# 粗凸空間の間の visual map

東京都立大学大学院　理学研究科　深谷友宏

Tomohiro Fukaya
Tokyo Metropolitan University

**概要**

江澤悠平氏との共同研究で，粗凸空間の間の写像がそれぞれの理想境界の間の連続写像を誘導するための条件を考察した．また元の写像から誘導された写像に遺伝する性質についても考察を行った．本稿では論文 [3] に基づいて上記の考察で得られた結果について解説する．

## 1　粗凸空間

$(X, d)$ を距離空間とする．この論説では，$\overline{p, q}$ により 2 点 $p, q \in X$ の距離を表すことにする．等長写像 $\gamma\colon [a, b] \to X$ を測地線という．

- 写像 $f\colon X \to Y$ は，ある $A \geq 1$ が存在して
$$\overline{f(x), f(x')} \leq A\,\overline{x, x'} + A \quad (\forall x, x' \in X)$$
が成り立つとき，**巨視的リプシッツ写像**という．
- 写像 $f\colon X \to Y$ は任意の $B \subset Y$ に対して $f^{-1}(B)$ が有界であるとき，**距離的固有**という．
- 写像 $\gamma\colon [a, b] \to X$ は，$\lambda \geq 1$ と $k \geq 0$ に対して
$$\frac{1}{\lambda}|t - s| - k \leq \overline{\gamma(t), \gamma(s)} \leq \lambda|t - s| + k \quad (\forall t, s \in [a, b])$$

が成り立つとき，$(\lambda, k)$**-擬測地線**という．

**定義 1.** $X$ を距離空間とする．$\lambda \geq 1$，$k \geq 0$，$E \geq 1$ 及び $C \geq 0$ を定数とする．また，$\theta\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を非減少関数とする．そして $\mathcal{L}$ を $(\lambda, k)$-擬測地線分の族とする．以下の条件が成り立つとき，$X$ は $(\lambda, k, E, C, \theta, \mathcal{L})$**-粗凸**であるという．

(*i*) 2 点 $v, w \in X$ に対し，閉区間 $[0, a]$ 上で定義された擬測地線分 $\gamma \in \mathcal{L}$ で $\gamma(0) = v$ 及び $\gamma(a) = w$ を満たすものが存在する．

(*ii*) 2 つの擬測地線分 $\gamma\colon [0, a] \to X$ 及び $\eta\colon [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たせば，任意の $t \in [0, a]$，$s \in [0, b]$，及び $c \in [0, 1]$ に対し，次の不等式が成り立つ．

$$\overline{\gamma(ct), \eta(cs)} \leq cE\,\overline{\gamma(t), \eta(s)} + (1-c)E\,\overline{\gamma(0), \eta(0)} + C.$$

(*iii*) 2 つの擬測地線分 $\gamma\colon [0, a] \to X$ 及び $\eta\colon [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たせば，任意の $t \in [0, a]$ 及び $s \in [0, b]$ に対し，次の不等式が成り立つ．

$$|t - s| \leq \theta(\,\overline{\gamma(0), \eta(0)} + \overline{\gamma(t), \eta(s)}\,).$$

条件 (i)，(ii)，及び (iii) を満たす族 $\mathcal{L}$ を**良い擬測地線分の族**といい，元 $\gamma \in \mathcal{L}$ を**良い擬測地線分**という．

特に，$\mathcal{L}$ が測地線分のみから成り，$X$ が $(1, 0, 1, C, \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}, \mathcal{L})$-粗凸であるとき，$X$ は**測地的** $(C, \mathcal{L})$**-粗凸**であるという．

距離空間 $X$ に対し，ある定数 $\lambda, k, E, C$，非減少関数 $\theta\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 及び $(\lambda, k)$-擬測地線分の族 $\mathcal{L}$ が存在して $X$ が $(\lambda, k, E, C, \theta, \mathcal{L})$-粗凸であるとき，$X$ は**粗凸空間**であるという．

粗凸空間のクラスは直積で閉じている．$X$ と $Y$ を距離空間として $\gamma\colon [0, a] \to X$ と $\eta\colon [0, b] \to Y$ を写像とする．写像 $\gamma \oplus \eta\colon [0, a+b] \to X \times Y$

を次で定める．

$$\gamma \oplus \eta(t) := \left(\gamma\left(\frac{a}{a+b}t\right), \eta\left(\frac{b}{a+b}t\right)\right), \quad t \in [0, a+b].$$

$\gamma$ と $\eta$ が擬測地線であるならば，$\gamma \oplus \eta$ もそうである．

**命題 2** ([4])**.** $(X, d_X)$ と $(Y, d_Y)$ を粗凸空間とする．直積 $(X \times Y, d_{X\times Y})$ も粗凸空間であり，$\mathcal{L}^X$ 及び $\mathcal{L}^Y$ をそれぞれ $X$ 及び $Y$ の良い擬測地線分の族とする．$\gamma \in \mathcal{L}^X$ と $\eta \in \mathcal{L}^Y$ に対する $\gamma \oplus \eta$ の形の擬測地線全体のなす集合を $\mathcal{L}^{X\times Y}$ とすると， $X \times Y$ は $\mathcal{L}^{X\times Y}$ を良い擬測地線の族とする粗凸空間である．

## 1.1 理想境界

この小節における補題の証明は [4] 及び [6] を参照.

### 1.1.1 $\mathcal{L}$-近似可能光線

$\gamma\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to X$ を写像とする．また $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\gamma_n\colon [0, a_n] \to X$ を $X$ の擬測地線分とし，$a_n \to \infty$ とする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\gamma_n \in \mathcal{L}, \quad \gamma_n(0) = \gamma(0)$$

が成立し，列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\gamma$ に $\mathbb{N}$ 上で各点収束するとき，列 $\{(\gamma_n, a_n)\}$ を $\gamma$ の **$\mathcal{L}$-近似列**という．$\gamma$ に対する $\mathcal{L}$-近似列が存在するとき，$\gamma$ は **$\mathcal{L}$-近似可能**であるという．$\gamma_n$ が $(\lambda, k)$-擬測地線のとき，$\gamma$ は $(\lambda, k_1)$-擬測地線である．ここで $k_1 = k + 1$ とおいた．

$\{(\gamma_n, a_n)\}_n$ が $\gamma$ の $\mathcal{L}$-近似列であるとき，任意の $l \in \mathbb{N}$ に対して，$(\gamma_n)_n$ は $\gamma$ に $\{0, 1, \ldots, l\}$ 上一様収束する．

$\mathcal{L}$-近似可能光線 $\gamma\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to X$ で $\gamma(t) = \gamma(\lfloor t \rfloor)\ (t \in \mathbb{R}_{\geq 0})$ を満たすもの全体のなす集合を $\mathcal{L}^\infty$ で表す．また $\bar{\mathcal{L}} := \mathcal{L} \cup \mathcal{L}^\infty$ とおく．

補題 3. 閉区間 $I$ 及び $J$ を，$I=[0,a]$ 又は $I=\mathbb{R}_{\geq 0}$ 及び $J=[0,b]$ 又は $J=\mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．族 $\bar{\mathcal{L}}$ は次を満たす.

(1) 2 つの擬測地線 $\gamma\colon I\to X$ 及び $\eta\colon J\to X$ が $\gamma,\eta\in\bar{\mathcal{L}}$ を満たせば，任意の $t\in I$, $s\in J$ 及び $c\in[0,1]$ に対し，次の不等式が成り立つ.

$$\overline{\gamma(ct),\eta(cs)}\leq cE\,\overline{\gamma(t),\eta(s)}+(1-c)E\,\overline{\gamma(0),\eta(0)}+D,$$

ここで $D:=2(1+E)k_1+C$ である．

(2) 非減少関数 $\tilde{\theta}\colon\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を $\tilde{\theta}(t):=\theta(t+1)+1$ により定義する．2 つの擬測地線 $\gamma\colon I\to X$ 及び $\eta\colon J\to X$ が $\gamma,\eta\in\bar{\mathcal{L}}$ を満たせば，任意の $t\in I$, $s\in J$ に対し，次が成り立つ.

$$|t-s|\leq\tilde{\theta}(\,\overline{\gamma(0),\eta(0)}+\overline{\gamma(t),\eta(s)}\,).$$

$\mathcal{L}$-近似可能地光線 $\gamma,\eta\in\mathcal{L}^\infty$ が

$$\sup\{\,\overline{\gamma(t),\eta(t)}\,:t\in\mathbb{R}_{\geq 0}\}<\infty$$

を満たすとき，$\gamma$ と $\eta$ は**漸近的に等しい**といい，$\gamma\sim\eta$ で表す．これは $\mathcal{L}^\infty$ 上の同値関係である．擬測地光線 $\gamma\in\mathcal{L}^\infty$ に対し，この同値関係に関する $\gamma$ の同値類を $[\gamma]$ で表す．補題 3 より，$[\gamma]=[\eta]$ と任意の $t\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し $\overline{\gamma(t),\eta(t)}\leq D$ が成り立つことは同値である．

$\mathcal{L}^\infty$ に含まれる擬測地光線の同値類の成す集合 $\mathcal{L}^\infty/\sim$ を $X$ の**理想境界**といい，$\partial X$ で表す.

また $O\in X$ を基点とする．$O$ を始点とするする $\mathcal{L}^\infty$ の元がなす部分集合を $\mathcal{L}^\infty_O$ とする．$\partial_O X=\mathcal{L}^\infty_O/\sim$ とおく．

### 1.1.2 Gromov 積

擬測地線分の族 $\mathcal{L}$ の部分集合 $\mathcal{L}_O$ を，擬測地線分 $\gamma\in\mathcal{L}$ で，$\gamma\colon[0,a_\gamma]\to X$，$a_\gamma\geq 2\theta(0)$ かつ $\gamma(0)=O$ を満たすもの全体として定める．また $\bar{\mathcal{L}}_O:=\mathcal{L}_O\cup\mathcal{L}^\infty_O$ とおく．

**定義 4.** 積 $(\cdot|\cdot)_O\colon \bar{\mathcal{L}}_O \times \bar{\mathcal{L}}_O \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ を次で定義する．$\gamma, \eta \in \bar{\mathcal{L}}_O$ に対し，$\gamma$ と $\eta$ の定義域をそれぞれ $I$ と $J$ とする．

$$(\gamma \mid \eta)_O := \sup\{t : t \in I \cap J,\ \overline{\gamma(t), \eta(t)} \leq D_1\}$$

と定める．ここで $D_1 := 2D + 2$ である．文脈から明らかな場合は，基点を省略して $(\gamma \mid \eta)$ と表すことにする．

点 $x \in X \setminus \bar{B}(O, 2\lambda\theta(0) + k)$ に対し

$$\bar{\mathcal{L}}_O(x) := \{\gamma \in \mathcal{L}_O : \mathrm{Dom}\,\gamma = [0, a_\gamma],\, \gamma(a_\gamma) = x\},$$

とおく．また境界の点 $x \in \partial_O X$ に対し，次のように部分集合を定める．

$$\bar{\mathcal{L}}_O(x) := \{\gamma \in \mathcal{L}_O^\infty : \gamma \in x\}.$$

**定義 5.** 積 $(\cdot \mid \cdot)_O\colon (X \cup \partial_O X) \times (X \cup \partial_O X) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ を次で定める．

(1) $x \in \bar{B}(O, 2\lambda\theta(0) + k))$ or $y \in \bar{B}(O, 2\lambda\theta(0) + k))$ のとき

$$(x \mid y)_O := 0.$$

(2) $x, y \in (X \setminus \bar{B}(O, 2\lambda\theta(0) + k)) \cup \partial_O X$ のとき

$$(x \mid y)_O := \sup\{(\gamma \mid \eta)_O : \gamma \in \bar{\mathcal{L}}_O(x),\, \eta \in \bar{\mathcal{L}}_O(y)\}.$$

基点の取り方が明らかな場合は $(x \mid y)$ と表す．

補題 6 ([4, Lemma 4.14])．$\gamma \in \mathcal{L}_O^\infty$ に対し，$\{(\gamma_n, a_n)\}_n$ を $\gamma$ の $\mathcal{L}$-近似列とする．$\liminf_{n\to\infty}(\gamma \mid \gamma_n) = \infty$ が成り立つ．

補題 7 ([3, Lemma 2.7])．定数 $\Omega = \Omega(\lambda, k, E, C, \theta(0)) \geq 1$ が存在して，以下が成立する．

(i) $x, y \in X \cup \partial_O X$ と $\gamma \in \bar{\mathcal{L}}_O(x)$ および $\eta \in \bar{\mathcal{L}}_O(y)$ に対して

$$(\gamma \mid \eta) \leq (x \mid y) \leq \Omega(\gamma \mid \eta)$$

(ii) $\gamma, \eta, \xi \in \bar{\mathcal{L}}_O$ に対して

$$(\gamma \mid \xi) \geq \Omega^{-1} \min\{(\gamma \mid \eta), (\eta \mid \xi)\}.$$

(iii) $x, y, z \in X \cup \partial_O X$ に対して

$$(x \mid z) \geq \Omega^{-1} \min\{(x \mid y), (y \mid z)\}.$$

(iv) $\gamma, \eta \in \bar{\mathcal{L}}_O$ と $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ で $t \leq (\gamma \mid \eta)$ を満たすものに対して

$$\overline{\gamma(t), \eta(t)} \leq \Omega.$$

(v) $\gamma, \eta \in \bar{\mathcal{L}}_O$ とする．ある $a \in \operatorname{Dom} \gamma$, $b \in \operatorname{Dom} \eta$ で $\gamma(a) = \eta(b)$ ならば，任意の $t \in \operatorname{Dom} \gamma \cap \operatorname{Dom} \eta$ で $0 \leq t \leq \max\{a, b\}$ を満たすものに対して

$$\overline{\gamma(t), \eta(t)} \leq \Omega.$$

以下では $X$ は固有である，すなわち任意の有界閉集合はコンパクトである，と仮定する．対角線論法により，次を得る．

補題 8 ([4, Proposition 4.17])．$X$ の点列 $\{v_n\}_n$ が $\lim_{n\to\infty} \overline{O, v_n} = \infty$ を満たすとする．このとき $O$ を始点とする $\mathcal{L}$-近似可能光線 $\gamma \in \mathcal{L}_O^\infty$ と数列 $(N_n)$ で $\liminf_{n\to\infty}(v_{N_n} \mid [\gamma]) = \infty$ を満たすものが存在する．

### 1.1.3 理想境界の位相

集合 $X \cup \partial_O X$ に次のように位相を定める．$n \in \mathbb{N}$ に対し

$$V_n := \{(x, y) \in (X \cup \partial_O X)^2 : (x \mid y) > n\} \cup \{(x, y) \in X^2 : \overline{x, y} < n^{-1}\}.$$

とおく．族 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $X \cup \partial_O X$ 上の距離化可能な一様構造を定める．包含写像 $X \hookrightarrow X \cup \partial_O X$ は位相埋め込みである．補題 8 より次を得る．

**命題 9** ([4, Proposition 4.18])**.** $X$ を固有な粗凸空間とする．$X \cup \partial_O X$ はコンパクト．

#### 1.1.4 理想境界上の距離

**命題 10.** 十分小さい $\epsilon > 0$ に対し，$\partial X$ 上の距離 $d_{\epsilon,\partial X}$ と定数 $0 < K < 1$ が存在して，任意の $x, y \in \partial_O X$ に対して次が成り立つ．

$$\frac{1}{K}(x \mid y)^{-\epsilon} \leq d_{\epsilon,\partial X}(x,y) \leq (x \mid y)^{-\epsilon}$$

詳細は [6, 6.2 節，付録 A.2] 参照．

#### 1.1.5 点列境界

$X$ の点列 $(x_n)_n$ が $\lim_{n,m\to\infty}(x_n \mid x_m) = \infty$ を満たすとき，**無限遠に向かう**という．このときある点 $x \in \partial X$ が存在して，$X \cup \partial X$ の位相で $x_n$ は $x$ に収束する．

# 2 Visual map と radial map

この節を通して，$X$ を固有な $(\lambda, k, E, C, \theta, {}_X\mathcal{L})$-粗凸空間とし，$Y$ を固有な $(\lambda', k', E', C', \theta', {}_Y\mathcal{L})$-粗凸空間とする．$a \in X$ と $b \in Y$ をそれぞれ $X$ と $Y$ の基点とする．さらに $\Omega$ を $X$ と $Y$ 両方に対する補題 7 の定数とする．

## 2.1 Visual map

**定義 11.** $f\colon X \to Y$ を巨視的 Lipschitz 写像とする．$X$ の任意の点列の組 $(x_n)_n, (y_n)_n$ で $(x_n \mid y_n)_a \to \infty$ を満たすものに対して，$(f(x_n) \mid f(y_n))_b \to \infty$ が成り立つとき，$f$ は **visual** である，という．

$f$ が visual であることと，任意の $r > 0$ に対してある $s > 0$ が存在して，

$x, y \in X$ に対して，$(x \mid y)_a > s$ ならば $(f(x) \mid f(y))_b > r$，が成り立つことは同値である．また visual であれば距離的固有である．

以下では visual な写像について述べるときは，常に巨視的 Lipschitz であることを仮定する．$f\colon X \to Y$ を visual な写像とする．$f$ が**誘導する写像** $\partial f\colon \partial X \to \partial Y$ を次のように定める．点 $x \in \partial X$ に対し，代表元 $\gamma \in {}_X\mathcal{L}_a^\infty$ をとり，$\partial f(x) := \lim f(\gamma(n))$ と定める．極限は常に存在して，その値は代表元の取り方に依らない．

補題 12. $f\colon X \to Y$ を visual な写像とし，$f$ が誘導する写像を $\partial f\colon \partial X \to \partial Y$ とする．任意の $r > 0$ に対してある $s > 0$ が存在して，$x, y \in \partial X$ に対して，$(x \mid y) > s$ ならば $(\partial f(x) \mid \partial f(y)) > r$ が成り立つ．特に写像

$$f \cup \partial f\colon X \cup \partial X \to Y \cup \partial Y$$

は $\partial X$ の各点で連続である．

次の小節では，粗凸空間の間の写像が visual になるための十分条件を述べる．

## 2.2 良い擬測地線の族と整合的な写像

$\tau \geq 0$ を定数とする．写像 $\sigma\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が *$\tau$-rough contraction* であるということを以下の条件を満たすこととして定める．$\sigma(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$ かつ

$$\begin{aligned} \rho(t) &\leq t \quad (\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}), \\ |\rho(t) - \rho(s)| &\leq |t - s| + \tau \quad (\forall t, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}), \\ t \leq s \Rightarrow \rho(t) &\leq \rho(s) \quad (\forall t, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}, ). \end{aligned}$$

$\sigma$ が *rough contraction* であるとは，ある $\tau \geq 0$ に対して $\tau$-rough contraction であると定める．

Dydak と Virk [2, Definition 3.2] は Gromov 双曲空間の間の写像に対して，radial function というものを導入した．以下で述べるものはその類似であるが，彼らの定義よりも少し弱い形になっている．

**定義 13.** $\sigma\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を rough contraction とする．写像 $f\colon X \to Y$ が，$\gamma \in {}_X\mathcal{L}_a$ に対し，

$$\sigma(t) \leq \overline{f(\gamma(t)), f(a)} \quad (\forall t \in \operatorname{Dom}\gamma).$$

を満たすとき，$f$ は *$\sigma$-${}_X\mathcal{L}$-radial* であると定める．$f$ が *${}_X\mathcal{L}$-radial* とは，ある $\sigma$ に対して $\sigma$-${}_X\mathcal{L}_a$-radial であると定める．

Gromov 双曲空間の間の写像を考察する際に，Morse の補題は強力な道具となる．特に，測地線を擬等長写像で写した像は一般には測地線になり得ないが，像のすぐ側に測地線が存在することが保証される．一般に粗凸空間では Morse の補題に相当するものは存在しないので，以下のような，良い擬測地線の族を保つ条件を導入する．

**定義 14.** $\rho\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を rough contraction とする．$H > 0$ とする．写像 $f\colon X \to Y$ は $f(a) = b$ かつ，$\gamma \in {}_X\mathcal{L}_a$ と $\eta \in {}_Y\mathcal{L}_b$ でぞれぞれの定義域を $[0, L_\gamma]$ と $[0, L_\eta]$ としたとき $\eta(L_\eta) = f(\gamma(L_\gamma))$ を満たすものに対し，

$$\overline{f \circ \gamma(t), \eta(\rho(t))} < H \quad (0 \leq \forall t \leq \min\{L_\gamma, \rho^{-1}(L_\eta)\}).$$

が成り立つとき，$\rho$-$H$-${}_X\mathcal{L}_a$-${}_Y\mathcal{L}_b$-**同変**であると定める．

$f$ が ${}_X\mathcal{L}$-${}_Y\mathcal{L}$-**同変**とは，ある $\rho$ と $H$ に対して $\rho$-$H$-${}_X\mathcal{L}_a$-${}_Y\mathcal{L}_b$-同変であること，と定める．

**定理 15** (Ezawa-F)**.** $\lambda_1 \geq 1$，$\nu_1, H, \tau > 0$，と $\tau$-rough contractions $\sigma$ に対し，ある距離的固有写像 $\hat{\rho}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して，次が成り立つ：

$f\colon X \to Y$ を $(\lambda_1, \nu_1)$-巨視的 Lipschitz 写像で，$\sigma$-${}_X\mathcal{L}_a$-radial かつ $\rho$-$H$-${}_X\mathcal{L}_a$-${}_Y\mathcal{L}_b$-同変で $f(a) = b$ を満たすものとする．このとき任意の $x, y \in X$

に対し，

$$(f(x) \mid f(y))_b \geq \hat{\rho}((x \mid y)_a).$$

が成り立つ．特に $f$ は visual である．さらに $\sigma$ と $\rho$ が一次関数ならば，$\hat{\rho}$ もそうである．このとき誘導された写像 $\partial f$ は Lipschitz 連続である．

## 3　粗全射

Visual map は距離的固有になるので，巨視的 Lipschitz であるという仮定と合わせることにより，粗写像となる．従って Higson コロナの間の連続写像を誘導する [5, Proposition 2.41]．Austin と Virk [1] は粗全射な粗写像は Higson コロナの間の全射を誘導することを示した．一方で [4, Section 6.2] において, 固有な粗凸空間 $X$ に対し，$X \cup \partial X$ は粗コンパクト化であることを示した．従って Higson コンパクト化の普遍性 [5, Proposition 2.39] から次を得る．

**命題 16.** $X$ と $Y$ を固有な粗凸空間とする．$f\colon X \to Y$ を visual な写像とする．$f$ が粗全射ならば，誘導される写像 $\partial f\colon \partial X \to \partial Y$ は全射である．

## 4　粗 $n$ 対 $1$ 写像

写像が $n$ 対 1 であるとは，値域の任意の点の逆像の濃度が $n$ 以下であることをいう．以下の命題は Gromov 双曲空間の場合の同様の命題 [2, Theorem 7.1] の粗凸空間への一般化である．

**命題 17.** $X$ と $Y$ を固有な粗凸空間とし，それぞれの基点を $a \in X$ と $b \in Y$ とする．$f\colon X \to Y$ を visual な写像とし，誘導された写像を $\partial f\colon \partial X \to \partial Y$ とする．次は同値である．

(A) $\partial f$ は $n$ 対 1.

(B) 任意の $R > 0$ に対してある $S > 0$ が存在して，任意の $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$ で $(x_i \mid x_j) < R\,(\forall i, j,\, i \neq j)$ を満たすものに対して，ある $1 \leq k < m \leq n+1$ で $(f(x_k) \mid f(x_m))_b < S$ を満たすものが存在する.

宮田と Virk は $n$ 対 1 写像の粗幾何学における対応物を以下のように定式化し，$(B)_n$ と名付けた．後に Dydak と Virk によって粗 $n$ 対 1 と名付けられた.

**定義 18.** $X$ と $Y$ を距離空間とする．粗写像 $f\colon X \to Y$ が **粗 $n$ 対 1** であるとは，任意の $R > 0$ に対してある $S > 0$ が存在して， 任意の部分集合 $A \subset Y$ で $\mathrm{diam}(A) < R$ を満たすものに対してある $B_1, \ldots, B_n \subset X$ が存在して，任意の $i$ に対して $\mathrm{diam}(B_i) < S$ かつ $f^{-1}(A) = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ が成り立つことをいう.

Dydak と Virk は以下のような粗 $n$ 対 1 写像の特徴づけを与えた.

**命題 19** ([2, Proposition 7.3.])**.** $X$ と $Y$ を距離空間とし， $f\colon X \to Y$ を粗写像とする．以下は同値である.

(A) $f$ は粗 $n$ 対 1.

(B) 任意の $R > 0$ に対してある $S > 0$ が存在して，任意の $n+1$ 点 $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$ で $\overline{x_i, x_j} > S\,(\forall i \neq j)$ なるものに対して，ある $1 \leq k < m \leq n+1$ で $\overline{f(x_k), f(x_m)} > R$ を満たすものが存在する.

命題 17 と 19 及び 第 2 節で議論したことを合わせると，以下を得る.

**定理 20** (Ezawa-F)**.** $X$ と $Y$ を固有な粗凸空間とし，$f\colon X \to Y$ を visual な $\rho$-$T$-${}_X\mathcal{L}_a^\infty$-${}_Y\mathcal{L}_b^\infty$-同変写像とする．$f$ が粗 $n$ 対 1 であるならば，誘導された写像 $\partial f\colon \partial X \to \partial Y$ は $n$ 対 1 である.

Dydak と Virk は双曲平面 $\mathbb{H}^2$ から自由群 $F_2$ のケイリーグラフへの粗 2

対 1 写像を具体的に構成した．この例に直線 $\mathbb{R}$ を直積することにより，グロモフ双曲空間ではない粗凸空間の間の粗 2 対 1 写像の具体例が得られる [3].

## 参考文献


[1] Kyle Austin and Žiga Virk. Higson compactification and dimension raising. *Topology Appl.*, 215:45–57, 2017.

[2] J. Dydak and Ž. Virk. Inducing maps between Gromov boundaries. *Mediterr. J. Math.*, 13(5):2733–2752, 2016.

[3] Yuuhei Ezawa and Tomohiro Fukaya. Visual maps between coarsely convex spaces, 2021. arXiv:2103.11160.

[4] Tomohiro Fukaya and Shin-ichi Oguni. A coarse Cartan–Hadamard theorem with application to the coarse Baum–Connes conjecture. *J. Topol. Anal.*, 12(3):857–895, 2020.

[5] John Roe. *Lectures on coarse geometry*, volume 31 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[6] 深谷 友宏. **粗幾何学入門**. SGC ライブラリ. サイエンス社, 2019.



深谷友宏
東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻

*E-mail address*: `tmhr@tmu.ac.jp`