示す．$\hat{x}$ が s-b.minimax r.r.e であるとすると，次を満たす $x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\}$ が存在しない．

$$f_u(x) \subset f_u(\hat{x}) - \mathbb{R}^k_{\succeq} \tag{9}$$

$k = 1$ のとき (9) 式は次のようになる．

$$\nexists x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\} \ : \ \sup_{\xi \in \mathcal{U}} (f(x, \xi) - f^*(\xi)) < \sup_{\xi \in \mathcal{U}} (f(\hat{x}, \xi) - f^*(\xi)).$$

すなわち，これは robust optimal の定義にあたることから，$\hat{x}$ は robust optimal である．

次に $k = 1$ のとき，$\hat{x}$ が robut optimal であるとき，$\hat{x}$ が s-b.minimax r.r.e. であるであることを示す. $\hat{x}$ が robust optimal であるとき，次を満たす $x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\}$ が存在しない．

$$\sup_{\xi \in \mathcal{U}} (f(x, \xi) - f^*(\xi)) < \sup_{\xi \in \mathcal{U}} (f(\hat{x}, \xi) - f^*(\xi)). \tag{10}$$

上記の式を次のように書き換える．

$$\nexists x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\} : f_u(x) - \mathbb{R}^k_{\succeq} \subset f_u(\hat{x}) - \mathbb{R}^k_{\succeq}.$$

したがって，$\hat{x}$ は s-b.minmax r.r.e. である．以上より，命題 4.1 が成り立つ． □

系 4.1 $k = 1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_1(\mathcal{U})$ における strictly s-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ が unique robust optimal であることは同値である．

系 4.2 $k = 1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_1(\mathcal{U})$ における weakly s-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ が robust optimal であることは同値である．

命題 4.2 $|\mathcal{U}| = 1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_1(\mathcal{U})$ における s-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ が efficient であることは同値である．

[証明]

$|\mathcal{U}|=1$ のとき，$\hat{x}\in\mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_1(\mathcal{U})$ における s-b.minimax r.r.e. ならば，$\hat{x}$ は efficient であることを示す．$\hat{x}$ が s-b.minimax r.r.e. であるとき，次を満たす $x\in\mathcal{X}\backslash\{\hat{x}\}$ が存在しない．

$$f_u(x)\subset f_u(\hat{x})-\mathbb{R}^k_{\succeq}. \tag{11}$$

$|\mathcal{U}|=1$ より，式は次のようになる．

$$\nexists x\in\mathcal{X}\backslash\{\hat{x}\}:f(x)-f^*\in f(\hat{x})-f^*-\mathbb{R}^k_{\succeq}. \tag{12}$$

ここで上記式の f^* は 1 点集合であるから次の式が成り立つ．

$$\nexists x\in\mathcal{X}\backslash\{\hat{x}\}:f(x)\in f(\hat{x})-\mathbb{R}^k_{\succeq}.$$

したがって $\hat{x}$ は efficient となる．

次に $|\mathcal{U}|=1$ のとき，$\hat{x}\in\mathcal{X}$ が efficient ならば，$\hat{x}$ は s-b. minimax r.r.e. であることを示す．$\hat{x}$ が efficient であるとは，次を満たす $x\in\mathcal{X}\backslash\{\hat{x}\}$ が存在しない．

$$f(x)\in f(\hat{x})-\mathbb{R}^k_{\succeq}. \tag{13}$$

ここで，一点集合 f^* を (1) の両辺から引くと次のようになる．

$$\nexists x\in\mathcal{X}\backslash\{\hat{x}\}:f(x)-f^*\in f(\hat{x})-f^*-\mathbb{R}^k_{\succeq}.$$

$|\mathcal{U}|=1$ のとき，上記の式は次のようになる．

$$\nexists x\in\mathcal{X}\backslash\{\hat{x}\}:f(x)-f^*\in f(\hat{x})-f^*-\mathbb{R}^k_{\succeq}.$$

したがって，$\hat{x}$ は s-b.minimax r.r.e. であり，以上より命題 4.2 が成り立つ． □

系 4.3 $|\mathcal{U}|=1$ のとき，$\hat{x}\in\mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_1(\mathcal{U})$ における weakly s-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ が weakly efficient であることは同値である．

系 4.4 $|\mathcal{U}|=1$ のとき，$\hat{x}\in\mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_1(\mathcal{U})$ における strictly s-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ が strictly efficient. であることは同値である．

4.2 点的解釈による拡張

不確実性集合 $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^m$ に対して任意の固定されたシナリオを $\xi\in\mathcal{U}$ とし，目的関数 $f(\cdot,\xi):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$，不確実性集合 $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^n$ とする．このとき，次の最適化問題を

$$\mathrm{RMP}_2(\xi)\left|\begin{array}{ll}\min & \sup\limits_{\xi\in\mathcal{U}}\ (f(x,\xi)-f^*(\xi))\\ \text{s.t.} & \quad x\in\mathcal{X}\end{array}\right. \tag{14}$$

を考える．ただし，

$$\sup_{\xi\in\mathcal{U}}\left(f(x,\xi)-f^*(\xi)\right) := \begin{pmatrix} \sup_{\xi\in\mathcal{U}}\left(f_1(x,\xi)-\ f_1^*(\xi)\right) \\ \vdots \\ \sup_{\xi\in\mathcal{U}}\left(f_k(x,\xi)-\ f_k^*(\xi)\right) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

なお，$\mathrm{RMP}_2(\xi)$ は $\mathrm{RMP}_2(\mathcal{U})$ の１つの問題である．

定義 4.2 $\hat{x}\in\mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_2(\mathcal{U})$ における point-based minimax regret robust efficient であるとは

$$f_{\mathcal{U}}^{\max}(x)\in f_{\mathcal{U}}^{\max}(\hat{x})-\mathbb{R}^k_{\succeq} \tag{16}$$

を満たす $x\in\mathcal{X}\backslash\{\hat{x}\}$ が存在しないことをいう．ただし，

$$f_{\mathcal{U}}^{\max}(x) := \sup_{\xi\in\mathcal{U}}\left(f(x,\xi)-f^*(\xi)\right). \tag{17}$$

さらに上記の式の $\mathbb{R}^k_{\succeq}$ が $\mathbb{R}^k_{\geq},\mathbb{R}^k_{>}$ であるとき，$\hat{x}$ はそれぞれ，strictly point-based minimax regret robust efficient(以下 strictly p-b.minimax r.r.e.),weakly point-based minimax regret robust efficient(以下 weakly p-b.minimax r.r.e.) とよぶ．

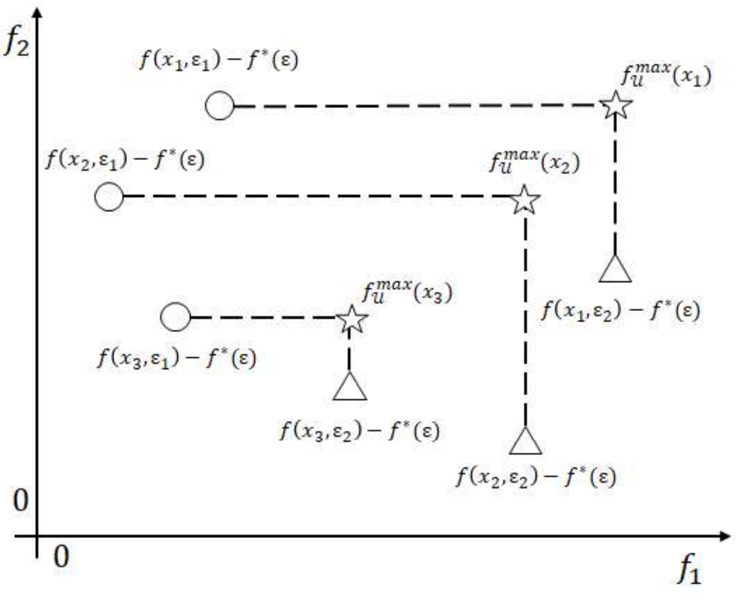

図 2: x_3 が p-b.minimax r.r.e. の例

図 4.2 は x_3 が p-b.minimax r.r.e. である例を示す図となっている．実行可能解は３つ x_1,x_2,x_3，シナリオは２つ ξ_1,ξ_2 あると仮定して解のシナリオごとのパフォーマンスが図のようになったとする.$f_{\mathcal{U}}^{\max}(x_1), f_{\mathcal{U}}^{\max}(x_2), f_{\mathcal{U}}^{\max}(x_3)$ は各実行可能解の代表点となっている．

例えば，$f^{\max}_{\mathcal{U}}(x_1)$ の f_2 軸は，$f(x_1,\xi_1)-f^*(\xi)$ の f_2 における値で f_1 軸は $f(x_1,\xi_2)-f^*(\xi)$ の f_1 における値となっている．ある実行可能解の代表点はその実行可能解が各軸で取りうる値の最大値によって作られる．図より x_3 の代表点と他の解 $x_i(i=2,3)$ の代表点との関係が

$$f^{\max}_{\mathcal{U}}(x_i) \in f^{\max}_{\mathcal{U}}(x_3) - \mathbb{R}^k_{\succeq}$$

となる x_i が存在しないため，x_3 が p-b.minimax r.r.e. となる．

$\hat{x}$ が p-b.minimax r.r.e. について，目的関数が一つの場合 ($k=1$), シナリオが一つの場合 ($|\mathcal{U}|=1$) について以下のような命題と系が成り立つ．

命題 4.3 $k=1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_2(\mathcal{U})$ における p-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ は unique robust optimal であることは同値である．

[証明]

$k=1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が p-b.minimax r.r.e. ならば，$\hat{x}$ は unique robust optimal であることを示す．$\hat{x}$ が p-b.minimax r.r.e. であるとき，次の式を満たす $x \in \mathcal{X}\backslash\{\hat{x}\}$ が存在しない．

$$f_u(x) \subset f_u(\hat{x}) - \mathbb{R}^k_{\succeq}. \tag{18}$$

$k=1$ のとき，(18) 式は以下のようになる．

$$\nexists x \in \mathcal{X}\backslash\{\hat{x}\} \ : \ \sup_{\xi\in\mathcal{U}}(f(x,\xi)-f^*(\xi)) < \sup_{\xi\in\mathcal{U}}(f(\hat{x},\xi)-f^*(\xi)).$$

これより，$\hat{x}$ は robust optimal である．

次に $k=1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が unique robust optimal ならば，$\hat{x}$ は p-b. minimax r.r.e. であることを示す．$\hat{x}$ が robust optimal であるとき，次の式を満たす $x \in \mathcal{X}\backslash\{\hat{x}\}$ が存在しない．

$$\sup_{\xi\in\mathcal{U}}(f(x,\xi)-f^*(\xi)) < \sup_{\xi\in\mathcal{U}}(f(\hat{x},\xi)-f^*(\xi)). \tag{19}$$

(19) 式を次のように書き換える．

$$\nexists x \in \mathcal{X}\backslash\{\hat{x}\} : f_u(x) - \mathbb{R}^k_{\succeq} \subseteq f_u(\hat{x}) - \mathbb{R}^k_{\succeq}.$$

したがって $\hat{x}$ は p-b.minimax r.r.e. となり，以上より命題 4.3 が成り立つ． □

系 4.5

$k=1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_2(\mathcal{U})$ における strictly p-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ が unique robust optimal であることは同値である．

系 4.6

$k=1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_2(\mathcal{U})$ における weakly p-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ が robust optimal であることは同値である．

命題 4.4 $|\mathcal{U}|=1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_2(\mathcal{U})$ における p-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ が efficient であることは同値である．

[証明]

$|\mathcal{U}|=1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が p-b.minimax r.r.e. ならば，$\hat{x}$ は efficient. であることを示す．$\hat{x}$ が p-b.minimax r.r.e. であるとき，次の式を満たす $x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\}$ が存在しない．

$$f_u^{\max}(x) \in f_u^{\max}(\hat{x}) - \mathbb{R}^k_{\succeq}. \tag{20}$$

$|\mathcal{U}|=1$ より，(20) 式は次のようになる．

$$\nexists x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\} : f(x,\xi) - f^*(\xi) \in f(\hat{x},\xi) - f^*(\xi) - \mathbb{R}^k_{\succeq}. \tag{21}$$

ここで (21) 式の $f^*(\xi)$ は 1 点集合であるから (21) の式は次のようになる．

$$\nexists x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\} : f(x) \in f(\hat{x}) - \mathbb{R}^k_{\succeq}.$$

したがって，$\hat{x}$ は efficient であり，(1) が成り立つ．

次に $|\mathcal{U}|=1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が efficient. ならば，$\hat{x}$ は p-b. minimax r.r.e. であることを示す．$\hat{x}$ が efficient であるとき，次の式を満たす $x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\}$ が存在しない．

$$f(x) \in f(\hat{x}) - \mathbb{R}^k_{\succeq}. \tag{22}$$

ここで，一点集合 $f^*(\xi)$ を (22) の両辺から引くと次のようになる．

$$\nexists x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\} : f(x) - f^*(\xi) \in f(\hat{x}) - f^*(\xi) - \mathbb{R}^k_{\succeq}. \tag{23}$$

$|\mathcal{U}|=1$ のとき，(4.2) 式は次のようになる．

$$\nexists x \in \mathcal{X} \backslash \{\hat{x}\} : f_u^{\max}(x) \in f_u^{\max}(\hat{x}) - \mathbb{R}^k_{\succeq}.$$

したがって，$\hat{x}$ は p-b.minimax r.r.e. であり，以上より命題 4.4 が成り立つ． $\square$

系 4.7 $|\mathcal{U}|=1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_2(\mathcal{U})$ における strictly p-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ が strictly efficient であるこは同値である．

系 4.8 $|\mathcal{U}|=1$ のとき，$\hat{x} \in \mathcal{X}$ が $\mathrm{RMP}_2(\mathcal{U})$ における weakly p-b.minimax r.r.e. であることと $\hat{x}$ が weakly efficient であることは同値である．

5　ポートフォリオ最適化の数値実験

5.1　実験概要

提案した2つの解，s-b.minimax r.r.e. と p-b.minimax r.r.e. の性質を論じるためにポートフォリオの数値実験を行った．実験では1期をひと月，第1期を2018/11/1における株価，第2期を2018/12/1における株価とし，2018/11/1から2022/8/1までの45期間の収益率データを収集したのち，直近36期間の収益率のデータを基に5つの投資資産への最適投資比率を計4つのモデル$(\mathrm{P}_1), (\mathrm{P}_2), (\mathrm{P}_3), (\mathrm{P}_4)$でそれぞれで求める．例えば，37期の投資比率を求める場合は1期から36期までのデータをもとに算出する．これを9回繰り返す．その後，求めた投資比率で実際にポートフォリオを運営した場合に得られたであろう収益率と分散をモデル同士で比較する．5つの資産は「トヨタ自動車(株)」,「(株) 東芝」,「(株) メディアリンクス」,「(株) オウケイヴェェイブ」の株と預金（最大で10万円）とし，総資産を100万円とした．使用した資産の収益率データの一部をいかに記載する．

表 1: 各資産の収益率

期	1. トヨタ	2. 東芝	3. メディア	4. オウケイ	5. 預金
1	−0.058	−0.119	−0.208	−0.441	0
2	0.0419	0.1080	0.0304	0.309	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
45	0.0215	−0.017	−0.038	0.0544	0

5.2　比較する4つのモデル

比較する4つのモデルのうち2つは提案した解の概念に基づいたモデルで，残る2つは提案モデルと比較するためのモデルとなっている．比較するモデルは両方とも Markowitz[5] の平均分散モデルから派生したモデルを用いる．

資産iの期待収益率をμ_i，資産iと資産jとの共分散をσ_{ij}とすると，ポートフォリオの期待収益率$\hat{\mu}$とその分散σ^2は次で定義される．

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i \tag{24}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_i w_j. \tag{25}$$

平均分散モデルはポートフォリオの期待収益率$\hat{\mu}$が投資家の要求する期待収益率$\hat{\mu}_E$以上である制約の下で，リスク(分散)σ^2を最小化する資産iへの投資比率$w_i (i = 1, 2, \cdots, n)$を求める2次計画問題として定式化される．

$$
\left|\begin{array}{ll}
\min & \sigma^2 \\
\text{s.t.} & \hat{\mu} \geq \hat{\mu}_E \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\
& w_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).
\end{array}\right. \tag{26}
$$

比較モデルのうちの一つはこのモデルにおける期待収益率の制約を除いたモデル (P_1) で，これによって組まれるポートフォリオは「最小分散ポートフォリオ」とよばれる. もう一つの比較モデル (P_2) は (P_1) の目的関数をポートフォリオの収益率にしたため，収益率の最大化を図るモデルとなっている．(P_1)，(P_2) は以下である．

$$
(\mathrm{P}_1)\left|\begin{array}{ll}
\min & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij} w_i w_j \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\
& w_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n).
\end{array}\right.
$$

$$
(\mathrm{P}_2)\left|\begin{array}{ll}
\min & -\sum_{i=1}^{n} r_i w_i \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\
& w_i \geq 0.
\end{array}\right.
$$

提案モデル $(\mathrm{P}_3), (\mathrm{P}_4)$ は，それぞれ set-based minimax regret robust efficient と point-based minimax regret robust efficient を基にしたモデルとなっている．両方の提案モデルの目的関数は $(\mathrm{P}_1), (\mathrm{P}_2)$ と関連性を持たせるためこのモデルの目的関数はポートフォリオの収益率のリグレットとその分散のリグレットとする．目的関数 $f(\cdot, \xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ とし，

$$
(\mathrm{P}_3)\left|\begin{array}{ll}
\min & f(w, \xi) - f^*(\xi) \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\
& w_i \geq 0
\end{array}\right.
$$

$$
(\mathrm{P}_4)\left|\begin{array}{ll}
\min & \sup_{\xi \in \mathcal{U}} \left(f(w, \xi) - f^*(\xi)\right) \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\
& w_i \geq 0
\end{array}\right.
$$

とする．

5.3 計算結果

$(\mathrm{P}_1),(\mathrm{P}_2)$ は株式会社 NTT 数理システム様が提供されている Nuorium Optimizer で $(\mathrm{P}_3),(\mathrm{P}_4)$ は Python で，それぞれコードを組んで計算をした．計算した結果，各モデルの収益率の推移は表２，３のようになった．各表は縦が期を示していて，各セルの中はポートフォリオの収益率である．解１，解２,$\cdots$ は同じ期に複数の解が算出されたときに，区別するために採用したもので，同じ解番号であっても期が異なる場合は同じ投資比率であるとは限らない．

表 2 は $(\mathrm{P}_1),(\mathrm{P}_2),(\mathrm{P}_3)$ の結果をまとめた表である．(P_1) の目的関数は分散の最小化であり，安定した収益率の推移が得られた．一方で (P_2) は収益率の変動が激しく，特に大きく収益率が下がった部分が目立つ．このモデルは収益の最大化を狙ったものでポートフォリオの安定を考慮していないため，ある程度変動が激しいものになると想定していたが想像以上に下振れた結果となった．(P_4) は第 38 期と第 43 期に解が 2 つ出たが，全体的には安定した収益率が得られた．また，他のモデルと比較してプラスの収益となる期が多かった．

表３は (P_3) の結果をまとめた表である．(P_3) は他のモデルと比較しても同じ期に多くの解を算出した点で特徴的だったが，これによりモデルのパフォーマンスの評価が難しく今回は評価を保留にした．今後の課題点としてこういったモデルの評価方法が挙げられる．(P_1) もしくは (P_2) の選んだ解の少なくともどちらか一方と同じであることが分かった．このことからあくまで今回の実験では，(P_4) の選んだ解は (P_1),(P_2) の選んだ解を包括していることが分かった．また，各モデルでの期待収益率とその分散は (P_4) で 0.7%,0.0014,(P_2) は 0.26%,0.0017,(P_2) は -9.2%,0.0188 と (P_4) は期待収益率，分散ともに比較対象のモデルより優れたパフォーマンスを示した．

表 2: $(\mathrm{P}_1),(\mathrm{P}_2),(\mathrm{P}_4)$ の各期の収益

期	(P_1)	(P_2)	(P_4)	
			解 1	解 2
37	0.041	0.000	0.041	
38	0.002	-0.360	0.002	-0.078
39	-0.039	-0.038	-0.038	
40	0.015	0.015	0.015	
41	0.078	-0.052	0.078	
42	0.014	-0.316	0.014	
43	-0.077	-0.105	-0.077	0.006
44	-0.011	0.014	0.014	
45	0.000	0.014	0.014	

表 3: (P_3) の各期の収益

期	解 1	解 2	解 3	解 4	解 5	解 6	解 7	解 8	解 9
37	0.0000	0.041	0.003	0.031	0.031				
38	−0.109	−0.078							
39	−0.207	−0.019	−0.038						
40	0.139	0.171	0.148						
41	0.050	−0.038	0.064	−0.023	0.078	−0.009			
43	−0.069	−0.248	−0.054	−0.128	−0.181	0.014	−0.113		
43	−0.109	−0.183	−0.247	−0.077	−0.073	−0.137	−0.026	−0.105	0.006
44	0.019	−0.017	0.074	0.038	0.002	0.044	0.014		
45	−0.013	−0.023	−0.013	0.001	−0.011	0.014	0.002	0.015	

参考文献

[1] Hassene Aissi and Cristina Bazgan and Daniel Vanderpooten, Approximation of min-max and min-max regret versions of some combinatorial optimization problems.,European Journal of Operational Research, 2007

[2] Aharon Ben-Tal and Arkadi Nemirovski , Robust Convex Optimization , Mathematics of Operations Research, 1998

[3] Matthias Ehgott and Jonas Ide and Anita Schöbel, Minmax robustness for multiobjective optimization problems, European Journal Of Operational Research, 2014

[4] Marc Goerigk and Jonas Ide and Anita Schöbel, Algorithm Engineering in Robust Optimization,Algorithm Engineering pp 245-279, 2015

[5] Markowitz Harry Max ,“ Portfolio selection: Efficient diversification of investments, ” John Wiley, NewYork, 1959. 31

[6] Jonas Ide and Anita Schöbel, Robustness for uncertain multi-objective optimization : a survey and analysis of different concepts ,OR Spectrum,2016

[7] Daishi Kuroiwa and Gue Myung Lee, On Robust Multiobjective Optimization ,European Journal of Operational Research, 2012

[8] Tetsuzo Tanino ,On Supremum of a Set in a Multi-dimensional Space, Journal of Mathematical Analysis and Applications pp386-397, 1988