

# 時間変動係数をもつ非線形方程式系の一様大域的漸近安定性

島根大学・総合理工学部 杉江 実郎

Jitsuro Sugie

Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,  
Shimane University

## 概要

一様大域的漸近安定性に関する研究は、非線形現象を記述する方程式のすべての解について、平衡点への漸近速度を予測できるという利点がある。本稿では、非自励な2次元非線形力学系の零解が一様大域的漸近安定となるための十分条件を報告する。得られた結果から、2次元力学系に付随するある1階非線形微分方程式が一様大域的漸近安定性において重要な役割を果たすことが分かった。より正確には、いくつかの合理的な仮定の下で、1階非線形微分方程式の特解に対する任意の $\sigma$ から $t + \sigma$ までの積分が $\sigma$ に対して一様に発散するならば、その力学系の零解は一様大域的漸近安定であることが保証される。証明するために、力学系の解の振る舞いを注意深く追跡する。主結果を説明するため、具体例とそのシミュレーションを提供する。また、主結果に対応する局所定理とその生態系モデルへの応用について議論する。

## 仮定と主結果

最近、著者と石原佳樹 [27] は、減衰非線形方程式系

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -h(t)f(y) - g(x) \end{cases}$$

の零解が一様大域的漸近安定となるための十分条件を与えた。ここで、 $'$  は時間に対する微分を表す。この結果は、実応用として、様々な Duffing 型方程式に適用された。この方程式系は、摩擦項を有する運動方程式

$$x'' + h(t)f(x') + g(x) = 0$$

と同値である。したがって、変数  $x$  が物体の平衡点からの位置を表すとすれば、変数  $y$  は物体の速度に対応する。ただし、生態系モデルへの同値変換では、変数  $y$  が別の意味で使用される場合がある。そのような例は [28, 29] で見つけることができる。

本稿では、平衡点が唯一である物理系及び生物系モデルに関して、零解（または内部平衡点）の一様大域的漸近安定性を決定付ける条件に焦点を当てるため、非自励な非線形方程式系

$$\begin{cases} x' = k(t)\varphi(y), \\ y' = -h(t)f(y) - k(t)g(x)\psi(y) \end{cases} \quad (1.1)$$

を考える。方程式系 (1.1) は、上記に示した先行研究の方程式系を特殊な場合として含む。また、 $f, g, \varphi, \psi$  は  $\mathbb{R}$  上の連続実数値関数であり、 $h$  と  $k$  は  $[0, \infty)$  上の連続実数値関数であると仮定する。さらに、以下の仮定を設ける。

(i) 任意の  $y \neq 0$  に対して  $yf(y) > 0$  である。

(ii)  $\mathbb{R}$  上の連続実数値関数  $\tilde{f}$  が任意の  $y \neq 0$  に対して

$$0 < \frac{f(y)}{\tilde{f}(y)} \leq 1$$

であり、任意の  $\lambda \in (0, 1]$  と  $y \in \mathbb{R}$  に対して

$$\frac{y}{\lambda} \tilde{f}(y) \leq y \tilde{f}\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

を満たす。

(iii) 任意の  $x \neq 0$  に対して  $xg(x) > 0$  であり

$$G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x g(\xi) d\xi \nearrow \infty \text{ as } |x| \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

である。

(iv) 任意の  $y \neq 0$  に対して  $y\varphi(y) > 0$  であり、任意の  $y \in [-c, 0) \cup (0, c]$  に対して  $\varphi(y)/y \geq \nu$  となるよう  $\nu > 0$  と  $c > 0$  が存在する。

(v) 任意の  $y \in \mathbb{R}$  に対して  $\psi(y) > 0$  であり

$$F(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^y \frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)} d\eta \nearrow \infty \text{ as } |y| \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

である。

(vi) 係数  $h$  は **integrally positive** である。即ち、任意の  $t \geq 0$  に対して  $h(t) \geq 0$  であり、 $\tau_n + d < \sigma_n \leq \tau_{n+1}$  を満たす任意の 2 つの数列  $\{\tau_n\}$  と  $\{\sigma_n\}$  に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\sigma_n} h(t) dt = \infty$$

である。ただし、 $d$  は正の値である。

(vii) 係数  $k$  は

$$0 < \inf_{t \geq 0} k(t) \leq \sup_{t \geq 0} k(t) < \infty$$

を満たす。

仮定 (iv) の integral positivity の概念を最初に導入したのは Matrosov [18] である。典型的な例として、正の周期関数や、零になる点がすべて孤立している非負の周期関数が挙げられる。また、連続関数  $h$  が integrally positive であるための必要十分条件は、任意の  $d > 0$  に対して

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+d} h(s) ds > 0$$

であることが知られている。したがって、 $h$  が仮定 (vi) を満たす連続関数であれば、任意の  $t \geq \hat{t}$  に対して

$$\int_t^{t+1} h(s) ds \geq \ell$$

を満たす正の定数  $\ell$  と  $\hat{t}$  を選ぶことができる。仮定 (i), (iii), (iv) により、方程式系 (1.1) は零解、即ち、任意の  $t \in [0, \infty)$  に対して  $(x(t), y(t)) = (0, 0)$  となる解をもつことになる。

これらの仮定の下で、以下の結果が成り立つ。

### 定理 1

仮定 (i)–(vii) の下で、1 階非線形微分方程式

$$u' + h(t)\tilde{f}(u) \pm 1 = 0 \tag{1.4}$$

の初期条件  $u(\sigma) = 0$  を満たす解  $u$  が  $\sigma \geq 0$  に関して一様に

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma}^{t+\sigma} u(s) ds = \mp \infty \tag{1.5}$$

を満たすならば、方程式系 (1.1) の零解は一様大域的漸近安定である。

尚、方程式 (1.4) と条件 (1.5) のダブル記号  $\pm$  と  $\mp$  は複号同順である。

仮定 (i), (iii)–(vi) から、方程式系 (1.1) の零解が一様安定であることは比較的容易に証明できる。また、任意の解  $(x(t), y(t))$  が

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

を満たすならば、零解は大域的漸近安定であると言われ、初期時刻  $t_0 \geq 0$  がいつであっても、初期点  $(x(t_0), y(t_0)) \in \mathbb{R}^2$  がどこであっても、解は最終的に原点  $(0, 0)$  に近づくことになる。しかし、同じ初期点をもつ解であっても、初期時刻が異なれば、同じ程度の速さで原点に近づくことは保証されない。このことは、単に零解が大域的漸近安定であることを示しても、解が原点付近に到達する時間を予測できないため、現実の応用にはあまり意味のない情報であることを意味している。これに対して、零解の一様大域的漸近安定性は、初期点と同じ解は、たとえ初期時刻が異なっても、すべてが同じ程度の速さで原点に近づくことを保証する。したがって、ある解の原点近傍までの到達時間を測定することで、同じ初期点をもつ別の解の到達時間を予測することができる。この意味で、一様大域的漸近安定性に関する研究は実用的なメリットがある。しかし、非自励かつ非線形方程式系の零解の一様大域的漸近安定性に関する研究には詳細な解析が必要であるため、大域的漸近安定性の研究に比べて少ないのが現状である。

## 証明の概略

まず、一様大域的漸近安定性の定義を与えるために、いくつか記号を導入する。既に表記しているように、初期時刻を  $t_0 \geq 0$ 、初期点を  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  とし、初期条件  $(x(t_0), y(t_0)) = \mathbf{x}_0$  を満たす方程式系 (1.1) の解  $(x(t), y(t))$  を  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  と書く。また、任意の  $\rho > 0$  に対して

$$B(\rho) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < \rho^2\}$$

とおく。このとき

- 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $\delta(\varepsilon) > 0$  が存在して、 $t_0 \geq 0$  かつ  $\mathbf{x}_0 \in B(\delta)$  ならば、任意の  $t \geq t_0$  に対して

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in B(\varepsilon)$$

が成り立つとき、方程式系 (1.1) の零解は一様安定であるという。

- 任意の  $\rho > 0$  と  $\eta > 0$  に対して、ある  $T(\rho, \eta) > 0$  が存在して、 $t_0 \geq 0$  かつ  $\mathbf{x}_0 \in B(\rho)$  ならば、任意の  $t \geq t_0 + T$  に対して

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in B(\eta)$$

が成り立つとき、方程式系 (1.1) の零解は一様大域吸収的であるという。

- 任意の  $\rho > 0$  に対して、ある  $r(\rho) > 0$  が存在して、 $t_0 \geq 0$  かつ  $\mathbf{x}_0 \in B(\rho)$  ならば、任意の  $t \geq t_0$  に対して

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in B(r)$$

が成り立つとき、方程式系 (1.1) の解は一様有界であるという。

- 方程式系 (1.1) の零解が一様安定かつ一様大域吸収的であり、方程式系 (1.1) の解が一様有界であるならば、方程式系 (1.1) の零解は一様大域的漸近安定であるという。

ここで、 $\rho$  は十分大きく、 $\eta$  は十分小さいと考えるのが自然である。安定性理論については、例えば、[1-4, 6, 9, 10, 19, 22, 23, 30] に詳述されている。

次に、 $V(x, y) = G(x) + F(y)$  とし、領域

$$S(\rho) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: V(x, y) < \rho\}$$

を定義すれば、(1.2) と (1.3) から、固定された  $\rho > 0$  ごとに領域  $S(\rho)$  は有界である。したがって、上記の各定義において、 $B(\rho)$  の代わりに  $S(\rho)$  を用いてもよい。

定理 1 の証明は、(I) 零解が一様安定である (II) 解が一様有界である (III) 零解が一様大域吸収的である の 3 つに分けて行う。特に、(III) の証明では、初期時刻  $t_0$  に依存しない  $\delta, T, B$  を求めるために詳細な議論が必要である。

(I) の証明 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、 $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$  とおき、任意の解  $(x(t), y(t))$  に対して

$$v(t) = V(x(t), y(t))$$

と定義する。このとき、仮定 (iii)–(v) により、関数  $v$  は  $[t_0, \infty)$  において非負であり、連続微分可能である。また、仮定 (i), (iv)–(vi) により、任意の  $t \geq t_0$  に対して

$$v'(t) = g(x(t))x'(t) + \frac{\varphi(y(t))}{\psi(y(t))} y'(t) = -h(t) \frac{\varphi(y(t))f(y(t))}{\psi(y(t))} \leq 0 \quad (2.1)$$

となり

$$V(x(t), y(t)) = v(t) \leq v(t_0) = V(x_0, y_0) < \delta = \varepsilon$$

であることが分かる。これは、任意の  $t \geq t_0$  に対して  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in S(\varepsilon)$  を意味する。□

**(II) の証明** 任意の  $\rho > 0$  に対して、 $r(\rho) = \rho$  とおき、 $t_0 \geq 0$  かつ  $\mathbf{x}_0 \in B(\delta)$  である解  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  を考える。このとき、不等式 (2.1) から、任意の  $t \geq t_0$  に対して

$$V(x(t), y(t)) = v(t) \leq v(t_0) = V(x_0, y_0) < \rho = r$$

であることが分かる。したがって、 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in S(\rho) = S(r)$  である。□

**(III) の証明の概略 (T の選び方)** 関数  $\hat{G}$  と  $\hat{F}$  をそれぞれ

$$w = \hat{G}(x) = G(x) \operatorname{sgn} x = \begin{cases} G(x) & \text{if } x \geq 0, \\ -G(x) & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

と

$$w = \hat{F}(y) = F(y) \operatorname{sgn} y = \begin{cases} F(y) & \text{if } y \geq 0, \\ -F(y) & \text{if } y < 0 \end{cases}$$

のように定義する。このとき、 $\hat{G}(0) = \hat{F}(0) = 0$  である。また、仮定 (iii)–(v) により、 $\hat{G}$  と  $\hat{F}$  は  $\mathbb{R}$  において狭義単調増加する。したがって、連続な逆関数  $\hat{G}^{-1}$  と  $\hat{F}^{-1}$  が存在し

$$|\hat{G}^{-1}(w)| \nearrow \infty \quad \text{as } |w| \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

と

$$\hat{F}^{-1}(w) \searrow 0 \quad \text{as } |w| \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

を満たす。

仮定 (iv), (v) と (2.3) により、 $\hat{F}^{-1}(-\eta_0/2) \leq y \leq \hat{F}^{-1}(\eta_0/2)$  に対して

$$\psi(y) > \frac{\psi(0)}{2}$$

であり

$$\begin{cases} \varphi(y) \geq \nu y & \text{if } 0 \leq y \leq \hat{F}^{-1}\left(\frac{\eta_0}{2}\right), \\ \varphi(y) \leq \nu y & \text{if } \hat{F}^{-1}\left(-\frac{\eta_0}{2}\right) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

を満たす  $\eta_0 > 0$  を見つけることができる。また、仮定 (vii) により、任意の  $t \geq 0$  に対して

$$0 < k_1 \leq k(t) \leq k_2$$

となる定数  $k_1$  と  $k_2$  が存在する。任意の十分大きな  $\rho > 0$  と十分小さい  $\eta \in (0, \eta_0]$  に対して

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ 1, \frac{k_1 \psi(0)}{2} \min_{\hat{G}^{-1}(\eta/2) \leq x \leq \hat{G}^{-1}(\rho)} g(x), \frac{k_1 \psi(0)}{2} \min_{\hat{G}^{-1}(-\rho) \leq x \leq \hat{G}^{-1}(-\eta/2)} (-g(x)) \right\} > 0$$

を選ぶことができる。さらに、性質 (2.2) により

$$K(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \max \{ \hat{G}^{-1}(\rho), -\hat{G}^{-1}(-\rho) \} \nearrow \infty \quad \text{as } \rho \rightarrow \infty$$

であることが分かる。

方程式

$$u' + h(t)\tilde{f}(u) + 1 = 0$$

の初期条件  $u(\sigma) = 0$  を満たす特解  $u$  を考える。条件 (1.5) により、任意の  $t \geq \tau_1$  に対して

$$\int_{\sigma}^{t+\sigma} u(s) ds \leq -\frac{K(\rho)}{k_2 \varepsilon_0 \nu}$$

を満たす  $\tau_1 > 0$  を選ぶことができる。同様に、方程式

$$u' + h(t)\tilde{f}(u) - 1 = 0$$

の初期条件  $u(\sigma) = 0$  を満たす特解  $u$  は任意の  $t \geq \tau_1$  に対して

$$\int_{\sigma}^{t+\sigma} u(s) ds \geq \frac{K(\rho)}{k_2 \varepsilon_0 \nu}$$

を満たす (必要ならば、さらに大きな値を  $\tau_1$  とすればよい)。ここで、 $\varepsilon_0$  は  $\rho$  と  $\eta$  に依存し、 $\tau_1$  は  $\rho$  と  $\varepsilon_0$  に依存しているので、結局、 $\tau_1$  は  $\rho$  と  $\eta$  のみに依存していることに注意してほしい。仮定 (vi) により

$$\int_t^{t+1} h(s) ds \geq \ell \quad \text{for } t \geq \hat{t}.$$

を満たす  $\ell$  と  $\hat{t}$  が存在する (これらは  $\rho$  と  $\eta$  には依存しない)。

次に、 $\mu = \min \{ \eta, 2F(\varepsilon_0), 2F(-\varepsilon_0) \}$  とおき

$$R(\mu, \rho) = \min_{\mu/4 \leq \eta \leq \rho} \left\{ \frac{\varphi(\hat{F}^{-1}(\eta)) f(\hat{F}^{-1}(\eta))}{\psi(\hat{F}^{-1}(\eta))}, \frac{\varphi(\hat{F}^{-1}(-\eta)) f(\hat{F}^{-1}(-\eta))}{\psi(\hat{F}^{-1}(-\eta))} \right\}$$

と

$$\tau_2 = \hat{t} + \left\lceil \frac{\rho}{\ell R(\mu, \rho)} \right\rceil + 1$$

を定義する。ここで、角括弧  $\lceil \bullet \rceil$  は実数  $\bullet$  以下の最大の整数である (日本では、所謂ガウス記号)。定数  $\mu$  と  $\tau_2$  も  $\rho$  と  $\eta$  のみに依存することに注意してほしい。仮定 (vi) により

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{R(\mu, \rho)}{2\rho} \int_t^{t+\mu/(4k_2L(\rho)M(\rho))} h(s) ds$$

は  $\rho$  と  $\eta$  のみに依存する正の値である。ただし

$$L(\rho) = \max_{\hat{G}^{-1}(-\rho) \leq x \leq \hat{G}^{-1}(\rho)} |g(x)| \quad \text{かつ} \quad M(\rho) = \max_{\hat{F}^{-1}(-\rho) \leq y \leq \hat{F}^{-1}(\rho)} |\varphi(y)|$$

を意味する。したがって、任意の  $t \geq \tau_3$  に対して

$$\int_t^{t+\mu/(4k_2L(\rho)M(\rho))} h(s)ds \geq \frac{\rho\kappa}{R(\mu, \rho)}$$

を満たす  $\tau_3 > 0$  を選ぶことができる。定数  $\tau_3$  も  $\rho$  と  $\eta$  のみに依存する。以上により得られた正の値  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  を用いて

$$T = T(\rho, \eta) = \tau_3 + \left( \left\lceil \frac{1}{\kappa} \right\rceil + 1 \right) (\tau_1 + \tau_2 + 1)$$

とおく。

さて、 $t_0 \geq 0$  かつ  $\mathbf{x}_0 \in S(\rho)$  である方程式系 (1.1) の解  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  を考える。もし、この解がある時刻  $t^* \in [t_0, t_0 + T]$  において  $S(\delta(\eta))$  に入るならば、(I) で証明した事実により、解は  $S(\eta)$  に留まり続けることになる。即ち、任意の  $t \geq t_0 + T \geq t_0$  に対して

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in S(\eta)$$

が示せて、(III) の証明は完了する。そのような時刻  $t^* \in [t_0, t_0 + T]$  の存在を確認するためには背理法を用いるが、少々込み入った議論を続けなければならないので、詳細は省略する。基本的手法は [27] に記載してあるので、興味がある方はそちらを参照してほしい。□

## 具体例

記号表記を簡単にするため、 $\mathbb{R}$  上の連続実数値関数  $\phi_m$  を

$$\phi_m(z) = |z|^{m-2}z, \quad z \in \mathbb{R}$$

のように定義する（ただし、 $m > 1$ ）と、任意の  $z \neq 0$  に対して  $z\phi_m(z) = |z|^m > 0$  が成り立つ。方程式系 (1.1) の関数として、 $f(y) = \phi_p(y)$ ,  $g(x) = \phi_q(x)$ ,  $\varphi(y) = \phi_r(y)$ ,  $\psi(y) = 1 + |y|$  とおき

$$1 < r \leq 2 \leq p \quad \text{かつ} \quad q > 1$$

と仮定する。このとき、仮定 (i), (iii) の前半、(iv) の前半が成り立つことは明らかである。関数  $\tilde{f}$  として  $f$  を選べば、任意の  $\lambda \in (0, 1]$  と  $y \in \mathbb{R}$  に対して

$$\frac{y}{\lambda} \tilde{f}(y) = \frac{|y|^p}{\lambda} \leq \frac{|y|^p}{\lambda^{p-1}} = y \tilde{f}\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

であるから、仮定 (ii) も成り立つ。また

$$G(x) = \frac{|x|^q}{q} \nearrow \infty \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty$$

であり, 任意の  $y \in [-1, 0) \cup (0, 1]$  に対して  $\varphi(y)/y = 1/|y|^{2-r} \geq 1 = \nu$  であるので, 仮定 (iii) の後半と (iv) の後半も成り立つ。さらに, 任意の  $y \in \mathbb{R}$  に対して

$$\psi(y) = 1 + |y| > 0$$

であり, 任意の  $y \geq 1$  に対して

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^y \frac{\eta^{r-1}}{1+\eta} d\eta = \int_0^1 \frac{\eta^{r-1}}{1+\eta} d\eta + \int_1^y \frac{\eta^{r-1}}{1+\eta} d\eta \\ &> \int_1^y \frac{\eta^{r-1}}{1+\eta} d\eta \geq \int_1^y \frac{1}{1+\eta} d\eta = \ln(1+y) - \ln 2 \end{aligned}$$

である。したがって,  $F$  は偶関数であるので, 仮定 (v) も成り立つ。

係数  $h$  と  $k$  をそれぞれ  $c \exp(\cos t) - \cos t$  と  $\exp(\cos t + \sin(\sqrt{2}t))$  とする。このとき,  $h$  は周期  $2\pi$  の周期関数であるが,  $k$  は周期関数ではない。したがって, 方程式系 (1.1) も周期系ではないことに注意してほしい (周期系であるならば, 一様大域的漸近安定性と大域的漸近安定性は同値になる)。また, 簡単な計算により, 係数  $h$  が integrally positive になるための必要十分条件は  $c \geq \exp(-1)$  であることが確認できる。したがって, 仮定 (vi) が成り立つために

$$c \geq \exp(-1)$$

と仮定する。係数  $k$  については

$$\inf_{t \geq 0} k(t) > \exp(-2) \quad \text{かつ} \quad \sup_{t \geq 0} k(t) < \exp(2)$$

が満たされるから, 仮定 (vii) も成り立つ。

任意の  $\sigma \geq 0$  に対して, 初期条件  $u(\sigma) = 0$  を満たす 1 階非線形微分方程式

$$u' + h(t)\phi_p(u) + 1 = 0$$

の特解  $u$  を考える。このとき

$$u'(\sigma) = -1 - h(\sigma)\phi_p(u(\sigma)) = -1$$

であり,  $t > \sigma$  かつ  $u(t) > -\phi_{p^*}(1/h(t))$  である限り

$$u'(t) = -1 - h(t)\phi_p(u(t)) < 0$$

である。ただし,  $\phi_{p^*}$  は  $\phi_p$  の逆関数であり

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

が成り立つ。したがって, 特解  $u$  の軌道は

$$\left\{ (t, u) : t \geq 0 \text{ and } u = -\phi_{p^*}\left(\frac{1}{h(t)}\right) \right\}$$



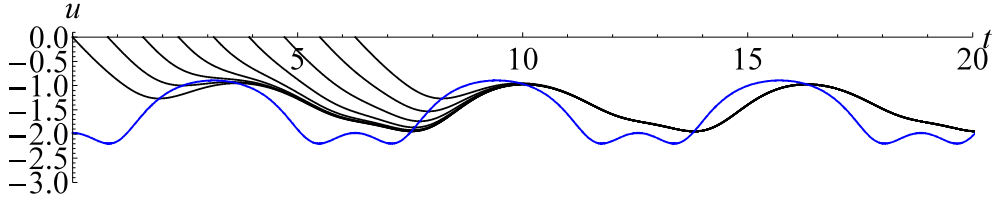


図 1: 曲線  $C: u = -(0.5 \exp(\cos t) - \cos t)^{-2/3}$  と初期条件  $u(\sigma) = 0$  を満たす 1 階非線形方程式

$$u' + (0.5 \exp(\cos t) - \cos t) \sqrt{|u|} u + 1 = 0$$

の解軌道が 9 本描かれている。ただし、 $\sigma = (n-1)\pi/4$  ( $n = 1, 2, \dots, 9$ ) である。曲線  $C$  は周期  $2\pi$  で下降と上昇を繰り返す、2 つの水平線  $u = -(0.5 \exp(1/\sqrt{2}) - 1/\sqrt{2})^{-2/3}$  と  $u = -(0.5 \exp(-1) + 1)^{-2/3}$  に挟まれた帯領域内に位置する。また、各解軌道は 2 つの水平線に挟まれた帯領域内に入れば、それ以後は帯領域に留まる。

で定義される曲線  $C$  に交わるまで下降する。曲線  $C$  は、 $c > \exp(-1)$  ならば上下に連続的かつ周期的に変化し、 $c = \exp(-1)$  なら  $t = (2n - 3/2)\pi$  で不連続になる周期的に変化する。どちらの場合も、曲線  $C$  は平面  $\{(t, u) : t \geq 0 \text{ and } u \leq -\phi_{p^*}(1/\bar{h})\}$  上に位置する。ただし、 $\bar{h} = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} h(t) > 0$  である。特解  $u$  の軌道は下降して  $C$  と交差し、その後上昇し再び  $C$  と交差する。その後、曲線  $C$  はこの垂直方向の変化を繰り返す。図 1 は  $c = 0.5$ ,  $p = 5/2$ ,  $p^* = 5/3$  のときの曲線  $C$  の周期性を描いたものである。

特解  $u$  の軌道が曲線  $C$  に初めて交わる時刻を  $t = \sigma + \omega$  とする。即ち

$$u(\sigma + \omega) = -\phi_{p^*}(1/h(\sigma + \omega))$$

であり、任意の  $t \in [0, \sigma + \omega)$  に対して

$$u(t) > -\phi_{p^*}(1/h(t))$$

となる。もちろん、 $\omega$  は  $\sigma$  に依存するが、係数  $h$  の周期性によって、 $\omega$  も  $\sigma$  に関して周期的である。したがって、 $\omega$  には最大値  $\bar{\omega} = \max_{0 \leq \sigma \leq 2\pi} \omega(\sigma)$  が存在する。このことと図 1 のキャプションで説明したことにより、任意の  $t \geq \sigma + \bar{\omega}$  に対して  $u(t) \leq -\phi_{p^*}(1/\bar{h})$  であることが分かる。したがって、評価

$$\int_{\sigma}^{t+\sigma} u(s) ds = \int_{\sigma}^{\sigma+\bar{\omega}} u(s) ds + \int_{\sigma+\bar{\omega}}^{t+\sigma} u(s) ds \leq -\phi_{p^*}\left(\frac{1}{\bar{h}}\right)(t - \bar{\omega})$$

が得られる。この不等式の右辺は  $\sigma$  に影響されないことに注意してほしい。同様に、初期条件  $u(\sigma) = 0$  を満たす 1 階非線形微分方程式

$$u' + h(t)\phi_p(u) - 1 = 0$$

の特解  $u$  についても

$$\int_{\sigma}^{t+\sigma} u(s) ds \geq \phi_{p^*}\left(\frac{1}{\bar{h}}\right)(t - \bar{\omega})$$

が成り立つ。したがって、条件 (1.5) が満たされる。

上記の考察と定理 1 により、条件

$$1 < r \leq 2 \leq p, \quad q > 1 \text{ かつ } c \geq \exp(-1)$$

の下で, 非自励, 非線形かつ非周期方程式系

$$\begin{cases} x' = \exp(\cos t + \sin(\sqrt{2}t))\phi_r(y), \\ y' = -(c \exp(\cos t) - \cos t)\phi_p(y) - \exp(\cos t + \sin(\sqrt{2}t))\phi_q(x)(1 + |y|) \end{cases} \quad (3.1)$$

の零解は一様大域的漸近安定である。方程式系 (3.1) は非自励であるから, 同じ初期点  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  を有する解  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  であっても初期時刻  $t_0$  が違えば, その形状は異なる。しかし, 定理 1 はそれらの解軌道が同じ程度の速さで平衡点  $(0, 0)$  に漸近することを保証する (図 2 を参照)。

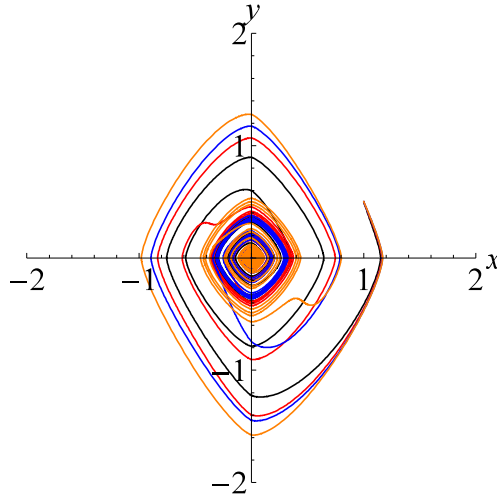


図 2: 同じ初期点  $\mathbf{x}_0 = (1, 0.5)$  を有する方程式系 (3.1) の解軌道が 4 本描かれている。パラメータ  $p, q, r, c$  はそれぞれ 2.5, 1.5, 1.5, 0.5 である。4 本の解軌道それぞれの初期時刻  $t_0$  は  $(n+11)\pi/4$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) である。解軌道の形状はすべて異なるが, いずれも原点を中心に回転し, 原点に近づいていく。

図 2 だけでは, 解の原点への漸近的な速さについての十分な情報を得ることができない。それを補うため, 図 3 では, 初期時刻の異なるいくつかの方程式系 (3.1) の解の第 1 成分  $x(t)$  の振る舞いを可視化する。それらの漸近挙動を理解し易くするために, 初期時刻  $t_0$  の違いによって 4 つのグループに分けた。尚, 挙動を比較するために, 値  $x(t_0)$  は 1 に固定した (図 2 に示した解に対応している)。図 3 の曲線はすべて形状が異なり, 平行移動で完全に別の曲線に重なることはない。しかし, どの曲線も, 初期時刻から少なくとも  $5\pi$  経過した後は, 本の水平線  $x = 0.2$  と  $x = -0.2$  の間の帯領域内に留まっている。また, 別のシミュレーション結果では, 図 3 に示した同じ解の第 1 成分  $x(t)$  は, 初期時刻から少なくとも  $4\pi$  経過した後は, 2 本の水平線  $x = 0.3$  と  $x = -0.3$  の間の帯領域内に入り, その後はこの帯領域内に留まることが確認された。これらのことから, 同じ点  $\mathbf{x}_0$  から出発した方程式系 (3.1) の解は, 初期時刻  $t_0$  が違っててもほぼ同じ速さで原点  $(0, 0)$  に接近することが理解できる。即ち, 図 2 や図 3 は方程式系 (3.1) の零解が一様大域的漸近安定であることを示している。

## 局所定理

定理 1 は, 初期時刻に依らず, 初期点と同じであれば, 方程式系 (1.1) のすべての解が同じ速度で原点に近づくことを保証する大域定理である。つまり, 初期点は  $\mathbb{R}^2$  平面内の

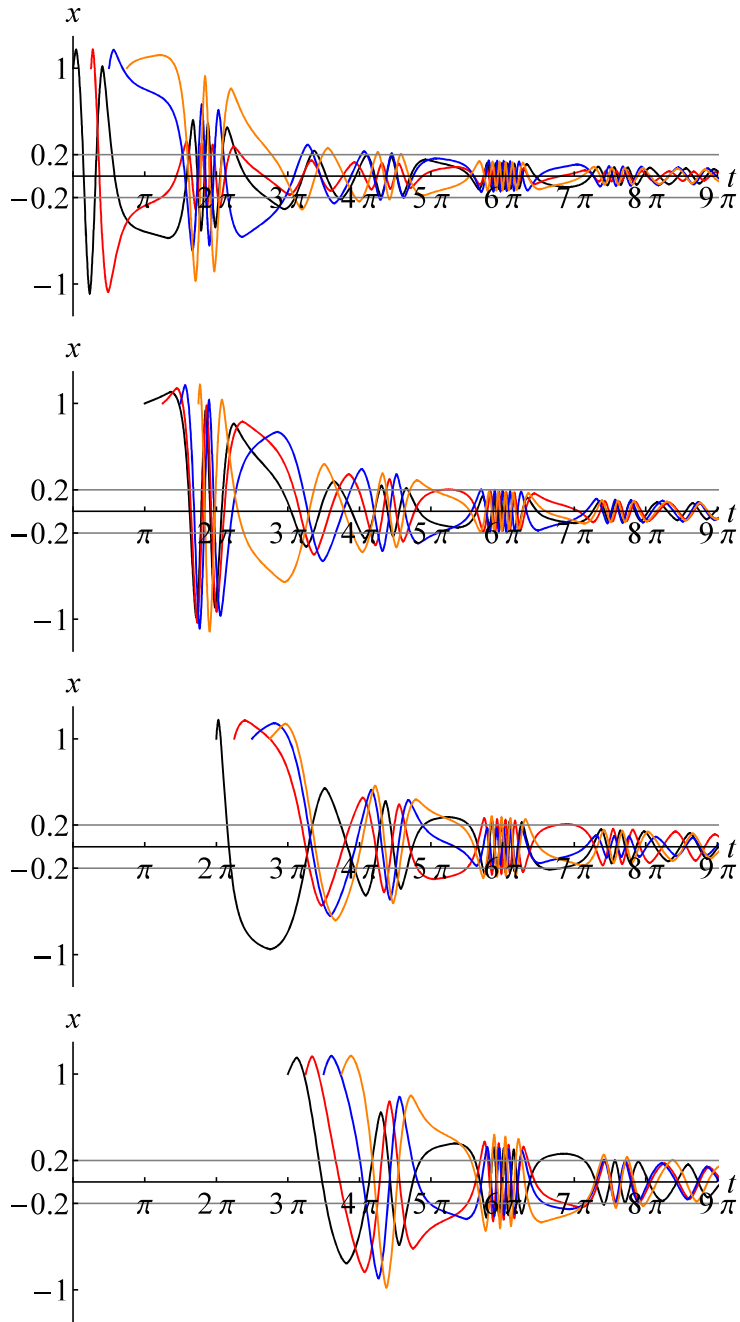


図 3: これらの曲線は、パラメータ  $p, q, r, c$  をそれぞれ 2.5, 1.5, 1.5, 0.5 にした方程式系 (3.1) の解の第 1 成分  $x(t)$  に時間変化を示している。それぞれの初期点は  $((n-1)\pi/4, 1)$  ( $n = 1, 2, \dots, 16$ ) である。

どこでも構わない。定理 1 にはいくつかの仮定が必要であるが、これらのうち、(i) と (ii) の制限を弱めることによって、初期点の位置に制限を課す局所定理を得られる。正確を期するために、精度を確保するために、いくつかの定義を与える。

- ある  $\rho > 0$  が存在して、任意の  $\eta > 0$  に対して、ある  $T(\eta) > 0$  が存在して、 $t_0 \geq 0$  かつ  $\mathbf{x}_0 \in B(\rho)$  ならば、任意の  $t \geq t_0 + T$  に対して

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in B(\eta)$$

が成り立つとき、方程式系 (1.1) の零解は一様吸収的であるという。

- 方程式系 (1.1) の零解が一様安定かつ一様吸収的であるならば、方程式系 (1.1) の零解は一様漸近安定であるという。

ただし、証明するときは、定理 1 と同様に、 $B(\rho)$  の代わりに領域  $S(\rho)$  を使用する。  
仮定 (i) と (ii) より制限が弱いものとして、以下の仮定を設ける。

(i') ある  $\theta > 0$  が存在して、任意の  $y \in [-\theta, 0) \cup (0, \theta]$  に対して  $yf(y) > 0$  である。

(ii')  $\mathbb{R}$  上の連続実数値関数  $\tilde{f}$  が任意の  $y \in [-\theta, 0) \cup (0, \theta]$  に対して

$$0 < \frac{f(y)}{\tilde{f}(y)} \leq 1$$

であり、任意の  $\lambda \in (0, 1]$  と  $y \in \mathbb{R}$  に対して

$$\frac{y}{\lambda} \tilde{f}(y) \leq y \tilde{f}\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

を満たす。

例えば、関数  $f(y) = \sin y$  と  $\tilde{f}(y) = y$  は仮定 (i') と (ii') を満たす。以下の結果が成り立つ。

## 定理 2

仮定 (i'), (ii'), (iii)–(vii) の下で、1 階非線形微分方程式 (1.4) の初期条件  $u(\sigma) = 0$  を満たす解  $u$  に対して、条件 (1.5) が満たされるならば、方程式系 (1.1) の零解は一様漸近安定である。

## 生態系モデルへの応用

非線形方程式系

$$\begin{cases} N' = rN \left(1 - \frac{N}{k}\right) - \frac{N^q P}{a + N^q}, \\ P' = \frac{b N^q P}{a + N^q} - DP \end{cases} \quad (5.1)$$

はホーリング型応答関数をもつ被食者・捕食者モデルとして良く知られている ([8, 11, 13, 17, 20, 21, 24–26])。ここで、 $N$  と  $P$  はそれぞれ被食者と捕食者の個体数（密度）を表し、パラメータ  $r, k, a, b, D, q$  は正の実数で生物学的な意味をもつ。非線形項  $N^q/(a + N^q)$  は応答関数と呼ばれ、被食者の密度に対する捕食者の摂取率を表す。この応答関数は、指数  $q$  が 1 以下の場合、ホーリング II 型に属し、指数  $q$  が 1 より大きい場合、ホーリング III 型に属すると言われる。モデル (5.1) やその一般化モデルが広く研究されている ([5, 7, 12, 14–16])。モデル (5.1) は常に 2 つの境界平衡点  $(0, 0)$  と  $(k, 0)$  をもつ。もし

$$b > D \quad \text{かつ} \quad k > N_* \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[q]{\frac{aD}{b-D}} \quad (5.2)$$

ならば、唯一の内部平衡点  $(N_*, P_*)$  が領域  $\{(N, P): N > 0 \text{ and } P > 0\}$  に現れる。ただし

$$P_* = \frac{br}{D} \left(1 - \frac{N_*}{k}\right) N_*$$

である。実際の生態系は非常に複雑であり、生態系全体が様々な要因の影響を受け、時間的に変化していると考えるのが自然である。しかし、残念ながら、モデル (5.1) は自励系（つまり、時間不変）であるため、環境の時間変化を表現できず、生態系全体への影響を予測し評価することは困難である。そこで、時間変化を近似的に把握することで、モデル

$$\begin{cases} N' = p(t) \left( r N \left(1 - \frac{N}{k}\right) - \frac{N^q P}{a + N^q} \right), \\ P' = p(t) \left( \frac{b N^q P}{a + N^q} - DP \right) \end{cases} \quad (5.3)$$

を考える。ここで、 $p$  は  $[0, \infty)$  上の正の周期関数である。

変数  $N$  と  $P$  を

$$x = -\ln\left(\frac{P}{P_*}\right) \quad \text{and} \quad y = -\ln\left(\frac{N}{N_*}\right)$$

によって、それぞれ  $x$  と  $y$  に変換すると、モデル (5.3) は

$$f(y) = r \left(1 - \frac{N_*}{k} \exp(-y)\right) - \psi(y),$$

$$g(x) = 1 - \exp(-x),$$

$$\varphi(y) = D(b - D) \frac{1 - \exp(-qy)}{b - D + D \exp(-qy)},$$

$$\psi(y) = br \left(1 - \frac{N_*}{k}\right) \frac{\exp(-(q-1)y)}{b - D + D \exp(-qy)},$$

$$h(t) = k(t) = p(t).$$

とする方程式系 (1.1) に書き換えられる。この変数変換は領域  $\{(N, P): N > 0 \text{ and } P > 0\}$  を  $x$ - $y$  平面全体  $\mathbb{R}^2$  に写され、内部平衡点  $(N_*, P_*)$  が原点  $(0, 0)$  に移動する。定理 2 から以下の結果が導かれる。

### 定理 3

条件 (5.2) が成り立つとする。もし、 $q \geq 1$  であり

$$(qD - (q-1)b) < (qD - (q-2)b)N_* \quad (5.4)$$

ならば、モデル (5.3) の内部平衡点は  $(N_*, P_*)$  は一様漸近安定である。

証明 まず、定理 2 の仮定 (i'), (ii'), (iii)–(vii) が満たされることを示す。関数  $f$  は

$$f(y) = r \left( \left(1 - \frac{N_*}{k} \exp(-y)\right) - \left(1 - \frac{N_*}{k}\right) \frac{b}{(b-D) \exp((q-1)y) + D \exp(-y)} \right)$$

と変形でき、微分すると

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dy} f(y) = \frac{N_*}{k} \exp(-y) + b \left( 1 - \frac{N_*}{k} \right) \frac{(q-1)(b-D) \exp((q-1)y) - D \exp(-y)}{\left( (b-D) \exp((q-1)y) + D \exp(-y) \right)^2}$$

が得られる。明らかに、 $f(0) = 0$  であり、条件 (5.4) により

$$\left. \frac{d}{dy} f(y) \right|_{y=0} = \frac{r}{bk} \left( (qD - (q-2)b)N_* - (qD - (q-1)b) \right) > 0$$

が確かめられる。したがって、マクローリン展開により

$$\begin{cases} 0 < f(y) < Cy & \text{if } y \in (0, \theta], \\ 0 > f(y) > Cy & \text{if } y \in [-\theta, 0), \end{cases}$$

となるような  $\theta > 0$  と  $C > r \left( (qD - (q-2)b)N_* - (qD - (q-1)b) \right) / (bk)$  が存在する。即ち、仮定 (i') が成り立つ。一般性を失うことなく、 $C \geq 1$  と仮定して良い。関数  $\tilde{f}$  として  $\tilde{f}(y) = Cy$  を選ぶと、任意の  $y \in [-\theta, 0) \cup (0, \theta]$  に対して

$$\frac{f(y)}{\tilde{f}(y)} = \frac{1}{C} \in (0, 1]$$

であり、任意の  $\lambda \in (0, 1]$  かつ  $y \in \mathbb{R}$  に対して

$$\frac{y}{\lambda} \tilde{f}(y) = \frac{C}{\lambda} y^2 = y \tilde{f}\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

であるから、仮定 (ii') が成り立つ。仮定 (iii) と (iv) も成り立つ。なぜなら

$$xg(x) = x(1 - \exp(-x)) > 0 \quad \text{if } x \neq 0,$$

$$G(x) = x + \exp(-x) - 1 \nearrow \infty \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty,$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dy} \varphi(y) = \frac{qD(b-D) \exp(-qy)}{(b-D + D \exp(-qy))^2}$$

である。条件 (5.2) により、任意の  $y \in \mathbb{R}$  に対して  $d\varphi(y)/dy > 0$  であることが分かる。また

$$\left. \frac{d}{dy} \varphi(y) \right|_{y=0} = \frac{qD(b-D)}{b^2} > 0$$

であるから、 $\nu$  を  $qD(b-D)/b^2$  より小さい正の値とすると、任意の  $y \in [-c, 0) \cup (0, c]$  に対して  $\varphi(y)/y \geq \nu$  となる。さらに、条件 (5.2) により、任意の  $y \in \mathbb{R}$  に対して  $\psi(y) > 0$  である。もし、 $q > 1$  ならば

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{D(b-D)k}{br(k-N_*)} \int_0^y (\exp((q-1)\eta) - \exp(-\eta)) d\eta \\ &= \frac{D(b-D)k}{br(k-N_*)} \left( \frac{1}{q-1} \exp((q-1)y) + \exp(-y) - \frac{q}{q-1} \right), \end{aligned}$$

であり,  $F(y)$  は (1.3) を満たす。もし,  $q = 1$  ならば

$$F(y) = \frac{D(b-D)k}{br(k-N_*)} (y + \exp(y) - 1) \rightarrow \infty \quad \text{as } |y| \rightarrow \infty$$

となり, 同じく (1.3) を満たす。したがって, 仮定 (v) が成り立つ。係数  $p$  は  $[0, \infty)$  上で正の周期関数であるから, 仮定 (vi) と (vii) も成り立つ。以上より, 定理 2 の仮定はすべて満たされることが確認できた。

次に, 条件 (1.5) が満たされることを示す。モデル (5.3) に付随する方程式は

$$u' + Ch(t)u \pm 1 = 0. \quad (5.5)$$

になり, 初期条件  $u(\sigma) = 0$  を満たす解  $u$  は

$$u(t) = \mp \int_{\sigma}^t \exp(C(H(s) - H(t))) ds$$

で表せる。ただし, ダブル記号は方程式 (5.5) のそれと複号同順であり

$$H(t) = \int_0^t h(s) ds$$

である。係数  $p$  の仮定から, 任意の  $t \geq 0$  に対して

$$0 < \underline{p} \leq p(t) \leq \bar{p}$$

を満たす定数  $\underline{p}$  と  $\bar{p}$  が存在する。したがって, 任意の  $s \leq t$  に対して

$$H(s) - H(t) = \int_t^s h(\tau) d\tau \geq \int_t^s \bar{p} d\tau = \bar{p}(s - t)$$

が成り立つ。これを用いると,  $\sigma \leq \tau \leq s \leq t + \sigma$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^{t+\sigma} \int_{\sigma}^s \exp(C(H(\tau) - H(s))) d\tau ds &\geq \frac{1}{\bar{p}C} \int_{\sigma}^{t+\sigma} (1 - \exp(\bar{p}C(\sigma - s))) ds \\ &= \frac{1}{\bar{p}C} \left( t + \frac{1}{\bar{p}C} \left( \frac{1}{\exp(\bar{p}Ct)} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

と評価できる。したがって, この 2 重積分は  $\sigma$  に関して一様に  $t$  の増加とともに発散するので, 条件 (1.5) が成り立つ。故に, 定理 2 により, モデル (5.3) の内部平衡点は  $(N_*, P_*)$  は一様漸近安定である。□

モデル (5.3) は生態系システムであるから, 係数  $p$  が正の周期関数であると仮定することには妥当性があるが, この仮定は必ずしも必要ではない。係数  $p$  に正の下限と上限があれば, 仮定 (vi) と (vii) は満たされ, 定理 3 は成立する。

著者の一連の研究 [24–26] により, 以下の結果が成り立つ。

#### 定理 A

指数  $q$  は任意の正の数であり, 条件 (5.2) が成り立つならば, モデル (5.1) の内部平衡点は  $(N_*, P_*)$  が大域的漸近安定であるための必要十分条件は

$$(qD - (q-1)b) \leq (qD - (q-2)b)N_*$$

である。

モデル (5.1) のような自励系に対して、一様大域的漸近安定性と大域的漸近安定性は同値である。定理 A は定理 3 と比べて、適用できる指数  $q$  の範囲が広いが、環境の時間変化を記述する非自励系モデル (5.3) には適用できない。対照的に、定理 3 は非自励系モデル (5.3) に関する結果であるが、必要十分条件を与えていない。定理 3 を改良するためには、 $(N, P)$  から  $(x, y)$  への別の変数変換を用いて、仮定 (i) と (ii) を満たす適切な関数  $f$  と  $\tilde{f}$  を見つける必要があるのかもしれない。

## 参考文献

- [1] A. Bacciotti, L. Rosier, *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*, Springer, Berlin, 2005.
- [2] F. Brauer, J.A. Nohel, *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*, W.A. Benjamin, New York, 1969; (revised) Dover, New York, 1989.
- [3] T.A. Burton, *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 178, Academic Press, New York, 1985; (revised) Dover, New York, 2005.
- [4] L. Cesari, *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, Springer, Berlin, 1959; second ed., Springer, Berlin, 1963; third ed., Springer, Berlin, 1971.
- [5] K.-S. Cheng, Uniqueness of a limit cycle for a predator-prey system, *SIAM J. Math. Anal.* 12 (1981) 541–548.
- [6] W.A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, Heath, Boston, 1965.
- [7] S.-H. Ding, On a kind of predator-prey system, *SIAM J. Math. Anal.* 20 (1989) 1426–1435.
- [8] H.I. Freedman, *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*, Marcel Dekker, New York, 1980.
- [9] A. Halanay, *Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags*, Academic Press, New York, 1966.
- [10] J.K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1969; (revised) Krieger, Malabar, 1980.
- [11] C.S. Holling, The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation, *Mem. Ent. Soc. Can.* 45 (1965) 1–60.
- [12] X.-C. Huang, Uniqueness of limit cycles of generalised Liénard systems and predator-prey systems, *J. Phys. A: Math. Gen.* 21 (1988) L685–L691.
- [13] N.D. Kazarinoff, P. van den Driessche, A model predator-prey system with functional response, *Math. Biosci.* 39 (1978) 125–134.



- [14] R.E. Kooij, A. Zegeling, Qualitative properties of two-dimensional predator-prey systems, *Nonlinear Anal.* 29 (1997) 693–715.
- [15] Y. Kuang, Global stability of Gause-type predator-prey systems, *J. Math. Biol.* 28 (1990) 463–474.
- [16] Y. Kuang and H.I. Freedman, Uniqueness of limit cycles in Gause-type models of predator-prey systems, *Math. Biosci* 88 (1988) 67–84.
- [17] R. May, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, second ed., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1973.
- [18] V.M. Matrosov, On the stability of motion, *Prikl. Mat. Mekh.* 26 (1962) 885–895; translated as *J Appl Math Mech* 26 (1963) 1337–1353.
- [19] A.N. Michel, L. Hou, D. Liu, *Stability Dynamical Systems: Continuous, Discontinuous, and Discrete Systems*, Birkhäuser, Boston, 2008.
- [20] L.A. Real, The kinetics of functional response, *Amer. Natur.* 111 (1977) 289–300.
- [21] L.A. Real, Ecological determinants of functional response, *Ecology* 60 (1979) 481–485.
- [22] N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, *Stability Theory by Liapunov’s Direct Method, Applied mathematical sciences*, vol. 22, Springer, New York, Springer, 1977; (revised) Springer, New York, 2009.
- [23] G. Sansone, R. Conti, *Non-linear differential equations*, Pergamon Press Book, The Macmillan Company, New York, 1964.
- [24] J. Sugie, Uniqueness of limit cycles in a predator-prey system with Holling-type functional response, *Quart. Appl. Math.* 58 (2000) 577–590.
- [25] J. Sugie, M. Katayama, Global asymptotic stability of a predator-prey system of Holling type, *Nonlinear Anal.* 38 (1999) 105–121.
- [26] J. Sugie, R. Kohno, R. Miyazaki, On a predator-prey system of Holling type, *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997) 2041–2050.
- [27] J. Sugie, Y. Ishihara, Uniform global asymptotic stability for oscillators with nonlinear damping and nonlinear restoring terms, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.* 103 (2021) 105969.
- [28] W. Zheng, J. Sugie, A necessary and sufficient condition for global asymptotic stability of time-varying Lotka-Volterra predator-prey systems, *Nonlinear Anal.* 127 (2015) 128–142.
- [29] W. Zheng, J. Sugie, Uniform global asymptotic stability of time-varying Lotka-Volterra predator-prey systems, *Appl. Math. Lett.* 87 (2019) 125–133.

- [30] T. Yoshizawa, *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*, Applied Mathematical Sciences, vol. 14, Springer, New York, 1975.