有限集合からなる超空間の粗幾何学的無限次元性について (On coarse infinite-dimensionality of hyperspaces of finite subsets)

愛媛大学大学院理工学研究科 山内 貴光
Takamitsu Yamauchi
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

1 序

本稿は, Thomas Weighill 氏, Nicoló Zava 氏との共同研究 [37] に基づく.

表題における粗幾何学的無限次元性は, 漸近次元に関する無限次元性を指す. Gromov [19] によって導入された漸近次元は, 擬等長や粗同値に関して不変であり, 幾何学的群論や粗幾何学で基本的な次元概念である (例えば [29] 参照). また, その定義から, 漸近次元は被覆次元の粗幾何学版とみなすことができる (注意 2.5).

距離空間 (X, d) に対し,

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X : K \neq \varnothing,\ K \text{ はコンパクト }\},$$
$$\mathrm{Fin}(X) = \{A \in \mathcal{K}(X) : A \text{ は有限集合 }\}$$

とする. $\mathcal{K}(X)$ 上に定義される代表的な超空間位相として, 次で定義される Hausdorff 距離 d_H によって生成される位相がある:

$$d_H(E,F) = \inf\{r > 0 : E \subset B_d(F,r) \text{ and } F \subset B_d(E,r)\}, \quad E,F \in \mathcal{K}(X),$$

ここで, $B_d(F,r) = \{x \in X : \exists y \in F\,(d(x,y) < r)\}$ である.

以下, 距離空間 X に対して $\mathcal{K}(X)$ は Hausdorff 距離をもつとし, $\mathrm{Fin}(X)$ は $\mathcal{K}(X)$ の部分距離空間であるとする. 次の 2 つの定理からも分かるように, これら 2 つの超空間は, 通常, 位相次元に関して異なる性質をもつ.

定理 1.1 ([28], [27, 5.1] ([26, Theorem 14.12] 参照)). 非退化な連続体を含む距離空間 X に対し, $\mathcal{K}(X)$ は Hilbert 立方体と同相な部分空間をもつ. 特に, $\mathcal{K}(X)$ は強い無限次元空

間である[*1].

定理 1.2 ([4], [2] 参照)**.** 被覆次元が有限な距離空間 X に対し, $\mathrm{Fin}(X)$ は強可算次元である, すなわち有限次元閉部分空間の可算和として表せる. 特に ([17, Theorem 6.1.10] より), $\mathrm{Fin}(X)$ は弱い無限次元空間である[*2].

一方で, 任意の距離空間 X に対して $\mathcal{K}(X)$ と $\mathrm{Fin}(X)$ は粗同値である (例 2.3 (4)). 従って, これら 2 つの超空間は, 漸近次元に関して同じ様相を示す. $\mathrm{Fin}(X)$ (従って $\mathcal{K}(X)$) が漸近次元に関してどのような性質をもつかを知ることが, 本研究の動機であった.

Dikranjan, Protasov and Zava [12, Proposition 3.3] は, 距離空間 X の漸近次元が 0 ならば, $\mathrm{Fin}(X)$ の漸近次元が 0 であることを示した (注意 2.8 参照). 本稿では, 漸近次元とその無限次元性について振り返ると共に, 長い区間の列 (定義 3.6) が距離空間 X へ粗埋め込み可能ならば (特に, 半直線が X へ粗埋め込み可能ならば), $\mathrm{Fin}(X)$ が "漸近次元に関する強い無限次元性" をもつこと (系 3.9) を説明する.

2 準備

半直線 (非負実数全体からなる実数直線 $\mathbb{R}$ の部分距離空間) を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ で, 非負整数全体のなす集合を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で, 正の整数全体のなす集合を $\mathbb{N}$ で, 集合 A の濃度を $|A|$ で表す. 距離空間を単に X と表したときの X の距離は, d_X で表す. 粗幾何学の基本事項については, [18], [29] を参照.

2.1 粗埋め込みと粗同値

定義 2.1. X, Y を距離空間とし, $f : X \to Y$ を (連続とは限らない) 写像とする.

(1) $f : X \to Y$ が**ボルノロガス (bornologous)** であるとは, 単調非減少な関数 $\rho_+ : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, 任意の $x, x' \in X$ に対し

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x, x'))$$

[*1] 強い無限次元空間 (strongly infinite-dimensional space) の定義については, 例えば [17, Definition 6.1.1] を参照. さらに, [8, Theorem 3.3] より, 距離空間 X が非コンパクト, 局所コンパクトで連結かつ局所連結であれば, $\mathcal{K}(X)$ は Hilbert 立方体から 1 点を除いた空間と同相である.

[*2] 弱い無限次元空間 (weakly infinite-dimensional space) の定義については, 例えば [17, Definition 6.1.1] を参照. さらに, [9, Corollary 4.8] より, 被覆次元が有限な距離空間 X が非退化で σ-コンパクト, 連結かつ局所弧状連結であれば, $\mathrm{Fin}(X)$ は Hilbert 空間 ℓ_2 における有限座標を除いて 0 をとる点全体からなるの部分空間 $\{(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2 : |\{i \in \mathbb{N} : t_i \neq 0\}| < \aleph_0\}$ と同相である.

が成り立つときをいう.

(2) $f: X \to Y$ が**粗埋め込み写像** (**coarse embedding**) であるとは, f がボルノロガスであり, かつ単調非減少な関数 $\rho_-: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, $\lim_{t\to\infty} \rho_-(t) = \infty$ かつ任意の $x, x' \in X$ に対し

$$\rho_-(d_X(x, x')) \leq d_Y(f(x), f(x'))$$

が成り立つときをいう.

(3) X が Y へ**粗埋め込み可能** (**coarsely embeddable**) であるとは, X から Y への粗埋め込み写像 $f: X \to Y$ が存在するときをいう.

(4) $f: X \to Y$ が**粗全射** (**coarsely surjective**) であるとは, ある $S > 0$ が存在して $Y = B_{d_Y}(f(X), S)$ が成り立つときをいう.

(5) X と Y が**粗同値** (**coarsely equivalent**) であるとは, X から Y への粗全射な粗埋め込み写像 $f: X \to Y$ が存在するときをいう.

注意 2.2. 粗同値は距離空間全体のクラスにおける "同値関係" である. 特に, X と Y が粗同値ならば, Y と X は粗同値である ([21, Lemma 2.2] 参照).

例 2.3. (1) 有界な距離空間は 1 点からなる距離空間と粗同値である.

(2) n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と, その整数座標からなる部分距離空間 $\mathbb{Z}^n$ は粗同値である.

(3) 任意の可算群には, 一様離散[*3], 固有[*4] かつ左不変[*5]な距離が存在し ([36, Theorem 1]), 粗同値を除いて一意的である ([36, Proposition 1]). 特に, 有限生成群に対しては, その有限かつ対称な生成系を用いて左不変な語距離が定義でき, その語距離は一様離散かつ固有である. 以下, 可算群は, 一様離散, 固有かつ左不変な距離をもつ距離空間とする.

(4) 距離空間 X に対して, X の空でないコンパクト部分集合からなり Hausdorff 距離 d_H をもつ距離空間 $\mathcal{K}(X)$ と, X の有限集合からなる $\mathcal{K}(X)$ の部分距離空間 $\mathrm{Fin}(X)$ は粗同値である. 実際, 包含写像 $i: \mathrm{Fin}(X) \to \mathcal{K}(X)$ は等距離埋め込み写像ゆえ粗埋め込み写像であり, $B_{d_H}(\mathrm{Fin}(X), 1) = \mathcal{K}(X)$ ゆえ i は粗全射である.

[*3] 距離空間 X (またはその距離 d_X) が**一様離散** (**uniformly discrete**) であるとは, ある $C > 0$ が存在して, 任意の異なる $x, y \in X$ に対して $d_X(x, y) \geq C$ が成り立つといをいう.

[*4] 距離空間 X (またはその距離 d_X) が**固有** (**proper**) であるとは, X の任意の有界な閉部分空間がコンパクトであるときをいう.

[*5] 群 G 上の距離 d が**左不変** (**left-invariant**) であるとは, 任意の $g, x, y \in G$ に対して $d(gx, gy) = d(x, y)$ が成り立つときをいう.

(5) 半直線 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ は任意の有限生成な無限群 G へ粗埋め込み可能である. この事実は, G がその Cayley グラフと粗同値であることと, G の Cayley グラフが固有な非有界測地空間であることから従う ([33, Proposition 10.1.1] 参照).

2.2 漸近次元

距離空間 (X, d) の部分集合 $U, U' \subset X$ と X の部分集合族 $\mathcal{V}$ に対し,

$$\operatorname{diam} U = \sup\{d(x, x') : x, x' \in U\}, \quad d(U, U') = \inf\{d(x, x') : x \in U, x' \in U'\},$$
$$\operatorname{mesh} \mathcal{V} = \sup\{\operatorname{diam} V : V \in \mathcal{V}\}$$

とおく. $R > 0$ に対し, X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が **R-disjoint** であるとは, 任意の異なる $U, U' \in \mathcal{U}$ に対して $d(U, U') \geq R$ であるときをいう. また, $\mathcal{U}$ が **pairwise disjoint** であるとは, 任意の異なる $U, U' \in \mathcal{U}$ に対して $U \cap U' = \varnothing$ であるときをいう.

定義 2.4 ([19]). 次の条件をみたす最小の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を距離空間 X の**漸近次元** (**asymptotic dimension**) といい, $\operatorname{asdim} X$ で表す: 任意の $R > 0$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす $n+1$ 個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ と $S > 0$ が存在する.

(1) $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ は X を被覆する.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は R-disjoint である.
(3) $\operatorname{mesh} \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i \leq S$ である.

任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して上の条件が成り立たないとき, X の漸近次元は無限であるといい, $\operatorname{asdim} X = \infty$ と表す.

注意 2.5. 次の Ostrand の定理 [31] により, 漸近次元は被覆次元の粗幾何学版とみなせる.

定理 2.6 ([31, Theorem 2]). コンパクト距離空間 X に対して, 次の条件をみたす最小の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は X の被覆次元と等しい: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす $n+1$ 個の X の開集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ が存在する:

(1) $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ は X を被覆する.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は pairwise disjoint である.
(3) $\operatorname{mesh} \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i \leq \varepsilon$ である.

例 2.7. (1) 距離空間 X が距離空間 Y へ粗埋め込み可能であれば, $\operatorname{asdim} X \leq \operatorname{asdim} Y$

である ([29, Proposition 2.2.4, Theorem 2.2.5] 参照). 特に, 2 つの距離空間 X と Y が粗同値であれば, $\operatorname{asdim} X = \operatorname{asdim} Y$ である.

(2) 任意の有界距離空間 X に対して, $\operatorname{asdim} X = 0$ である.

(3) n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と, その整数座標からなる部分距離空間 $\mathbb{Z}^n$ について, $\operatorname{asdim} \mathbb{R}^n = \operatorname{asdim} \mathbb{Z}^n = n$ である ([29, Examples 2.2.3 and 2.2.6] 参照).

(4) 階数 n の自由群 $\mathbb{F}_n$ について, $\operatorname{asdim} \mathbb{F}_n = 1$ である ([29, Corollary 2.3.2] 参照).

(5) 整数からなる加法群 $\mathbb{Z}$ の可算直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ について, $\operatorname{asdim} \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z} = \infty$ である. このことは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{Z}^n$ が $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ に粗埋め込み可能であることと, (1) と (3) から従う.

注意 2.8. Dikranjan, Protasov and Zava [12, Proposition 3.3] は, 距離空間 X の漸近次元が 0 ならば, $\operatorname{Fin}(X)$ の漸近次元が 0 であることを示した. 彼らはこの事実を ballean と呼ばれるより広い枠組みにおいて証明したが, 以下の議論でも示せる:

証明. $\operatorname{asdim} X = 0$ を仮定する. $\operatorname{asdim} \operatorname{Fin}(X) = 0$ を示すために, 任意に $R > 0$ をとる. $\operatorname{asdim} X = 0$ より, X の R-disjoint な被覆 $\mathcal{U}$ と $S > 0$ が存在して $\operatorname{mesh} \mathcal{U} \leq S$ を満たす. 各 $U \in \mathcal{U}$ に対して

$$U^- = \{A \in \operatorname{Fin}(X) : A \cap U \neq \varnothing\}, \quad U^+ = \{A \in \operatorname{Fin}(X) : A \subset U\}$$

として $\mathcal{W} = \{\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V^- \cap (\bigcup \mathcal{V})^+ : \mathcal{V} \in \operatorname{Fin}(\mathcal{U})\}$ とおく. このとき, $\mathcal{W}$ は $\operatorname{Fin}(X)$ の R-disjoint な被覆であり, $\operatorname{mesh} \mathcal{W} \leq S$ を満たす. □

2.3 漸近次元に関する無限次元性

粗 Baum-Connes 予想は, 粗幾何学における主要な予想である ([18], [29], [30] 参照). Yu [40] による次の定理を発端に, 漸近次元は特に広く研究されるようになった.

定理 2.9 ([40, Theorem 7.1])**.** 漸近次元が有限な固有距離空間に対して, 粗 Baum-Connes 予想は正しい.

Yu [41] は, さらに次の定理を証明した.

定理 2.10 ([40, Theorem 7.1])**.** Hilbert 空間へ粗埋め込み可能であり有界幾何をもつ[*6] 距離空間に対して, 粗 Baum-Connes 予想は正しい.

漸近次元が有限であることと Hilbert 空間へ粗埋め込み可能であることの間には, 次の関係がある.

定理 2.11 ([41, Theorem 2.2] and [25, Lemma 4.3], [10, Propositions 2.10 and 4.3])**.** 漸近次元が有限な距離空間は Hiblert 空間へ粗埋め込み可能である.

本稿では, Hilbert 空間に粗埋め込み可能であることを, (漸近次元が有限であることを一般化した概念ということで)"漸近次元に関する弱い無限次元性" とみなし, Hilbert 空間に粗埋め込み可能でないことを, "漸近次元に関する強い無限次元性" とみなす.

注意 2.12. Hilbert 空間へ粗埋め込み可能であることを導く性質として, 次がよく知られている.

性質 A (property A) 群の従順性 (amenability) の非同変版とみなせる概念で, Hilbert 空間へ粗埋め込み可能であるための (従って粗 Baum-Connes 予想が成り立つための) 十分条件 ([41, Theorem 2.2]) として Yu [41, Definition 2.1] によって導入された. その性質や同値条件は [38] で解説されている. 特に, 有界幾何をもつ距離空間においては様々な同値条件が知られている ([6] も参照). 漸近次元が有限で有界幾何をもつ距離空間は性質 A を満たす ([25, Lemma 4.3]).

漸近的性質 C (asymptotic propety C) (位相) 次元論における Haver [24] の性質 C の粗幾何学版として Dranishnikov [13, p.1119] によって導入された. 漸近次元が有限な距離空間が漸近的性質 C を満たすことは定義からすぐに従う. 漸近的性質 C を満たし有界幾何をもつ距離空間は性質 A を満たす ([13, Theorem 7.11] and [25, Lemma 3.5]).

有限分解複雑性 (finite decomposition complextity) 安定ボレル予想等の位相剛性定理への応用のために Guentner, Tessera and Yu [22, Definition 2.3] によって導入され

[*6] 距離空間 X (またはその距離 d_X) が**有界幾何** (**bounded geometry**) をもつとは, 次の条件を満たすときをいう:
$\exists R > 0\ \forall S > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \exists\{x_1, \ldots, x_N\} \subset X\ (B_{d_X}(x, S) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{d_X}(x_i, R))$.
X が一様離散な距離空間であるときは, X が有界幾何をもつことと「$\forall S > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ (|B_{d_X}(x, S)| \leq N)$」であることは同値である. 群 G 上の一様離散かつ左不変な距離 d に対しては, (G, d) が有界幾何をもつことと (G, d) が固有であることは同値である. 従って, 例 2.3 (3) における可算群 G の距離は有界幾何をもつ.

た．その性質は [23] で調べられおり, 漸近次元が有限な距離空間が有限分解複雑性を満たすことや, 有限分解複雑性を満たし有界幾何をもつ距離空間は性質 A を満たすことが証明されている ([23, Theorems 4.1 and 4.3]).

例えば, 整数からなる加法群 $\mathbb{Z}$ の可算直和 $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ の漸近次元は無限であるが (例 2.7 (5)), 漸近的性質 C および有限分解複雑性を満たす ([39, Theorem 2.1], [23, p.381]). 著者の知る限りでは, 性質 A, 漸近的性質 C, 有限分解複雑性のどの 2 つについても, 異なることを示す距離空間の例は知られていない. また, 漸近的性質 C と有限分解複雑性については, 一方が他方を導くかどうかも分かっていない.

上記以外にも, いくつかの漸近次元に関する弱い無限次元性が知られている ([37, Introduction] 参照).

定義 2.13. 互いに交わらない距離空間からなる列 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ に対し, 距離空間 $(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} X_i, d)$ が $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ の**粗非交和** (**coarse disjoint union**) であるとは, $\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ が列 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ の和集合 (非交和) であり, 各 $i\in\mathbb{N}$ に対して $d\restriction_{X_i\times X_i}= d_{X_i}$ であって, $d(X_i, X_j)\to\infty$ $(i, j\to\infty)$ であるときをいう.

注意 2.14. 漸近次元に関する強い無限次元空間の例, すなわち Hilbert 空間へ粗埋め込み可能でない固有距離空間の例は, Dranishnikov, Gong, Lafforgue and Yu [14] によって与えられた*7. その後, Gromov [20, p.158] によって, 辺長 1 のグラフ距離をもつエキスパンダーグラフ (expander graph) からなる列の粗非交和が, Hilbert 空間へ粗埋め込み可能でない有界幾何をもつ距離空間の例であることが指摘された. この事実の証明及びエキスパンダーグラフの構成については, [32, Chapters 4 and 5] で解説されている.

3 有限集合からなる超空間の漸近次元に関する無限次元性

本節を通じて X は距離空間を, $\mathrm{Fin}(X)$ は X の空でない有限集合からなり Hausdorff 距離をもつ距離空間を表す.

*7 実際, 標準的な語距離をもつ位数 n の巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の m 個の直積集合 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m$ に最大値距離を与えた距離空間 $Z_{n,m}$ からなる列の粗非交和 $\bigsqcup_{n,m\in\mathbb{N}} Z_{n,m}$ は, Hiblert 空間へ粗埋め込み可能でないことが証明された ([14, Proposition 6.3]).

3.1 空でない有限集合全体からなる超空間

注意 2.8 でみたとおり, $\operatorname{asdim} X = 0$ ならば $\operatorname{asdim} \operatorname{Fin}(X) = 0$ である．一方, 次が成り立つ:

事実 3.1 ([37, Corollary 5.1] 参照)**.** $\operatorname{asdim} X \geq 1$ ならば $\operatorname{asdim} \operatorname{Fin}(X) = \infty$.

この事実は, 以下の Banakh-Banakh の定理 [1], Brodskiy-Dydak-Levin-Mitra の定理 [5], 及び Dydak-Virk の定理 [16] を応用することで示すことができる．以下, 距離空間 $X_1, \ldots, X_n$ からなる直積集合 $\prod_{i=1}^n X_i$ には最大値距離が, すなわち, 各 $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n X_i$ に対して

$$d((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) = \max\{d_{X_i}(x_i, y_i) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

で定義される距離 d が与えられているとする．

定理 3.2 ([1, Theorem 1])**.** 距離空間 X_1, ..., X_n の漸近次元がいずれも 1 以上であれば, $\operatorname{asdim} \prod_{i=1}^n X_i \geq n$ である．特に, $\operatorname{asdim} X \geq 1$ ならば $\operatorname{asdim} X^n \geq n$ である．

正の整数 $n \in \mathbb{N}$ に対し, X から距離空間 Y への写像 $f : X \to Y$ が**粗 n 対 1 (coarsely n-to-1)** であるとは, f がボルノロガスであり, かつ単調非減少な関数 $c : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, 任意の $y \in Y$ と $R > 0$ に対して n 点 $x_1, \ldots, x_n \in X$ が存在し, $f^{-1}(B_{d_Y}(y, R)) \subset \bigcup_{i=1}^n B_{d_X}(x_i, c(R))$ を満たすときをいう．また, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\operatorname{Fin}_{\leq n}(X) = \{A \in \operatorname{Fin}(X) : |A| \leq n\}$$

とし, $\operatorname{Fin}_{\leq n}(X)$ は $\operatorname{Fin}(X)$ の部分距離空間であるとする．

例 3.3 ([15, Proof of Proposition 3.6] 参照)**.** 正の整数 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 写像 $f : X^n \to \operatorname{Fin}_{\leq n}(X); (x_i)_{i=1}^n \mapsto \{x_1, \ldots, x_n\}$ は粗 n^n 対 1 な全射である[*8].

写像 $f : X \to Y$ に対して

$$\operatorname{asdim} f = \sup\{\operatorname{asdim} A : A \subset X,\ \operatorname{asdim} f(A) = 0\}$$

とする．

[*8] 実際, 写像 f は 1-Lipschitz ゆえボルノロガスである．任意の $A \in \operatorname{Fin}_{\leq n}(X)$ と $R > 0$ に対し, $F_A = \{(x_i)_{i=1}^n \in X^n : \{x_1, \ldots, x_n\} = A\}$ とおけば, $|F_A| \leq n^n$ かつ $f^{-1}(B_{d_H}(A, R)) \subset \bigcup_{x \in F_A} B_{d_{X^n}}(x, R)$ である．よって, f は粗 n^n 対 1 である．

定理 3.4 ([5, Theorem 4.11]). 距離空間 X から距離空間 Y へのボルノロガスな写像 $f : X \to Y$ に対して, $\operatorname{asdim} X \leq \operatorname{asdim} f + \operatorname{asdim} Y$ である.

定理 3.5 ([16, Corollary 5.3]). 正の整数 $k \in \mathbb{N}$ と距離空間 X から距離空間 Y への粗 k 対 1 な写像 $f : X \to Y$ に対して, $\operatorname{asdim} f = 0$ である.

事実 *3.1* の証明. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f : X^n \to \operatorname{Fin}_{\leq n}(X)$ を例 3.3 の粗 n^n 対 1 写像として定理 3.2, 3.4, 3.5 と例 2.7 (1) を順に適用すると,

$$n \leq \operatorname{asdim} X^n \leq \operatorname{asdim} \operatorname{Fin}_{\leq n}(X) + \operatorname{asdim} f = \operatorname{asdim} \operatorname{Fin}_{\leq n}(X) \leq \operatorname{asdim} \operatorname{Fin}(X)$$

である. よって $\operatorname{asdim} \operatorname{Fin}(X) = \infty$ である. □

定義 3.6. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して I_k が実数直線 $\mathbb{R}$ の有界閉区間と等距離同型であり, かつ $\operatorname{diam} I_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ であるとき, 距離空間の列 $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を**長い区間の列** (**sequence of long intervals**) とよぶ.

次が成り立つ.

定理 3.7 ([37, Theorem 5.2]). 長い区間の列の粗非交和が X へ粗埋め込み可能ならば, 任意の有限距離空間からなる列の (ある) 粗非交和は, $\operatorname{Fin}(X)$ へ粗埋め込み可能である.

注意 3.8. 半直線 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ は長いの列 $\{[2^{2k}, 2^{2k+1}]\}_{k \in \mathbb{N}}$ の粗非交和 $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} [2^{2k}, 2^{2k+1}]$ を部分距離空間としてもつ. 従って, 半直線を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ を粗埋め込み可能な距離空間は, 定理 3.7 の仮定を満たす. 特に, 有限生成な無限群は定理 3.7 の仮定を満たす (例 2.3 (5)).

注意 2.14 と定理 3.7 より次を得る.

系 3.9 ([37, Corollary 5.4]). 長い区間の列の粗非交和が X へ粗埋め込み可能ならば, $\operatorname{Fin}(X)$ は Hilbert 空間へ粗埋め込み可能でない.

定理 *3.7* の証明の概略. 長い区間の列 $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ の粗非交和 $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ が, 距離空間 X へ粗埋め込み可能であるとする. 粗埋め込み写像 $f : \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \to X$ を 1 つとり固定する. 有限距離空間 X_i からなる列 $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を任意にとる.

各 $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$m_i = |X_i|, \quad M_i = m_i(2 \operatorname{diam} X_i + 1) + \operatorname{diam} X_i$$

とおく. 列 $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ の部分列 $\{I_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ と列 $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を, 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $\psi_i : [0, M_i] \to I_{k_i}$ が等距離埋め込み写像であるようにとる.

各 $i \in \mathbb{N}$ に対して, $X_i = \{x_j^i \mid j \in \{1, 2, \ldots, m_i\}\}$ と表し, 写像 $\varphi_i : X_i \to \mathrm{Fin}([0, M_i])$ を

$$\varphi_i(x) = \{j(2\operatorname{diam} X_i + 1) + d_i(x, x_j^i) \mid j \in \{1, 2, \ldots, m_i\}\}, \quad x \in X_i$$

で定める. このとき, 各 $x, y \in X_i$ に対して

$$d_H(\varphi_i(x), \varphi_i(y)) = \max\{|d_i(x, x_j^i) - d_i(y, x_j^i)| \mid j \in \{1, 2, \ldots, m_i\}\} = d_i(x, y)$$

が成り立つ. よって $\varphi_i : X_i \to \mathrm{Fin}([0, M_i])$ は等距離埋め込み写像である. また, 上でとった等距離埋め込み写像 $\psi_i : [0, M_i] \to I_{k_i}$ は, 等距離埋め込み写像 $\overline{\psi_i} : \mathrm{Fin}([0, M_i]) \to \mathrm{Fin}(I_{k_i}); A \mapsto \psi_i(A)$ を誘導する. ここで $\theta_i = \overline{\psi_i} \circ \varphi_i : X_i \to \mathrm{Fin}(I_{k_i})$ と定めると, θ_i は等距離埋め込み写像である.

一方, 初めにとった粗埋め込み写像 $f : \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \to X$ は, 粗埋め込み写像 $\overline{f} : \mathrm{Fin}(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} I_k) \to \mathrm{Fin}(X); A \mapsto f(A)$ を誘導する. ここで, $\mathrm{Fin}(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} I_k)$ の部分距離空間 $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Fin}(I_{k_i})$ は, 距離空間の列 $\{\mathrm{Fin}(I_{k_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ の粗非交和であることに注意する. $i : \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Fin}(I_{k_i}) \to \mathrm{Fin}(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} I_k)$ を包含写像とする. 写像 $\theta : \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \to \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Fin}(I_{k_i})$ を, 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $\theta\restriction_{X_i} = \theta_i$ となるように定める. このとき θ は単射である. そこで, $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ の距離を, θ が等距離埋め込み写像となるように定める. このとき $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ は $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の粗非交和であり, 合成写像 $\overline{f} \circ i \circ \theta : \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \to \mathrm{Fin}(X)$ は粗埋め込み写像である. ゆえに, $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ は $\mathrm{Fin}(X)$ へ粗埋め込み可能である. □

注意 3.10. 長い区間の列の粗非交和が X へ粗埋め込み可能であれば, $\operatorname{asdim} X \geq 1$ である. 固有距離空間においては, この逆が成り立つとは限らない ([37, Example 6.1]).

次は分かっていない.

問題 3.11 ([37, Question 6.2])**.** $\operatorname{asdim} X \geq 1$ であるとする. このとき, 任意の有限距離空間からなる列の (ある) 粗非交和は, $\mathrm{Fin}(X)$ へ粗埋め込み可能であるか. もしくは, $\mathrm{Fin}(X)$ は Hilbert 空間へ粗埋め込み可能でないか.

問題 3.12 ([37, Question 6.4])**.** $\operatorname{asdim} X \geq 1$ であり, かつ X が有界幾何をもつとき, 長い区間の列の粗非交和は X へ粗埋め込み可能であるか.

3.2 濃度 n 以下の空でない有限集合全体からなる超空間

正の整数 $n \in \mathbb{N}$ を 1 つ固定する．$\mathrm{Fin}(X)$ の部分距離空間

$$\mathrm{Fin}_{\leq n}(X) = \{A \in \mathrm{Fin}(X) : |A| \leq n\}$$

を考える．次の Radul and Shukel [34] の定理は, Basmanov の定理 [2] の粗幾何学版とみなせる.

定理 3.13 ([34, Theorem 1])**.** $\operatorname{asdim} \mathrm{Fin}_{\leq n}(X) \leq n \operatorname{asdim} X$.

従って, X の漸近次元が有限ならば, $\mathrm{Fin}_{\leq n}(X)$ の漸近次元は有限である．漸近次元に関する弱い無限次元性 (注意 2.12) に関して, 次が成り立つ.

命題 3.14 ([37, Corollary 4.2] 参照)**.** (1) X が漸近的性質 C を満たせば, $\mathrm{Fin}_{\leq n}(X)$ は漸近的性質 C を満たす.

(2) X が性質 A を満たし有界幾何をもてば, $\mathrm{Fin}_{\leq n}(X)$ は性質 A を満たす.

命題 3.14 (1) は, 次の 2 つの定理と例 3.3 から従う.

定理 3.15 ([3], [11])**.** X が漸近的性質 C を満たせば, X^n は漸近的性質 C を満たす.

定理 3.16 ([16, Theorem 6.2])**.** X が漸近的性質 C を満たし, X から距離空間 Y への写像 $f : X \to Y$ が粗 n 対 1 な粗全射ならば, Y は漸近的性質 C を満たす.

命題 3.14 (2) は, Chen, Tessera, Wang and Yu [7, Definition 3.1] によって導入された metric sparcification property (MSP) を用いて, 以下の定理と例 3.3 から得られる.

定理 3.17 ([6], [35, Theorem 4.1])**.** 有界幾何をもつ距離空間において, 性質 A を満たすことと MSP を満たすことは同値である.

定理 3.18 ([16, Theorem 7.9] ([37, Lemma 3.7] 参照))**.** X が MSP を満たせば, X^n は MSP を満たす.

定理 3.19 ([16, Theorem 7.4])**.** X が MSP を満たし, X から距離空間 Y への写像 $f : X \to Y$ が粗 n 対 1 な粗全射ならば, Y は MSP を満たす.

命題 3.14 (2) において, 有界幾何の仮定を落とせるかは分かっていない．また, 次も分かっていない.

問題 3.20 ([37, Question 4.4])**.** X が有限分解複雑性を満たすとき, $\mathrm{Fin}_{\leq n}(X)$ は有限分解複雑性を満たすか.

問題 3.21 ([37, Question 4.5])**.** X が Hilbert 空間へ粗埋め込み可能であるとき, $\mathrm{Fin}_{\leq n}(X)$ は Hilbert 空間へ粗埋め込み可能であるか.

参考文献

[1] I. Banakh, T. Banakh, *On the asymptotic dimension of products of coarse spaces*, Topology Appl. **311** (2022), Paper No. 107953, 8 pp.

[2] V. N. Basmanov, *Dimension and some functors with finite support*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **116** (1981), no. 6, 48–50. English translation: Moscow Univ. Math. Bull. **36** (1981), no. 6, 59–62.

[3] G. Bell and A. Nagórko, *On stability of asymptotic property C for products and some group extensions*, Algebr. Geom. Topol. **18** (2018), no. 1, 221–245.

[4] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (1931), no. 12, 875–882.

[5] N. Brodskiy, J. Dydak, M. Levin and A. Mitra, *A Hurewicz theorem for the Assouad-Nagata dimension*, J. Lond. Math. Soc. (2) **77** (2008), 741–756.

[6] J. Brodzki, G. A. Niblo, J. Špakula, R. Willett, N. Wright, *Uniform local amenability*, J. Noncommut. Geom. **7** (2013), no. 2, 583–603.

[7] X. Chen, R. Tessera, X. Wang, G. Yu, *Metric sparsification and operator norm localization*, Adv. Math. **218** (2008), no. 5, 1496–1511.

[8] D. W. Curtis, *Hyperspaces of noncompact metric spaces*, Compositio Math. **40** (1980), no. 2, 139–152.

[9] D. W. Curtis, N. To Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$-dimensional linear metric spaces*, Topology Appl. **19** (1985), no. 3, 251–260.

[10] M. Dadarlat, E. Guentner, *Uniform embeddability of relatively hyperbolic groups*, J. Reine Angew. Math. **612** (2007), 1–15.

[11] T. Davila *On asymptotic property C*, arXiv:1611.05988v1 (2016).

[12] D. Dikranjan, I. Protasov, N. Zava, *Hyperballeans of groups*, Topology Appl. **263** (2019), 172–198.

[13] A. Dranishnikov, *Asymptotic Topology*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 1085–

1129.

[14] A. N. Dranishnikov, G. Gong, V. Lafforgue, G. Yu, *Uniform embeddings into Hilbert space and a question of Gromov*, Canad. Math. Bull. **45** (2002), no. 1, 60–70.

[15] A. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Remarks on straight finite decomposition complexity*, Topology Appl. **227** (2017), 102–110.

[16] J. Dydak, Ž. Virk, *Preserving coarse properties*, Rev. Mat. Complut. **29** (2016), no. 1, 191–206.

[17] R. Engelking, *Theory of dimensions, finite and infinite*, Sigma Series in Pure Mathematics, 10, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.

[18] 深谷友宏, 粗幾何学入門, SGC ライブラリ 152, サイエンス社, 2019.

[19] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[20] M. Gromov, *Spaces and questions*, GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part I, 118–161.

[21] E. Guentner, *Permanence in coarse geometry*, Recent progress in general topology. III, 507–533, Atlantis Press, Paris, 2014.

[22] E. Guentner, R. Tessera and G. Yu, *A notion of geometric complexity and its application to topological rigidity*, Invent. Math. **189** (2012), 315–357.

[23] E. Guentner, R. Tessera and G. Yu, *Discrete groups with finite decomposition complexity*, Groups Geom. Dyn. **7** (2013), 377–402.

[24] W. E. Haver, *A covering property for metric spaces*, Topology Conference (Virginia Polytech. Inst. and State Univ., Blacksburg, Va., 1973), pp. 108–113, Lecture Notes in Math., Vol. 375, Springer, Berlin, 1974.

[25] N. Higson and J. Roe, *Amenable group actions and the Novikov conjecture*, J. Reine Angew. Math. **519** (2000), 143–153.

[26] A. Illanes, S. B. Nadler, *Hyperspaces. Fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216. Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[27] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. **52** (1942), 22–36.

[28] S. Mazurkiewicz, *Sur le type de dimension de l'hyperspace d'un continu*, C. R.

Soc. Sc. Varsovie **24** (1931), 191-192.

[29] P. Nowak and G. Yu, *Large scale geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, Zürich, 2012.

[30] 尾國新一, 粗 Baum-Connes 予想とその周辺, 数学 **68** (2016), 177–199.

[31] P. A. Ostrand, *Dimension of metric spaces and Hilbert's problem 13*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 619–622.

[32] M. I. Ostrovskii, *Metric embeddings. Bilipschitz and coarse embeddings into Banach spaces*, De Gruyter Studies in Mathematics, 49. De Gruyter, Berlin, 2013.

[33] A. Papadopoulos, *Metric spaces, convexity and non-positive curvature. Second edition*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, 6. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2014.

[34] T. M. Radul, O. Shukel, *Functors of finite degree and asymptotic dimension*, Mat. Stud. **31** (2009), no. 2, 204–206.

[35] H. Sako, *Property A and the operator norm localization property for discrete metric spaces*, J. Reine Angew. Math. **690** (2014), 207–216.

[36] J. Smith, *On asymptotic dimension of countable Abelian groups*, Topology Appl. **153** (2006), 2047–2054.

[37] T. Weighill, T. Yamauchi, N. Zava, *Coarse infinite-dimensionality of hyperspaces of finite subsets*, Eur. J. Math. **8** (2022), no. 1, 335–355.

[38] R. Willett, *Some notes on property A*, Limits of graphs in group theory and computer science, 191–281, EPFL Press, Lausanne, 2009.

[39] T. Yamauchi, *Asymptotic property C of the countable direct sum of the integers*, Topology Appl. **184** (2015), 50–53.

[40] G. Yu, *The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension*, Ann. of Math. (2) **147** (1998), no. 2, 325–355.

[41] G. Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), 201–204.