零点定理の凸解析とゲーム理論への応用
Applications of zero-point theorems to convex analysis and game theory

川崎英文 *
Hidefumi Kawasaki
九州大学大学院数理学研究院
Faculty of Mathematics, Kyushu University

Abstract

本稿では Poincaré-Miranda の定理 [7, 6] と Hadamard の定理 [2] の 2 つの零点定理を考察する．前者は $\mathbb{R}^n$ の矩形 $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ からそれ自身への連続写像 g に対する零点定理で，Brouwer の不動点定理と同値である．川崎 [3] は n 次元中間値の定理与え，それが Poincaré-Miranda の定理と同値であることを示した．さらに，対戦型ゲームへの応用を図り，混合戦略により実現可能な利得関数の値域を示した．一方，Hadamard の定理は n 次元単位球から $\mathbb{R}^n$ への連続写像に対する零点定理であり，これも Brouwer の不動点定理と同値である．本稿の主たる目的は，Hadamard の定理を集合値写像に拡張し，それを凸関数の劣微分に適用することにより，劣微分の零点定理を与えることである．また，Poincaré-Miranda の定理の対戦型ゲームへの応用に関して，[3, 4] の内容を補足する．

1 序

零点定理とは，連続写像 $g : X \to Y$ が何らかの仮定の下で $g(x^*) = 0$ なる点 $x^* \in X$ をもつことを主張する定理である．連続写像 $f : X \to Y$ と，固定した $y \in Y$ に対して $g(x) = y - f(x)$ をとれば，零点定理から形式的に中間値の定理が導かれる．逆に，中間値の定理で $y = \mathbf{0}$ をとれば零点定理が得られる．また，$Y = X$ の場合に $g(x) = x - f(x)$ をとれば，零点定理から不動点定理が導かれる．以下において，I を $\mathbb{R}^n$ の矩形 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ とする．

本稿で扱う零点定理は Hadamard の定理と Poincaré-Miranda の定理である．Hadamard の定理は $\mathbb{R}^n$ の閉単位球 B から $\mathbb{R}^n$ への連続写像に対する零点定理であるが，単位閉球を内部が空でないコンパクト凸集合としても定理は成立する．

定理 1 （Hadamard の零点定理）$C \subset \mathbb{R}^n$ を内部が空でないコンパクト凸集合として，a をその内点とする．連続写像 $g : C \to \mathbb{R}^n$ が境界条件

$$g(x)^T (x - a) \geq 0 \quad (x \in \partial C) \tag{1}$$

を満たすならば，g は C に零点をもつ．

*kawasaki.hidefumi.245@m.kyushu-u.ac.jp

定理 2 （Poincaré-Miranda の定理）連続写像 $g = (g_1, \dots, g_n) : I \to \mathbb{R}^n$ について，各 g_i が境界条件 (2) または (3) を満たすならば g は I に零点をもつ．

$$g_i(x) \leq 0 \ (x \in I,\ x_i = a_i), \quad 0 \leq g_i(x) \ (x \in I,\ x_i = b_i), \tag{2}$$

$$g_i(x) \geq 0 \ (x \in I,\ x_i = a_i), \quad 0 \geq g_i(x) \ (x \in I,\ x_i = b_i). \tag{3}$$

連続写像 $f : I \to \mathbb{R}^n$ と $\gamma \in \mathbb{R}^n$ に対して，$g(x) = \gamma - f(x)$ をとり，Poincaré-Miranda の定理を適用することにより，次の n 次元中間値の定理 [3] が導かれる．

定理 3 （n 次元中間値の定理）連続写像 $f : I \to \mathbb{R}^n$ に対して

$$\overline{\alpha_i} := \max\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = a_i\},\ \overline{\beta_i} := \max\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = b_i\},$$

$$\underline{\alpha_i} := \min\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = a_i\},\ \underline{\beta_i} := \min\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = b_i\}$$

とおくとき，

$$\min\{\overline{\alpha_i},\ \overline{\beta_i}\} \leq \gamma_i \leq \max\{\underline{\alpha_i},\ \underline{\beta_i}\} \quad (i = 1, \dots, n) \tag{4}$$

を満たす任意の $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ に対して，$f(c) = \gamma$ なる $c \in I$ が存在する．さらに，(4) が狭義の不等式で成立する γ_i については $a_i < c_i < b_i$ が成立する．

2 Hadamard の定理の集合値写像への拡張

連続微分可能な関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の勾配ベクトル $g = \nabla f$ に Hadamard の定理を適用すると，境界条件 $\nabla f(x)(x - a) \geq 0$ $(x \in \partial C)$ から停留点 $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$ の存在が直ちに導かれる．さらに，境界条件が狭義の不等式で成立するならば x^* は C の内点である．これを劣微分に拡張するには，Hadamard の零点定理の集合値写像版が必要になる．次の定理の証明には Mawhin [5] のアイディアを用いている．

定理 4 $C \subset \mathbb{R}^n$ を内部が空でないコンパクト凸集合として，a をその内点とする．$G : C \to \mathbb{R}^n$ を $G(x)$ が非空な凸集合であるような集合値写像で，そのグラフ $\{(x, y) \mid x \in C,\ y \in G(x)\}$ はコンパクトとする．G が境界条件

$$p^T(x - a) \geq 0 \quad (p \in G(x),\ x \in \partial C) \tag{5}$$

を満たすならば，$\mathbf{0} \in G(x^*)$ なる $x^* \in C$ が存在する．また，(5) が狭義の不等式で成立するならば，x^* は C の内点である．

注意 1 $G(x)$ は閉凸集合で，境界条件 (5) は p に関して線形なので，$G(x)$ の端点（extreme point）p について (5) を確認すれば十分である．

証明． $F(x) = \pi(x) - G(\pi(x))$ で集合値写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を定義する．$\pi(x) \in C$ は有界で，G のグラフも有界なので，F のグラフも有界である．また，π は連続写像で，G のグラフは閉集合なので，F のグラフは閉集合である．さらに，$G(\pi(x))$ は閉凸集合なので，$F(x)$ も閉凸集合である．そこで，

$$\mathrm{graph}(H) := \mathrm{graph}(F) \cap (B_r \times \mathbb{R}^n)$$

により集合値写像 $H : B_r \to B_r$ を定義すると，$\mathrm{graph}(H)$ はコンパクトであり，角谷の不動点定理の仮定を満たす．よって，不動点 $x^* \in H(x^*)$ が存在する．$x^* \in B_r$ なので，$H(x^*) = F(x^*) = \pi(x^*) - G(\pi(x^*))$．故に，

$$\pi(x^*) - x^* \in G(\pi(x^*)). \tag{6}$$

ここで，もし $x^* \notin C$ ならば，(6) の両辺と $\pi(x^*) - a$ の内積をとると，境界条件 (5) から，$(\pi(x^*) - a)^T(\pi(x^*) - x^*) \geq 0$．これは射影の基本的な性質 $(\pi(x^*) - a)^T(\pi(x^*) - x^*) < 0$ に矛盾である．よって $x^* \in C$ であり，$\pi(x^*) = x^*$ となる．故に，(6) から $\mathbf{0} \in G(x^*)$．また，狭義の不等式が成立するとき，$x^* \in \partial C$ ならば，$0 < \mathbf{0}^T(x^* - a) = 0$ となり矛盾である．∎

定理 5 定理 4 から角谷の不動点定理が導かれる．

証明． $C \neq \emptyset$ をコンパクト凸集合として，集合値写像 $F : C \to C$ のグラフはコンパクトとする．まず，$C = B_r$ の場合を示す．$G(x) := x - F(x)$ とすると，任意の $x \in \partial C$, $p \in G(x)$ に対し，$p = x - y$ なる $y \in F(x)$ が存在する．このとき，$p^T x = x^T x - y^T x \geq r^2 - r \parallel y \parallel \geq 0$．$a = 0$ として，定理 4 を G に適用すると，$\mathbf{0} \in G(x^*)$ なる $x^* \in C$ が存在する．故に $x^* \in F(x^*)$．

C が一般のコンパクト集合のときは，C を含む閉球 B_r をとり，集合値写像 $H : B_r \to C \subset B_r$ を $H(x) = F(\pi(x)) \subset C$ で定義する． このとき，H のグラフコンパクトになり，証明の前半から $x^* \in H(x^*)$ なる $x^* \in B_r$ が存在する．$x^* \in H(x^*) \subset C$ なので，$\pi(x^*) = x^*$ であり，$x^* \in F(x^*)$ が得られる．∎

3 凸解析への応用

恒等的に値 ∞ をとる関数を自明な凸関数と言う．自明でない凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ を真凸関数と言う．下半連続な真凸関数を閉真凸関数と言う．関数 f が下半連続であることと，エピグラフ $\mathrm{epi} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}$ が閉集合であることは同値である．劣微分の以下の性質から，集合値写像としての劣微分は境界条件を除く定理 4 の仮定を自動的に満たす．

(C1) 劣微分 $\partial f(x)$ は空を許して，閉凸集合である．f が真凸関数のとき，$\partial f(x)$ が非空かつ有界であるための必要十分条件は $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ である [8, Theorem 23.4]．

(C2) 閉真凸関数 f とコンパクト集合 $S \subset \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ に対して，$\cup_{x \in S} \partial f(x)$ はコンパクトである [8, Theorem 24.7]．

(C3) 劣微分 ∂f のグラフは $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ の閉集合である [8, Theorem 24.4]．

(C4) 凸関数 f は $\mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ で連続である [8, Theorem 10.1]．

(C5) 真凸関数 f に対して，f が微分可能な店全体は $\mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ で稠密である [8, Theorem 25.5]．

(C6) 閉真凸関数 f に対して，f の微分可能な点 x_n で x に収束し，極限 $\lim_{n \to \infty} \nabla f(x_n)$ が存在する，その極限全体を $S(x) = \{\lim_{n \to \infty} \nabla f(x_n) \mid x_n \to x\}$ とすると，

$$\partial f(x) = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}\, S(x)) \tag{7}$$

が成立する．ただし，右辺は $S(x)$ の凸包の閉包である [8, Theorem 25.6]．

定理 6 真凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ の実効定義域の内部が空でないとする．C を $\mathrm{dom} f$ の内部に含まれるコンパクト凸集合として，a を C の内点とする．関数 f が境界条件

$$p^T(x-a) \geq 0 \quad (p \in \partial f(x),\ x \in \partial C) \tag{8}$$

を満たすならば，$\mathbf{0} \in \partial f(x^*)$ なる $x^* \in C$ が存在する．逆に，$x^* \in C$ を C 上での f の最小点とすると，f は次の不等式を満たす．

$$p^T(x-x^*) \geq 0 \quad (p \in \partial f(x),\ x \in \partial C). \tag{9}$$

証明． ∂f を C に制限した集合値写像 $G : C \to \mathbb{R}^n$ を $G(x) = \partial f(x)$ で定義する．(C1) から，$G(x)$ は非空なコンパクト凸集合になる．(C2) と (C3) から，G のグラフはコンパクトである．よって，前半の主張は定理 4 から導かれる．逆に，$x^* \in C$ を C 上での f の最小点として，(9) を否定すると，$p^T(x-x^*) < 0$ なる点 $x \in \partial C$ と $p \in \partial f(x)$ がある．このとき，$0 < p^T(x^*-x) \leq f(x^*) - f(x)$ となり，$f(x^*) \leq f(x)$ に矛盾である．∎

注意 2 コンパクト集合 C 上の連続な凸関数は最小点 $x^* \in C$ をもつので，f を C に制限した関数を $f|_C$ で表せば，$\mathbf{0} \in \partial f|_C(x^*)$ は自明に成立する．しかし，$\partial f(x^*) \subset \partial f|_C(x)$ なので，$\mathbf{0} \in \partial f(x^*)$ かどうか，すなわち，x^* が $\mathbb{R}^n$ 全体での最小点かどうかは分からない．

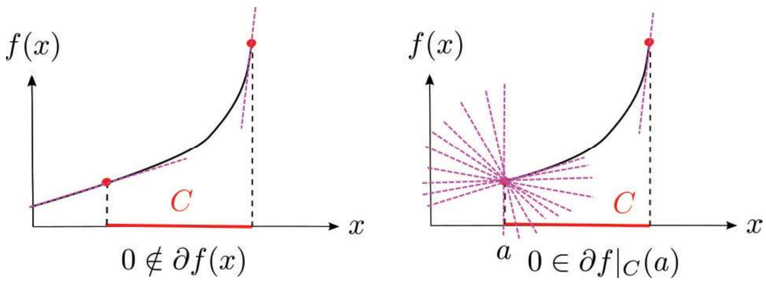

図 1: $\partial f(x) \subset \partial f|_C(x)$.

注意 3 境界条件は p に関して線形なので，$\partial f(x)$ の端点で確認すれば十分である．また，(C5)(C6) から，境界を含む或る開集合内の f が微分可能な点で境界条件の不等式を確かめればよい．しかし，図 3 のように境界の全ての点で微分不可能なこともあるので，境界だけでは十分でない．

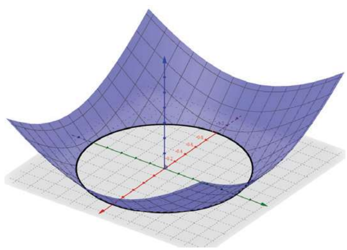

図 2: $f(x_1, x_2) = \max\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1, 0\}$, $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

系 1 定理 6 の仮定の下で，f が次の狭義の境界条件を満たすならば，$\mathbf{0} \in \partial f(x^*)$ なる C の内点 x^* が存在し，x^* は $\mathbb{R}^n$ 上での f の最小点である．

$$p^T(x-a) > 0 \quad (p \in \partial f(x),\ x \in \partial C), \tag{10}$$

逆に，$x^* \in C$ が f の C 上での唯一の最小点ならば，C の内点 a が存在して (10) が成立する．

証明. 前半は x^* が C の内点であることを示せばよい．もし $x^* \in \partial C$ ならば，(10) と $\mathbf{0} \in \partial f(x^*)$ から $0 < \mathbf{0}^T(x^* - a) = 0$ となり矛盾である．逆に，$x^* \in C$ が f の C 上での唯一の最小点のとき，$a = x^*$ をとり，(10) を否定すると，$p^T(x - x^*) \le 0$ なる $x \in \partial C$ と $p \in \partial f(x)$ が存在する．これから，$0 \le p^T(x^* - x) \le f(x^*) - f(x)$ となり，x^* の一意性に矛盾である．∎

例 1 凸関数 $f(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ $(x \in \mathbb{R}^2)$ の劣微分は，$\partial f(\mathbf{0}) = \mathrm{co}\{\pm e_1, \pm e_2\}$, $x \ne \mathbf{0}$ で $\partial f(x) = \mathrm{co}\{(\mathrm{sign} x_i) e_i \mid |x_i| = f(x)\}$（[8, 23 節]）．よって $\mathbf{0} \in \partial f(\mathbf{0})$ である．凸集合 C として単位円盤をとり，$x_\theta = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とすると，

$$\partial f(x_{\frac{\pi}{4}}) = [e_1, e_2],\ \partial f(x_{\frac{3\pi}{4}}) = [-e_1, e_2],\ \partial f(x_{\frac{5\pi}{4}}) = [-e_1, -e_2],\ \partial f(x_{\frac{-\pi}{4}}) = [e_1, -e_2].$$

ただし，$[e_1, e_2]$ は e_1, e_2 を結ぶ線分を表す．それ以外の θ で $\partial f(x_\theta)$ は 1 点集合である．

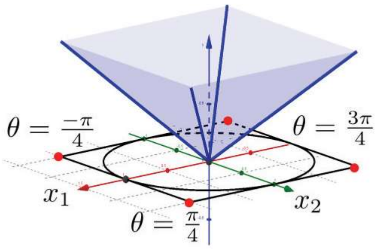

図 3: $f(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

C の内点 a として原点をとると，f は定理 6 の仮定を満たす（図 4 左）．一方，C として $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1\}$ をとると，境界条件を満たさない（図 4 右）．$(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ は f の C 上での最小点であるが，$\mathbb{R}^2$ 全体での最小点ではない．

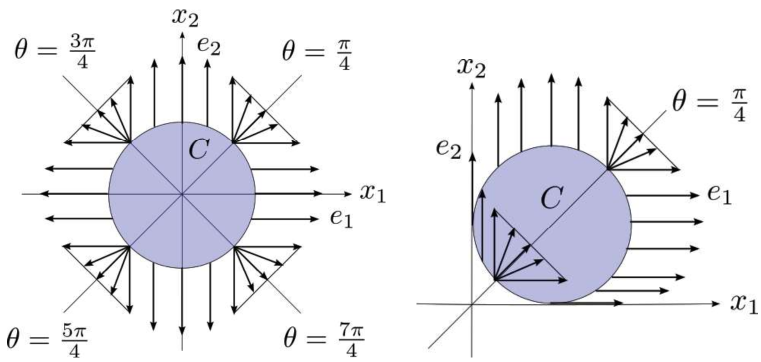

図 4: ∂C 上での $\partial f(x)$．左は境界条件 (8) を満たすが，右は満たさない．

注意 4 Clarke 微分 $\partial f(x)$ に対して本節と同様の結果を与えることができる．ただし，$\mathbf{0} \in \partial f(x^*)$ が x^* の最小性を意味するわけではない．Clarke 微分については [1] を参照するとよい．

4　n 人戦略形ゲームへの応用

本節では n 次元中間値の定理（定理 3）を純戦略が 2 つの次の n 人戦略形ゲームに適用した結果 [3, 4] を補足する．

プレイヤーを $i=1,\dots,n$ とする．各プレイヤーの選択肢（純戦略）を $j\in\{1,2\}$ とし，j ではない選択肢を $\bar{j}$ で表す．1 次元確率ベクトルの空間を Δ_1 で表す．プレイヤー i の確率ベクトル $\boldsymbol{x}_i=(x_i^1,x_i^2)\in\Delta_1$ が混合戦略である．プレイヤー i の利得関数を多重線形関数

$$f_i(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)=\sum_{j_1=1}^{2}\cdots\sum_{j_n=1}^{2}a_i^{j_1\cdots j_n}x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n} \tag{11}$$

で与える．ただし，$a_i^{j_1\cdots j_n}$ $(i=1,\dots,n.,\ j=1,2)$ は実定数である．プレイヤー i は他のプレイヤーの戦略を考慮して，利得 f_i の最大化を図る．

定理 7 ([4]) 各プレイヤーが 2 つの純戦略をもつ上述の n 人戦略形ゲームにおいて，

$$\begin{aligned}\underline{\alpha_k}&:=\min\{a_k^{j_1\cdots j_n}\mid j_k=1,\ j_i=1,2\ (i\neq k)\},\\ \overline{\alpha_k}&:=\max\{a_k^{j_1\cdots j_n}\mid j_k=1,\ j_i=1,2\ (i\neq k)\},\\ \underline{\beta_k}&:=\min\{a_k^{j_1\cdots j_n}\mid j_k=2,\ j_i=1,2\ (i\neq k)\},\\ \overline{\beta_k}&:=\max\{a_k^{j_1\cdots j_n}\mid j_k=2,\ j_i=1,2\ (i\neq k)\}\end{aligned} \tag{12}$$

とおく．このとき，

$$\min\{\overline{\alpha_i},\overline{\beta_i}\}\le\gamma_i\le\max\{\underline{\alpha_i},\underline{\beta_i}\}\quad(i=1,\dots,n) \tag{13}$$

を満たす任意の $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ に対して，利得 γ を実現する混合戦略 $(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)\in\Delta_1^n$ が存在する．すなわち，

$$f_i(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)=\gamma_i\quad(i=1,\dots,n).$$

さらに，(13) が狭義の不等式で成立する γ_i については，$\boldsymbol{x}_i=(x_i^1,x_i^2)$ は Δ_1 の内点である．

(12) は n 次元中間値の定理の $\underline{\alpha_i}$, $\overline{\alpha_i}$, $\underline{\beta_i}$, $\overline{\beta_i}$ を多重線形関数 (11) に対して計算したものである．すなわち，プレイヤー i が純戦略 1 を選択し，他のプレイヤーが混合戦略をとったときのプレイヤー i の最小利得が $\underline{\alpha_i}$ で，最大利得が $\overline{\alpha_i}$ である．同様に，プレイヤー i が純戦略 2 を選択し，他のプレイヤーが混合戦略をとったときのプレイヤー i の最小利得が $\underline{\beta_i}$ で，最大利得が $\overline{\beta_i}$ である．したがって，定理 7 は，プレイヤー i が純戦略をとった場合の利得関数 f_i で測ることのできる，混合戦略による f_i の値の範囲を提示している．しかしながら，境界条件 (13) を満たす γ_i が存在しないこともある．次の双行列ゲーム（$n=2$）はそのような例である．$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)\in\Delta_1$ として，利得関数

$$f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}-1&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\quad f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}-1&-2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \tag{14}$$

とすると，$\underline{\alpha}_1=-2$, $\overline{\alpha}_1=0$, $\underline{\beta}_1=-1$, $\overline{\beta_1}=1$ なので，$\min\{\overline{\alpha}_1,\overline{\beta}_1\}=0$, $\max\{\underline{\alpha}_1,\underline{\beta}_1\}=-1$ となり，(13) を満たす γ_1 は存在しない．同様に (13) を満たす γ_2 も存在しない．

5 謝辞

注意 1 と注意 3 は京都大学名誉教授，藤重悟先生のご指摘に基づく．感謝申し上げます．また，本研究は科研費 JSPS KAKENHI Grant Number 20K03751 の助成を受けている．

参　考文献

[1] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, siam, (1990).

[2] J. Hadamard, *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, in: J. Tannery, (ed.) Introduction a la Théorie des Fonctions d'Une Variable. **2**, 2nd ed. Paris: Hermann, 1910, pp. 437–477.

[3] H. Kawasaki, An n-dimensional intermediate value theorem and its application to the game theory, Linear and Nonlinear Analysis, **8**, No.1, (2022) 81–87.

[4] 川崎英文，n 次元中間値の定理と戦略形ゲームへのその応用, 京都大学数理解析研究所考究録「非線形解析学と凸解析学の研究」，研究代表者：豊田昌史，to appear.

[5] J. Mawhin, *Simple Proofs of the Hadamard and Poincaré-Miranda Theorems Using the Brouwer Fixed Point Theorem*, The American Mathematical Monthly. **126** (2019) 260–263.

[6] C. Miranda, *Un osservatore su un teorema di Brouwer*, Boll. Unione Mat. Ital. **3** (1940) 5–7.

[7] H. Poincaré, *Sur certaines solutions particuliéres du probléme des trois corps*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **97** (1883) 251–252.

[8] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, (1970).