Exact Morse index of radial solutions for semlinear elliptic equations with critical exponent on annuli

東京大学 大学院数理科学研究科　宮本 安人[1]
Yasuhito Miyamoto
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

0　序文

この小論文では，球領域と円環領域における半線形楕円型方程式の球対称解の Morse 指数についての概説（サーベイ）と，筆者の最近の研究を紹介する．

1　固有値問題と Morse 指数

線形楕円型作用素のスペクトル（特に固有値）は基本的な研究対象である．例えば，$\mathbb{R}^N$ における線形 Schrödinger 作用素 $-\Delta+V(x)$ ならば，ポテンシャル項とスペクトルの対応関係が古くから研究されてきた．一方,（適切に境界条件を課した）有界領域上の線形楕円型作用素のスペクトルを求める問題は，非線形問題の線形化問題として現れ，非線形問題の解明に役立てられてきた．有界領域における Dirichlet 問題ではスペクトルは全て固有値となるので，以下，固有値問題と呼ぶ.（一方，$\mathbb{R}^N$ 上の問題や，滑らかではない境界を持つ有界領域上の Neumann 問題は，本質的スペクトルが現れることがある.）

ここでは，滑らかな境界を持つ有界領域 Ω 上の非線形 Dirichlet 問題

$$\begin{cases}\Delta u+f(u)=0 & \text{for } x\in\Omega,\\ u=0 & \text{for } x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1.1}$$

の解 $u(x)$ における線形化固有値問題

$$\begin{cases}\Delta\phi+f'(u)\phi=-\mu\phi & \text{for } x\in\Omega,\\ \phi=0 & \text{for } x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1.2}$$

の固有値 μ_i を考える．非線形問題 (1.1) を研究する上で，通常はさまざまな関数解析的な定理が用いられるが，それらの定理の仮定にはスペクトル（固有値）に関するものが含まれて

---

[1]email: miyamoto@ms.u-tokyo.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号:19H01797, 19H05599) の助成を受けたものである．

いることがある．従って，固有値問題 (1.2) を調べなければならないが，一般的には非常に難しい．まず最も単純である１次元有界領域 $\Omega = (0,1)$ 上の問題を考えよう．(1.2) は，

$$\begin{cases} \phi'' + f'(u)\phi = -\mu\phi & \text{for } 0 < x < 1, \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

となり，方程式は変数係数 $f'(u)$ を持つ２階常微分方程式となる．この問題は変数変換によってリッカチ型方程式に変換することができる．一般的なリッカチ型方程式は，解の公式が存在しないことが 19 世紀に証明されているので，一般的な固有値問題 (1.3) も固有値の具体的な値を求めることは絶望的である．
（しかし，例外的ではあるが，次の場合は全ての解における線形化固有値問題の固有値と固有関数の具体的な表示が知られている：

$$f(u) = \lambda(u - u^3) \text{ ([WY15])},\ f(u) = \lambda(-u + u^3) \text{ ([MTW22])},\ f(u) = \lambda\sin(u) \text{ ([WY08])},$$
$$f(u) = \lambda\sinh(u) \text{ ([AMW22])},\ f(u) = \lambda e^u,\ \lambda e^{-u} \text{ ([MW19])）．}$$

一方，多次元領域の場合はどうだろうか？ 一般的な場合はもちろん絶望的である．また，球領域上の球対称解など，ODE に帰着できる場合ですら全ての固有値が分かるケースは知られていないと思われる.（ただし直積領域 $\Omega = I \times J$ など自明な場合を除く．また，$\Omega = B$ かつ $f(u) = 0$ の場合は，(1.2) は球領域上の Dirichlet Laplacian の固有値問題となり Bessel 関数のゼロ点を用いて表示できることが知られている．しかし，これは定数係数の場合であり，$f'(u)$ が定数関数ではない場合は，筆者が調べた限りでは見つけられなかった.）
そこで,（非自明な問題の中では最も手がかりがありそうな）球領域または円環領域における球対称解の固有値問題 (1.2) を考えるが,

固有値を求めることを諦める代わりに Morse 指数を求めることを目標とする．

Morse 指数とは，現在の問題設定では (1.2) の負の固有値の数で，固有値が重複している場合は重複度分も数えるものとする．Morse 指数は不安定指数とも呼ばれ，その解 u の不安定度を表している．(1.1) を Euler-Lagrange 方程式に持つエネルギーの下がる方向の次元と考えても良い.

2　対称性破壊分岐と Morse 指数

1979 年に Gidas-Ni-Nirenburg[GNN79] の定理（球領域における正値古典解は球対称）が発表され,（それまでにも [JL72] など球対称解の研究はあったが）球対称解の研究が本格化した．[K12, p. iv] では次のように書かれている：

> After appearance of [GNN79], the study of semilinear equations on balls began in earnest.

その後，すぐに球対称解の一意性が非常に難しい問題であることが認識された．$f(u) = -u + u^p$, $f(u) = u + u^p$, $f(u) = u^p$ のような単純な場合ですら難しく解決は容易ではなかったが，80 年代から研究が始まり 90 年代前半には，主要な非線形項の場合に一意性の問題が解決された．

それまでの球対称解の研究を基礎として，90 年代には円環領域における対称性破壊分岐の研究が進んだ．パラメータは方程式や領域に入っており，円環領域の場合は次の 2 種類ある：

$$\Omega_1 := \{x \in \mathbb{R}^N;\ a < |x| < 1\ (\text{や } 1 < |x| < a)\}, \quad \Omega_2 := \{x \in \mathbb{R}^N;\ R < |x| < R+1\}.$$

Ω_1 では $a \to 1^-$（または，$a \to 1^+$）を考え，Ω_2 では $R \to \infty$ を考える．Ω_1 は thin annulus と呼ばれ [S90, L92] が挙げられ，Ω_2 は expanding annuli と呼ばれ [L95, GGPS11, GMW16, MG17] などが挙げられる．また，円環領域は固定するが，$\Delta u + \lambda e^u = 0$ の球対称解の "上の枝" からの対称性破壊分岐を研究するという研究もある [L89, NS94].

固有値問題 (1.2) はこの問題で自然に現れる．なぜなら，0 固有値を持たない場合は線形化作用素は可逆となり，陰関数定理から解の枝はパラメータに関して少し延長できる．よって 0 固有値を持つ場合が問題となるが，単純固有値が横断性条件を満たす場合は分岐理論の一般論からその点で分岐することが分かる．円環領域上の球対称解の場合は，対応する固有関数が非球対称となることがあり，その場合が対称性破壊分岐となる（ところで，球領域上の正値解における線形化固有値問題が 0 固有値を持つ場合は，対応する固有関数が常に球対称であることが示されている [LN88]．これは [GNN79] の結果から直感的には明らかであろう）．90 年代は，Morse 指数を求めるというより「球対称解からなる枝に対称性破壊分岐が起きる分岐点が無限個存在する」という定理を示すため，という動機が強かった．一方，Morse 指数が無限になるということも認識されていたようだ．[S90, Remark 2] には次のように書かれている：

> We believe that this increase in the number of solutions occurs because as the thickness of the annulus goes to zero the Morse Index of the radial solution of (P_0) goes to infinity as was pointed out to the author by Prof. A. Bahri.

3 Morse 指数とその評価

Ω_1 や Ω_2 の場合は，（minimal solution からなる枝でない場合）球対称解からなる枝に沿って Morse 指数は無限大に発散する．[L92] では Morse 指数に関する直接的な言及はないが Ω_1 上の $\Delta u + u^p = 0$ を一般化した方程式の Dirichlet 問題に対して実質的に $\mathsf{m}(u) \to \infty$ $(a \to 1^-)$ を示している（対称性破壊分岐や非球対称解については（Ω_1上 の問題）[S90, L93] や（Ω_2 上の問題）[L95] も参照）．

また，[L89, NS94] では，円環領域上の Gel'fand 問題 $\Delta u + \lambda e^u = 0$ の球対称解のなす "上の枝" から無限個対称性破壊分岐を起こす分岐点があることを示し，Morse 指数が無限となることを示している（特に，[NS94] では枝に沿って固有値が変化する様子が詳細に研究されている．球領域上の Gel'fand 問題については [NS90] も参照．球領域上の $-\Delta u = \lambda |x|^\alpha e^u$ に

ついては [M15] を参照．また，球領域における Sobolev 優臨界の方程式の正値解の Morse 指数については [M18] も参照）．

Morse 指数が発散することがわかった後に問題になるのは漸近挙動である．[BP90] の結果を紹介したい．上記の研究より前の論文であるが，Morse 指数の詳細な漸近挙動が得られている：

領域 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N,\ 1 < |x| < 1+\varepsilon\}$ のとき，Dirichlet 問題 $-\Delta u = u^{(N+2)/(N-2)}$ の正値解 u_ε の Morse 指数 $\mathsf{m}(u_\varepsilon)$ は次を満たす：

$$\mathsf{m}(u_\varepsilon) \sim \frac{2^N K^{(N-1)/2}}{(N-1)!}\left(\frac{N}{N-2}\int_0^1 (1-\zeta^{2N/(N-2)})^{-1/2} d\zeta\right)^{N-1} \frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0.$$

ここで，

$$K := \sup\left\{\int_0^{\pi/2}\left(-h'^2 + \frac{N+2}{N-2}h^2\right)\sin^{2/N}\theta d\theta;\right.$$
$$\left. h \in H^1(0,1), h(0)=0,\ \int_0^{\pi/2} h^2 \sin^{-2/N}\theta d\theta = 1\right\}.$$

2000 年〜2010 年はこの方面の論文があまり出版されていないが，ターニングポイントとなったのは [GGPS11] である．[GGPS11] では Ω_2 上の Dirichlet 問題 $-\Delta u = u^p + \lambda u$ に対して $R \to \infty$ の対称性破壊分岐と Morse 指数の発散について研究されている．[GGPS11] では，(1.2) の代わりに，次の重み付き固有値問題を考えた：

$$\begin{cases} |x|^2\left(\Delta\phi + f'(u)\phi\right) = -\tilde{\mu}\phi & \text{for } x \in \Omega_2, \\ \phi = 0 & \text{for } x \in \partial\Omega_2 \end{cases}$$

方程式を極座標表示すると次のようになる：

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi + r(N-1)\frac{\partial}{\partial r}\phi + \Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}\phi = -\tilde{\mu}\phi. \tag{3.1}$$

このとき，固有値 $\tilde{\mu}$ は同型方向の固有値問題に関する固有値 $\tilde{\mu}_{rad,i}$ と $-\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}$ の固有値 $\nu_j = j(j+N-2)$ の和で表される．すなわち，

$$\tilde{\mu}_{i,j} = \tilde{\mu}_{rad,i} + \nu_j.$$

この重み付き問題の固有値 $\tilde{\mu}$ は，本来の固有値 μ とは別物であるが，[GGPS11] において，両者の負の固有値の数が等しいことが示された．従って，$\mathsf{m}(u)$ を求めるためには，$\tilde{\mu}_{i,j} < 0$ となる固有値の数を求めれば良いこととなる．一見すると些細な差に見えるが，(1.2) より (3.1) の方が遥かに解析しやすく，この方面の研究が急激に進んだ．

90 年代は分岐解析の副産物として Morse 指数が求められていたようだが，[GGPS11] 以降は，球対称領域における Morse 指数の評価に関する論文が増えた．以下，その中でも印象的な論文を紹介したい．特に，Morse 指数の “評価” ではなく，正確な Morse 指数が求められる場合がある．

[DIP17a] では，2 次元球領域における Dirichlet 問題 $-\Delta u = |u|^{p-1}u$ の符号変化する球対称な least energy solution を考え，p が大きいとき Morse 指数を決定した：

$$\mathsf{m}(u) = 12.$$

[DIP17b] では，3 次元以上の球領域における Dirichlet 問題 $-\Delta u = |u|^{p-1}u$ の n 個の結節領域 (nodal domain) を持つ球対称解を考え，p が臨界ソボレフ指数 $p_S := (N+2)/(N-2)$ より小さくかつ近い場合に Morse 指数を決定した：

$$\mathsf{m}(u) = n + N(n-1).$$

この結果は，[AG19] によって Hénon 方程式の Dirichlet 問題 $-\Delta u = |x|^\alpha |u|^{p-1}u$, $\alpha > 0$, の場合に拡張され次が得られた：p が指数 $p_c := (N+2+2\alpha)/(N-2)$ より小さくかつ近い場合は，

$$\mathsf{m}(u) = \begin{cases} n \displaystyle\sum_{j=0}^{1+[\alpha/2]} M_j(N) & \alpha \text{ が偶数でないとき}, \\ n \displaystyle\sum_{j=0}^{\alpha/2} + (m-1) M_{1+\alpha/2}(N) & \alpha \text{ が偶数のとき}. \end{cases}$$

ここで，$M_j(N)$ は $-\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}$ の固有値 ν_j の重複度であり，次で与えられる：

$$M_j(N) := \frac{(N+2j-2)(N+j-3)!}{(N-2)!j!} \quad \text{for } N \geq 3 \text{ and } j = 0, 1, 2, \ldots.$$

ところで，[DIP17b] では，広いクラスの非線形項 $f(|x|, u)$ に対し Dirichlet 問題 $-\Delta u = f(|x|, u)$ の n 個の結節領域を持つ球対称解の Morse 指数の下からの評価が得られており特筆に値する：

$$\mathsf{m}(u) \geq n + N(n-1).$$

球対称解の Morse 指数とその評価は，ここ 10 数年イタリアのグループが中心となり研究が進んでいる．上記の他に [AG14, AG20a, AG20b, AG20c, BCGP12, BEOP05, GGN13] を挙げたい．これらにおいて，広いクラスの非線形項 $f(|x|, u)$ に対し Dirichlet 問題 $-\Delta u = f(|x|, u)$ の球対称解の Morse 指数の評価について研究されている．また，[DN07] では球領域上の Neumann 問題 $-\varepsilon^2 \Delta u = u(u - a(|x|))(1-u)$ の球対称解を研究した．$\varepsilon \to 0$ としたとき内部遷移層を持つ球対称解が現れるが，その解の Morse 指数を研究した．この研究は，イタリアのグループとは異なる視点で Morse 指数を研究しており興味深い．

4 主定理

この節では [M22] の結果について紹介したい．$N \geq 3$, $0 < \rho < R < \infty$ とし，$A_\rho := \{x \in \mathbb{R}^N;\ \rho < |x| < R\}$ を円環領域とする．次の Dirichlet 問題の球対称解を考える：

$$\begin{cases} \Delta U + |x|^\alpha |U|^{p-1} U = 0 & \text{in } A_\rho, \\ U = 0 & \text{on } \partial A_\rho. \end{cases} \tag{4.1}$$

ここでは，次の場合を考える：

$$p = p_c := \frac{N+2+2\alpha}{N-2}, \qquad \alpha > -2.$$

(4.1) は，各 $n \geq 1$ に対して，n 個の結節領域を持つちょうど 2 つの球対称解 $U^{\pm}_{n,\rho}(x)$ を持つことが知られている（ここで，$U^{-}_{n,\rho}(x) = -U^{+}_{n,\rho}(x)$ を満たす．また $U^{\pm}_{1,\rho}(x)$ は正値解と負値解となる）．$\alpha = 0$ のとき，もし領域が球ならば，Pohozaev の恒等式から正値解（または負値解）が存在しないことが知られているので，$\rho \to 0$ のときの解 $U^{\pm}_{n,\rho}(x)$ の性質を調べることが興味ある研究テーマとなる．例えば，$\alpha = 0$ のとき正値解 $U^{+}_{1,\rho}$ の最大値に関して Bandle-Peletier [BP88] は次を示した：

$$\left\|U^{\pm}_{1,\rho}\right\|_{L^\infty(A_\rho)} = \left\{\frac{N(N-2)}{\rho R}\right\}^{\frac{N-2}{4}} (1+o(1)) \ \text{ as } \ \rho \to 0.$$

従って，円環の穴が小さくなると，正値解の最大値は発散する．

この研究 [M22] では，（正値解に限らない）$U^{\pm}_{n,\rho}(x)$ の Morse 指数 $\mathsf{m}(U^{\pm}_{n,\rho})$ を調べた．円環の穴が小さいとき（定理 1(i) の small $\rho > 0$ のとき），Morse 指数が決定できた：

定理 1. $N \geq 3$, $\alpha > -2$, $p = p_c$ とする．
(i) $\ell := \left[\frac{\alpha}{2}\right] + 1$ とするとき，

$$\mathsf{m}(U^{\pm}_{n,\rho}) \begin{cases} = n\displaystyle\sum_{j=0}^{\ell} M_j(N) = n\frac{(N+2\ell-1)(N+\ell-2)!}{(N-1)!\ell!} & \text{for small } \rho > 0, \\ \geq n\displaystyle\sum_{j=0}^{\ell} M_j(N) = n\frac{(N+2\ell-1)(N+\ell-2)!}{(N-1)!\ell!} & \text{for } \rho < R. \end{cases}$$

（$\frac{(N+2\ell-1)(N+\ell-2)!}{(N-1)!\ell!} = M_\ell(N+1)$ なので，上記は $nM_\ell(N+1)$ と書ける）．さらに，$U^{\pm}_{n,\rho}$ は $\rho > 0$ が小さいとき非退化．特に，$\alpha = 0$ のときは，

$$\mathsf{m}(U^{\pm}_{n,\rho}) = n(N+1) \ \text{ for small } \ \rho > 0.$$

（$\alpha = 0$ のとき，空間次元 N と結節領域の数 n のみで定まる）
(ii) $\rho \to R$ のとき

$$\mathsf{m}(U^{\pm}_{n,\rho}) \to +\infty.$$

(iii) $R > \rho > 0$ を固定し，$\alpha \to \infty$（従って，$p = p_c \to \infty$）とするとき，

$$\mathsf{m}(U^{\pm}_{n,\rho}) \to +\infty.$$

例えば，$N = 3, 4, 5$ の場合に，さらに具体的に表すと次のようになる：

例 2. 定理 1 と同じ条件のもとで次が成り立つ：

(i) $N = 3$ のとき，$\mathsf{m}(U^{\pm}_{n,\rho}) = \frac{n}{2!}(2\ell+2)(\ell+1)$ for smal $\rho > 0$.

(ii) $N = 4$ のとき，$\mathsf{m}(U^{\pm}_{n,\rho}) = \frac{n}{3!}(2\ell+3)(\ell+1)(\ell+2)$ for small $\rho > 0$.

(iii) $N = 5$ のとき，$\mathsf{m}(U^{\pm}_{n,\rho}) = \frac{n}{4!}(2\ell+4)(\ell+1)(\ell+2)(\ell+3)$ for small $\rho > 0$.

$(p,\alpha) = (3, N-4)$ ときは，正値解 $U^{+}_{1,\rho}(x)$ と負値解 $U^{-}_{1,\rho}(x)$ の Morse 指数は，(ρ が小さくなくても）円環の内半径と外半径の比 $\rho/R \in (0,1)$ で完全に定まることが分かった：

定理３． $N \geq 3$，$(p,\alpha) = (3, N-4)$ とする．次の (a) または (b) が成り立つとする：
(a) $\mathcal{R}_{\ell,1} < \frac{\rho}{R} \leq \mathcal{R}_{\ell+1,1}$，$\ell > \frac{N}{2} - 1$ となる正の整数 ℓ が存在,
(b) $0 < \frac{\rho}{R} \leq \mathcal{R}_{\ell+1,1}$，$\ell = \left[\frac{N}{2}\right] - 1$ となる非負の整数 ℓ が存在.
((a)(b) による合併集合は，全区間 $0 < \rho/R < 1$ の disjoint union となる）．このとき,

$$\mathsf{m}(U^{\pm}_{1,\rho}) = \sum_{j=0}^{\ell} M_j(N) = M_\ell(N+1).$$

ここで,

$$\mathcal{R}_{\ell,n} := \begin{cases} \exp\left(-4n\sqrt{\dfrac{3}{8\nu_\ell - 3(N-2)^2}}K\left(\sqrt{\dfrac{4\nu_\ell}{8\nu_\ell - 3(N-2)^2}}\right)\right) & \text{if } \ell > \frac{N}{2} - 1, \\ 0 & \text{if } \ell \leq \frac{N}{2} - 1. \end{cases}$$

また，K は第１種完全楕円積分 $K(k) := \int_0^1 ds/\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}$, $0 \leq k < 1$.
（$\mathsf{m}(U^{\pm}_{n,\rho})$, $n \geq 2$, の上からと下からの評価に関する結果もあるが省略する）.

$(p,\alpha) = (3, N-4)$ のときは，解 $U^{\pm}_{n,\rho}(x)$ が楕円関数を用いて具体的に表示できる：

定理４． $N \geq 3$，$(p,\alpha) = (3, N-4)$ とする．$U^{\pm}_{n,\rho}$, $n \geq 1$, は次のように書き表される：

$$U^{\pm}_{n,\rho}(r) = \pm\frac{N-2}{2}\sqrt{\frac{2k^2(1-k^2)}{2k^2-1}}\,r^{-\frac{N-2}{2}}\operatorname{sd}\left(2nK(k)\frac{\log R - \log r}{\log R - \log \rho}, k\right),$$

ここで，$k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ は次の方程式

$$\frac{4n}{N-2}\sqrt{2k^2-1}K(k) = \log\frac{R}{\rho}$$

の一意的な解であり，$\operatorname{sn}(\xi,k)$, $\operatorname{dn}(\xi,k)$, $\operatorname{sd}(\xi,k)$ は，$0 \leq \xi \leq K(k)$ において次を満たす $\mathbb{R}$ 上で滑らかに拡張された周期関数とする（Jacobi の楕円関数)：

$$\xi = \int_0^{\operatorname{sn}(\xi,k)} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},\ \operatorname{dn}(\xi,k) := \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2(\xi,k)},\ \operatorname{sd}(\xi,k) := \frac{\operatorname{sn}(\xi,k)}{\operatorname{dn}(\xi,k)}.$$

($\operatorname{sn}(\,\cdot\,,k)$ は周期 $4K(k)$, $\operatorname{dn}(\,\cdot\,,k)$ は周期 $2K(k)$，$\operatorname{sd}(\,\cdot\,,k)$ は周期 $4K(k)$ となる）

証明は，固有値問題

$$\begin{cases} \Delta\Phi + p|x|^\alpha|U^{\pm}_{n,\rho}|^{p-1}\Phi = -\mu\Phi & \text{in } A_\rho, \\ \Phi = 0 & \text{on } \partial A_\rho \end{cases}$$

を極座標表示して考える：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi + \frac{N-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}\Phi + pr^\alpha |U^\pm_{n,\rho}|^{p-1}\Phi = -\mu\Phi & \text{for } 0<r<R,\ \sigma\in\mathbb{S}^{N-1}, \\ \Phi(\rho,\sigma) = \Phi(R,\sigma) = 0 & \text{for } \sigma\in\mathbb{S}^{N-1}. \end{cases}$$

３節で触れた通り，Morse 指数は次の重み付き固有値問題の負の固有値の数と一致している:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Psi + \frac{N-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Psi + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}\Psi + pr^\alpha |U^\pm_{n,\rho}|^{p-1}\Psi = -\tilde{\mu}\frac{\Psi}{r^2} & \text{for } 0<r<R,\ \sigma\in\mathbb{S}^{N-1}, \\ \Psi(\rho,\sigma) = \Psi(R,\sigma) = 0 & \text{for } \sigma\in\mathbb{S}^{N-1}. \end{cases}$$

（違いは，右辺の重み $1/r^2$ だけである）．両辺 r^2 をかけ，

$$\begin{cases} r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Psi + r(N-1)\frac{\partial}{\partial r}\Psi + \Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}\Psi + pr^{\alpha+2} |U^\pm_{n,\rho}|^{p-1}\Psi = -\tilde{\mu}\Psi & \text{for } 0<r<R,\ \sigma\in\mathbb{S}^{N-1}, \\ \Psi(\rho,\sigma) = \Psi(R,\sigma) = 0 & \text{for } \sigma\in\mathbb{S}^{N-1}. \end{cases}$$

$-\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}$ の固有値 ν_j と重複度 $M_j(N)$ は知られているので，動径方向の固有値問題

$$\begin{cases} r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi + r(N-1)\frac{\partial}{\partial r}\psi + pr^{\alpha+2} |U^\pm_{n,\rho}|^{p-1}\psi = -\tilde{\mu}_{rad}\psi & \text{for } 0<r<R, \\ \psi(\rho) = \psi(R) = 0 \end{cases}$$

の正確な固有値が求められれば，$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_{rad} + \nu_j$ より，Morse 指数が求まる．この研究では，固有値 $\tilde{\mu}_{rad}$ について詳細に研究し主結果を得た．

5 まとめ

球対称解の Morse 指数に関しては，(3.1) を考えれば良いことに気づいたことが突破口となった．今後，Morse 指数の研究が発展するためには，元の固有値問題 (1.2) を簡単な問題に帰着させられるかが鍵となる．

参考文献

[AG14] A. Amadori and F. Gladiali, *Bifurcation and symmetry breaking for the Henon equation*, Adv. Differential Equations **19** (2014), 755–782.

[AG19] A. Amadori and F. Gladiali, *Asymptotic profile and Morse index of nodal radial solutions to the Hénon problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations **58** (2019), Paper No. 168, 47 pp.

[AG20a] A. Amadori and F. Gladiali, *The Hénon problem with large exponent in the disc*, J. Differential Equations **268** (2020), 5892–5944.

[AG20b] A. Amadori and F. Gladiali, *On a singular eigenvalue problem and its applications in computing the Morse index of solutions to semilinear PDE's*, Nonlinear Anal. Real World Appl. **55** (2020), 103133, 38 pp.

[AG20c] A. Amadori and F. Gladiali, *On a singular eigenvalue problem and its applications in computing the Morse index of solutions to semilinear PDE's: II*, Nonlinearity **33** (2020), 2541–2561.

[AMW22] S. Aizawa, Y. Miyamoto and T. Wakasa, *Asymptotic formulas of the eigenvalues for the linearization of a one-dimensional sinh-Poisson equation*, preprint.

[BCGP12] T. Bartsch, M. Clapp, M. Grossi and F. Pacella, *Asymptotically radial solutions in expanding annular domains*, Math. Ann. **352** (2012), 485–515.

[BEOP05] M. Ben Ayed, K. El Mehdi, M. Ould Ahmedou and F. Pacella, *Energy and Morse index of solutions of Yamabe type problems on thin annuli*, J. Eur. Math. Soc. **7** (2005), 283–304.

[BP88] C. Bandle and L. Peletier, *Nonlinear elliptic problems with critical exponent in shrinking annuli*, Math. Ann. **280** (1988), 1–19.

[BP90] A. Bénichou and J. Pomet, *The index of the radial solution of some elliptic P.D.E.*, Nonlinear Anal. **14** (1990), 991–997.

[DIP17a] F. De Marchis, I. Ianni and F. Pacella, *Exact Morse index computation for nodal radial solutions of Lane-Emden problems*, Math. Ann. **367** (2017), 185–227.

[DIP17b] F. De Marchis, I. Ianni and F. Pacella, *A Morse index formula for radial solutions of Lane-Emden problems*, Adv. Math. **322** (2017), 682–737.

[DN07] Y. Du and K. Nakashima, *Morse index of layered solutions to the heterogeneous Allen-Cahn equation*, J. Differential Equations **238** (2007), 87–117.

[GGN13] F. Gladiali, M. Grossi and S. Neves, *Nonradial solutions for the Hénon equation in $\mathbb{R}^N$*, Adv. Math. **249** (2013), 1–36.

[GGPS11] F. Gladiali, M. Grossi, F. Pacella and P. Srikanth, *Bifurcation and symmetry breaking for a class of semilinear elliptic equations in an annulus*, Calc. Var. Partial Differential Equations **40** (2011), 295–317.

[GMW16] Z. Guo, L. Mei and F. Wan, *Symmetry breaking of an elliptic equation in expanding annuli*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **23** (2016), Art. 59, 19 pp.

[GNN79] B. Gidas, W. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243.

[JL72] D. Joseph and T. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rational Mech. Anal. **49** (1972/73), 241–269.

[K12] P. Korman, Global solution curves for semilinear elliptic equations, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012. xii+241 pp. ISBN: 978-981-4374-34-7; 981-4374-34-2.*

[L89] S. Lin, *On non-radially symmetric bifurcation in the annulus*, J. Differential Equations **80** (1989), 251–279.

[L92] S. Lin, *Existence of positive nonradial solutions for nonlinear elliptic equations in annular domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), 775–791.

[L93] S. Lin, *Existence of many positive nonradial solutions for nonlinear elliptic equations on an annulus*, J. Differential Equations **103** (1993), 338–349.

[L95] S. Lin, *Asymptotic behavior of positive solutions to semilinear elliptic equations on expanding annuli*, J. Differential Equations **120** (1995), 255–288.

[LN88] C. Lin and W. Ni, *A counterexample to the nodal domain conjecture and a related semilinear equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 271–277.

[M15] Y. Miyamoto, *Nonradial maximizers for a H'enon type problem and symmetry breaking bifurcations for a Liouville-Gel'fand problem with a vanishing coefficient*, Math. Ann. **361** (2015), 787–809.

[M18] Y. Miyamoto, *A limit equation and bifurcation diagrams of semilinear elliptic equations with general supercritical growth*, J. Differential Equations **264** (2018) 2684–2707.

[M22] Y. Miyamoto, *Exact Morse index of radial solutions for semilinear elliptic equations with critical exponent on annuli*, submitted.

[MG17] L. Mei and Z. Guo, *Morse indices and symmetry breaking for the Gelfand equation in expanding annuli*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **22** (2017), 1509–1523.

[MTW22] Y. Miyamoto, H. Takemura and T. Wakasa, *Asymptotic formulas of the eigenvalues for the linearization of the scalar field equation*, submitted.

[MW19] Y. Miyamoto and T. Wakasa, *Exact eigenvalues and eigenfunctions for a one-dimensional Gel'fand problem*, J. Math. Phys. **60** (2019), 021506, 11 pp.

[NS90] K. Nagasaki and T. Suzuki, *Radial and nonradial solutions for the nonlinear eigenvalue problem $\Delta u + \lambda e^u = 0$ on annuli in $\mathbf{R}^2$*, J. Differential Equations **87** (1990), 144–168.

[NS94] K. Nagasaki and T. Suzuki, *Spectral and related properties about the Emden-Fowler equation $-\Delta u = \lambda e^u$ on circular domains*, Math. Ann. **299** (1994), 1–15.

[S90] P. Srikanth, *Symmetry breaking for a class of semilinear elliptic problems*, Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire **7** (1990), 107–112.

[WY08] T. Wakasa and S. Yotsutani, *Representation formulas for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems*, Commun. Pure Appl. Anal. **7** (2008), 745–763.

[WY15] T. Wakasa and S. Yotsutani, *Limiting classification on linearized eigenvalue problems for 1-dimensional Allen-Cahn equation I–asymptotic formulas of eigenvalues*, J. Differential Equations **258** (2015), 3960–4006.