大学初年級数学において何を伝えるべきなのか

河村　央也（青空学園）
Hisanari Kawamura (Aozora Gakuen)

はじめに

2018 年は明治維新から 150 年の節目の年である．それは西洋式の近代数学が導入されて 150 年ということである．

ここで「大学初年級数学」とは，かつては「教養課程の数学」とも言ったが，それぞれの専門分野に分かれる前の，共通に学ぶ段階の数学のことを言う．私は，その段階でこそ，現代文明の普遍的な方法としての数学が，その基本において伝えられ，問題をとらえる力として学生の身につかねばならないと考えている．

近代 150 年を経た今日の数学は，この観点から改めて検証されねばならない．

私は，かつて公立高校に十数年間勤務し，その後いくつかの職業を経て，塾などで，高校生に数学を教えてきた．その一方で，1999 年初秋からウエブサイト『青空学園数学科』([1]) の制作と管理を行ってきた．

いろんな場で高校生に数学を教えていると，深く掘り下げて教えるためには，教える側に教える各内容の根拠をつかんでいることと，高校数学の方法論をもっていることが必要で，それがなければ，教えることを全うできないことを痛感した．それで，同じ思いをもつ教員や，自分で学ぼうという高校生，大学生の勉強の一助にと，みずから勉強したことを公開してきた．

前回のこの研究会の講究録『次の世代に何を伝えるのか〜今こそ「高い立場からみた初等数学」を〜』([2]) において，現在の高校や中学での数学教育，またその教科書の内容をふまえながら，次のような問題点と課題を指摘した．

(1) 教育現場では，根拠を示すべきところを，感覚的な説明に置きかえ，それがわかりやすくすることだと思いちがいをしている．それでは，わからないときに立ちかえる根拠がわからないままになり，わかるまで考えるという力が育たない．こうしてますます関数や微積分のわからない生徒を増やしている．

(2) 数学を教えるものが，数学的現象をとらえ，その一般化と体系化をつかんだうえで適切に提起し，現象の分析において立ちかえる根拠をつかませ考えさせる．その上で，高校範囲，大学初年級範囲と適切に割り振り，一体のものとして，伝えなければならない．このようなことをするべき数学教員の力が近年大きく低下している．

(3) このような問題意識を教員に提起し，それに応えるものを準備するのが教育数学である．そのために，初等数学を，現代の数学として系統的に基礎づけ，方法論を体系化する．それを学び研究することで，数学教育に携わるもの自身がわかる喜びを知り，それを教室で次の世代に伝えてゆくようにならねばならない．

この 4 年間，これらの課題について，教育現場で問題の把握や実際の教育活動での改革が進んだかといえば，まったくそうではない．ますます授業や講義の劣化が進み，日本の数学教育はいま大きな危機に瀕している．

1　わかってにっこり

1.1　原点の経験

私は 1973 年の秋から高校生に数学を教えはじめた．1974 年の新学期，担任したクラスで教壇に立った．授業をやっていて何かおかしいことに気づいた．クラスの何人かは分数の計算ができない．それに気づいてすぐに分数計算も授業でやろうとしたが，今度はできる側の生徒たちから，分かりきったことに時間をさかずに先に進んでくれと反発を受けた．新米教師の私は大いに困り悩んだ．

そこで，分数計算ができるという生徒に聞いてみた．「分数の積が，分母と分母，分子と分子をかければよいのはなぜか．理由が説明できるか.」彼らは計算方法を知っているだけで，それには答えられなかった．そこで私は，いわゆる水道方式に依って，分数の定義にたち返って，そこから四則計算の原理と方法に入った．

皆はじめての話ばかりで，よく聞いてわかってくれた．そこで，わかってにっこりした顔が忘れられない．はじめてクラスとしてまとまり，ひとつの授業ができた．ここから，教えることについて実に多くのことを学んだ．十数年ほど前，卒業以来 28 年ぶりにその頃の教え子に再会した．すぐその話になり「高校でもう一度分数を習うとは思っていなかったが，面白かった」など，よく昔のことを覚えていてくれた．

「ああ，そうか」という経験を通して，その人自身が変化する．それが人の知るという営みであり、そこに喜びがある．まさに体でわかるという経験である．この経験を得る場こそ，授業の場である．人は，わかるとうれしいし，この喜びは人の本質的な喜びである．それが「学問としての高校数学」であり，生きた学問である.「理解はできるが，納得できない」という段階からの飛躍である．

「分数のできない大学生」という報告はよくある．しかし，問題はそこでその教員が何をしたかである．その実践ぬきの報告は空しい．私自身は，試行錯誤を経て，授業というのはこの喜びを体験する場なのだということを経験した．そしてまた指導方法としての数学教育の難しさと醍醐味，これを実地に経験した．

高校教員になって半年後のこの経験は，その後，他のところで教えるようになっても生きている．問題を正しくつかませる．何が問題かがわかれば生徒は自分で考える．そこまで導き，そして一段飛躍させる．そうすると「わかってにっこり」できる．すべてを喋ってはいけない．その間合いが難しい．これはまた，大学の基礎科目の講義についても言えることである．

しかし，今日，日本の小学校，中学校，高校，そして大学初年級の授業で，講師の語ることを理解し，そしてわかることで，聞くものがにっこりすることがあるだろうか．

これに関して，2018 年に開かれた日本数学協会の講演会で，有田八州穂氏が「ほんとうはむずしい算数」と題して問題を提起された．それが同年 7 月 31 日付の会報第 55 号に紹介されている．

> 有田氏のほんとうはむずかしい算数の話はこの太田氏の話に続く今に至る算数の直面している問題を提起したものと言えます。
>
> 1941 年 (昭和 16 年) にだされた国民学校令に始まる、国が教育の方向性や内容ひいてぱ解き方”までをも画一的に決めていってしまった結果、現在の算数の学習につながってるのではないかと氏は考えます。算数という教科名自体がそれを表していると言いますつまり戦争に向かうためのよき少国民づくりのために、計算と公式に特化した、考えない＝説明しない考えない算数にしてしまったのだというのです。それが、効率的であることと早くて簡単で 1 個だけの解き方の算数学習を生み出しているというのです。

ほんとうはむずかしい算数を簡単で分かりやすく正解が出やすい算数としてしまっていいのでしょうか、分数のわり算はなぜ逆数をかけるのか？ということに何の疑問も持たずに、ボーっと生きていく大人になっていいのでしょうか！と氏は言うのです。

根拠を問うことを教えず，計算技術だけ教える今日に続く算数・数学教育は，具体的には 1941 年にはじまるのである．この歴史をふまえた上で，教室でこれを越える教育を実践する教員を育てなければならない．そして，それは可能なのである．ここに，教育数学の任務がある．

1.2　ある問題提起

近年，日本の技術における創造性の欠如が，産業界などからいろいろと発言されるようになった．中島聡 (ブロガー／起業家／ソフトウェア・エンジニア) さんが「日本にはなぜ iPhone が作れなかったのか？」と，次のように言っておられる．

私個人が、ここ 10 年間で「ライフスタイルを変えるほどのイノベーション」と感じたもの、そして実際に毎日のように使っているものを列挙してみました。残念ながら日本製のものは一つもありません。

アプローチの一番の問題は、このプロセスの中で働く人々の当事者意識の欠如です。それぞれの人は、与えられた仕事を「作業」としてこなしているだけで、そこに「魂」が込められていないのです。

商品の購入の際に、人の心を一番動かすのは、どんな機能があるか（WHAT）や、それで何ができるか（HOW）ではなく、なぜ自分はそれを持たなければならないか（WHY）という部分だ、という話です。

確かに，iPhone だけではなくさまざまの SNS や OS などで，世界で使われる情報技術のなかに日本発のものはない．ものそのものを作ることに長けていても，枠組みや仕組みを作ることにおいて，問題意識も能力も欠如していると言いうる現状である．

中島さんが指摘するように，日本の教育の根本的な欠陥は，結果を教えるだけであった．なぜそうするのかという動機を教え，そのような動機をもつことの重要性を教えてこなかったというのである．このような問題は，教育の日常のあり方から考えなければならない．

ところが後にみるように，現実の指導要録の改訂方向は，この問題に向きあうどころか，ますますやり方だけを教える方に進んでいる．

また，2018 年 06 月 04 日付けの日本経済新聞は，

日本の大学の研究力の地盤沈下が鮮明になっている。日本経済新聞が国内外の 209 大学を対象にイノベーション（革新）の創出力を算出したところ、東京大学は学術論文の「生産性」で中国の清華大学に逆転された。米欧の有力大学との差も開いたままだ。先端研究で海外との人的ネットワークが細り、イノベーションの土壌が痩せてきている。

と報告している．この事態は，現在の方向ではまったく変わることがない．

1.3　$\varepsilon-\delta$ 論法

2017 年，そのことを痛感する経験をした．

こちらが教えた生徒で国立大薬学部の学生になったものに久しぶりに会った．大学の数学はおもしろいかと聞くと，解析の授業で $\varepsilon - \delta$ 論法を習ったが，何も分からないと言う．大学の先生はどう言っているのだと聞くと,「数学を専攻するもの以外は分からなくてよい」と言ったというのである．

数学教育で $\varepsilon - \delta$ 論法について，講義でこのように言われるかぎり，日本で iPhone が生まれることはない．青空学園数学科の『解析基礎』にしたがって，ここで模擬講義をする．

数列の収束

(1) 高校数学の極限で,「近づく」とか「収束する」とかが，感覚的な表現であること．いかに厳密な表現で定義するのかが問題である．

数列 $\{a_n\}$ が数 α に収束することは，高校数学では「n がかぎりなく大きくなるとき，a_n は α にかぎりなく近づく」ことと定義し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書き表す．

(2) だが「かぎりなく」というのはどういうことだろうか．これは必ずしも明確ではない．また，「$n \to \infty$」は「n がいくらでも大きくなる」と理解する．しかし「いくらでも大きくなる」もまた必ずしも明確ではない．

(3) 収束や極限値という概念の定義のなかの言葉にはこのように「無限」が潜んでいる．無限という概念は，人に魅力あるものだが，危険も伴う．

(4) 収束や極限値を「無限」を用いずに定義することはできないのか．高校時代の論証に用いられた言葉を振り返り，それが「任意の」と「存在する」，および「ならば」でできていたことを再確認する．これらだけで「収束」を定義できないか．

ここで学生自身に考えさせる．一定の時間を経て，次の解決方法を提示する．

数列 $\{a_n\}$ が数 α に収束することを次のように定義してはどうか．

任意の正の実数 ϵ 対し，$n > N$ なら $|a_n - 1| < \epsilon$ となる自然数 N が存在する．

高校教科書で習った意味で収束するとき，これがなりたつことを確認する．そして，この命題のなかには「かぎりなく」や「いくらでも」という言葉がないことも確認する．

これをもとに数列の和差や積に関する基本的な性質を証明する．続いて連続関数の定義に進む．

実数の連続と関数の連続　関数の連続性や収束性を論述するためにこそ $\varepsilon - \delta$ 論法を用いる．連続性の厳密な定義そのものが $\varepsilon - \delta$ 論法を必要としている．

関数は実数の部分区間 I で定義されたものとする．実数の区間 I で定義され実数値をとる関数を f とする．f は集合 I から実数の集合 $\mathbb{R}$ への写像に他ならない．以下 f はこのような関数であるとする．この区間で関数が連続であることを次のように定義しよう．

関数 $f(x)$ と区間 I の点 c がある．任意の正の実数 ϵ に対して，正の実数 δ で

$$|x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \epsilon \qquad (*)$$

となるものが存在するとき，関数 $f(x)$ は $x = c$ で連続である，という．

教えるものがまずつかみ，そして少し時間をかければ，以上のことを伝えることが出来る．そして，たとえ自分では $\varepsilon - \delta$ 論法を構成できなくても，何が問題であるかをつかむなら，講師が示す解決方法を「うまいな，おもしろいな」と納得することができる．

機会あれば，これを実際に講義してみたいものである．

$\varepsilon-\delta$ 論法の意義　$\varepsilon-\delta$ 論法は，収束性を「すべて」と「存在する」という論理の言葉で論じる方法である．いわば無限を有限の言葉でつかむ方法である．数学的な現象を人間が論理の言葉でつかむうえで不可欠である．

もとより，この論法が確立するまでには幾多の試行錯誤があった．その歴史は『$\varepsilon-\delta$ 論法とその形成』[(3)] に詳しい．$\varepsilon-\delta$ 論法もまた，歴史的制約の中での理論であり，それを最終的な方法であると言うことはできない．しかし，まずこの方法を習得し身につけることが，現代において数学を学ぶことことの意味の一つであり，この段階をふまえることは不可避である．

大学初年級の解析学ではここで躓くことが多いと言われる．まずそれは教える側の力量の問題として考えねばならない．そのうえで，学生にも考えてもらいたい．この論法が苦手な人は，いちどこれを用いずに収束性を厳密に論じてみようとすればよい．やってみればただちに $\varepsilon-\delta$ 論法の重要性がわかる．

まず自分で厳密な組み立てようとする．そして，やはり有限の言葉でこれをつかもうとすれば，これしかないことを納得する．この過程を自ら経験することによってはじめてこの論法の重要性がわかり，日常的な言語感覚や論証感覚を省みることができる．

命題の意味を理解し，それが成立する根拠を問うことをつねに行う．このような問いかけと，そしてそれに応える方法を模索し確立する．$\varepsilon-\delta$ 論法をとおして，学生自身に考えさせつつ，このようなことが講義され，その方法が方法としてまとめられる．このような蓄積がなされる講義でなければならない．

2　青空学園数学科

このような観点から，青空学園数学科では，数学教育にあたるものへの材料の提供と，問題意識のある高校生や大学生への直接の語りかけをおこなってきた．

青空学園数学科のすべての制作物は，TeX によって書かれている．TeX から html ファイルを作るソフトを用いるか，あるいは TeX で記述されたことをウエブ上で表示するソフトを用いて，これらのものをウエブ上にあげると共に，すべて PDF ファイルに変換し，自由に入手できるように公開してきた．

「学習と教育活動に無償で用いる場合にかぎり，TeX 原稿を含め，全体および一部を利用することができます.」として，TeX テキスト，PDF ファイル，html ファイルのなどを DVDR に焼いて実費で配付してきた．現時点で 265 枚配付されている．そのほとんどは，高校教員かまたは塾などで数学を教えている人である．

青空学園数学科の制作物の柱は次の二面である．

(1) 数学的現象や個別の問題から帰納的に考え，一般化する．それによって，ある体系の中の具体的事実であることをとらえる．

(2) そのような考察過程を経て，体系的記述の意味をつかむ．そのうえで公理系から演繹的に論述して，数学を構成する．

そのことを実際に行うことで，帰納的探究と演繹的構成の力を身につける．これが何より高等数学の教育において伝えるべきことなのである．しかし，現在の教育のなかではそのことの意味も重要さも理解されているとは言いがたく，一般的には実践されていないと言いうる．

青空学園では,「わかってにっこり」とともに「少ない原理，自由な応用」ということを大切にしてきた．これに関して配付物の申し込みメールに次のように書いてくれた人がいた．

> HP の充実と今後の益々のご活躍を祈念申し上げます。小生も、1 年残して退職しましたが、数学を教える（＝教えられる）ことは楽しいことです。今年は「非常勤講師」として 8h ／ w の授業を担当しています。
>
> ある精神科医の方が、「数学は暗記である」と持論を展開しておられましたが、本質的な部分で違和感がありました。機能主義・効率主義な論理は現代において支配的ではありますが、「わかってにっこり」「本質の理解」を軸とする先生の考え方は支持されると思います。今後とも、御身ご自愛されてご活躍ください。
>
> 先のバージョンのディスク重宝させていただきました。おかげさまで、東大２名、京大２名の合格者を出すことができました。生徒諸君には良い刺激と良質な話題を提供させていただき、感謝しております。

実際，いまでも数学は暗記だなどということが言われる．小手先の受験技術しか見ていない．これに対して，青空学園数学科では，

> 入試数学も数学であるかぎり，数学として正面から勉強するのが，結局は早道です．ひとつの問題を深く考え，その結果として多くの問題が解けるようになる，それが本当の勉強です．そんな勉強を青空学園でしよう！

と呼びかけてきた．それは少しずつではあるが支持を広げている．

こうして，本質を掘り下げ，そのことをとおして数学の力をつけるということを基本にし，帰納的探究と演繹的構成の相互発展を実地に積み重ねてきた．そして，20 年近くをかけて次のような制作物を公開してきた．その内容と意味を報告する．

2.1 帰納的探究

数学対話　数学的現象からの帰納的探究の場，それが『数学対話』である．『数学対話』は青空学園数学科での制作の基本である．私と高校生との対話形式で書きためてきたものであるが，それはまた高校時代の自分と今の自分の内での対話でもある．

個別の問題や目前の数学的現象に対して，この事実が成り立つ根拠は何だろう，一般化は出来ないのか，などを対話してきた．教えていることの背景や一般化を深めようという数学教育に携わる人，数学が好きでいろいろ考えることが楽しみな社会人，そして自分でいろいろ考えている高校生や大学生を念頭において，日常出会う問題や自然現象からはじめて，体系的に捉えるところまで，できるだけ論証を飛躍させることなく，話を進めるようにしてきた．

読者の参考までに大きく次のように分けているが，もちろん幾何的ことがらを代数の方法で考えることなど，分野は二重三重に重なっている．

『基礎分野』は，高校数学の土台であり，高校数学成立の根拠となっている基礎的な事実を，その定義から掘り下げて考えようとする．定義ができ，また成立する根拠を考えること，これが大切なことなのだ．根拠を問うという姿勢は教科書からはなかなか身につかない．しかし，ここに科学のはじまりがある．科学の精神を大切にしたい．現在の内容は次の通りである．

> 量と数／自然数と数学的帰納法／実数とは何か／数列の極限と e の定義／複素数の構成／方程式と恒等式／関数／座標の方法／ 計量ということ／定積分の定義／確率論の基礎／命題と条件／対角線論法と不完全性定理／ラムゼー型定理

『代数分野』は，文字と方程式の分野から高校数学を掘りさげたものである．人間は，文字を導入することで抽象力を飛躍的に高めた．文字の発明によって，個別の数から解放され，数の世界の構造を一般的に考察することができるようになった．これが代数学である．高校数学の基本的なねらいは，文字によって考えることができるようにあるということである．三次方程式，四次方程式を考えるところから始めて「原始多項式」や「スツルムの解法」で深める.「終結式と不変式」では十九世紀の数学から二十世紀の数学への飛躍を学ぶ．代数分野にはまた線型代数関連の内容も含めた．線型な関係とは，１次元の場合は比例関係，またはその展開としての１次式で表される関係のことである．多次元の場合には行列で表現される．現在の内容は次の通りである．

三次方程式／四次方程式／１の 17 乗根／スツルムの定理／原始多項式／チェビシェフの多項式／整式の整数論／終結式と不変式／一次変換を見る／線型代数の考え方／二項間漸化式／三項間漸化式と行列の累乗／カタラン数／ムーアヘッドの不等式とその応用／単位分数のエジプト分数による下からの近似（これは雑誌『初等数学』の 2013 年９月号に投稿した一文である）

『幾何分野』は，図形に関連する分野から高校数学を掘りさげたものである．平面に入れられた座標構造によって，図形の関係を代数的な関係に還元し，方程式の問題として図形問題を考える．これが第一である．線型幾何，ベクトルを用いた幾何について考える．これが第二である．またこれらの応用として，江戸時代の和算の問題を取りあげた．第三は,「パスカルの定理」では，軌跡に現れる除外点の意味を考えることから射影幾何に入っていく．ユークリッド平面から射影平面へ，その発展を考えす.「ポンスレの閉形定理」では，入試問題に現れた閉形定理のすべてを解明するとともに，その過程で現れた四次式の意味を追求し，一般的な証明をめざす．それによって複素射影幾何の立場が打ち出される．現在の内容は次の通りである．

フェルマ点／シュタイナー楕円／包絡線／根軸／特別な四面体／線型幾何入門／九点円の不思議／反転と円環問題／デカルトの円定理と一般化／円錐曲線・二次曲線／パスカルの定理／パップスの定理／デザルグの定理／重心座標／ポンスレの定理

『解析分野』は，微分積分に関わる分野から高校数学を掘りさげたものである．微分積分の歴史はアルキメデスやそれ以前の「取りつくし法」にまでさかのぼれる．それは今日の積分の始まりともいえる．近代解析学は，フェルマーやライプニッツによって曲線の接線を考える上で考え出された微分法にはじまる．その前提としての座標の導入が必要であった．ニュートンは，ケプラーやガリレオがとらえた現象の本質をつかみ力学を確立した．微分積分の方法が決定的なものであった．彼は微分と積分を統合して，両者がある意味で逆の関係にあることを見抜いた．それはアルキメデスの方法からの飛躍であった．オイラーらによって解析学は大きな進歩を遂げた．しかし初期には級数の収束性も厳密ではなかった．十九世紀に入ってその基盤を洗いなおし，コーシーやワイエルシュトラウスによって微積分学の基礎ができた．実数の連続性に関するデーデキントやカントールの深い研究は，実数を特徴付ける条件を見いだし．この辺りまでの事々を，高校数学につながる道筋で考えたのである．現在の内容は次の通りである．

生成関数の方法／微分方程式とは／相加相乗平均の不等式／凸関数と不等式／オイラーの公式／代数学の基本定理／円周率を表す／$\zeta(2l)$ を関・ベルヌーイ数で表す／素数の分布／光線の包絡線／懸垂線と双曲線／惑星は楕円軌道を描く／最速降下曲線

このようにして，学問としての高校数学を大学初年級の数学につなぐ制作を，A4 版で 800 ページを越えるものにまとめ公開してきた．

具体的な数学的現象，それは例題として提起されることもあれば，物理現象として提起されることもある．このような現象を分析し，より一般的な枠組を見出し，その下で解決してゆく．大学初年級の頃に，目的意識をもって身につけるべきことなのであるが，今日の日本ではそれが教育としてなされることはほとんどない．

2.2 演繹的構成

体系化の試み　『数学対話』によって，逆に公理を立て体系的に叙述することの大切さもわかる．そのことは,『対角線論法と不完全性定理』の中で，ヒルベルトの方法として書かれている．そしてそれを高校範囲から地続に実行したのが,『数論初歩』,『解析基礎』,『幾何学の精神』である．これらはいずれも数学対話をもとに，逆にそれを体系的に再構成したものである．

数論初歩　数えることは，言葉を話すこととともに，人間にとってもっとも基本的なことである．数は身近な第二の母語というべきものである．数はまず自然数である．この基本的な自然数の世界に，今も多くの未解決問題があることは驚きである．自然数は，整数から有理数，実数，複素数へと世界をひろげる．そのなかで整数もまた代数的整数へと拡大される．整数の理論を数論という．これは今日も発展し続けているまことに美しい理論である．

基本となるのは有理数のなかにある整数，有理整数である.『数論初歩』は有理整数の古典理論を紹介するものである．本書では，とくに断らなければ有理整数のことを単に整数という．数論は初等的な段階から数学のおもしろさ，美しさを実感することができる分野である．また，体系立てて学ぶことで，少ない原理を自由に広く応用するという，数学の大切な精神を身につけることができる．中学生，高校生の時期に数のもつ美しい性質の一端に触れることは，その人を豊かにするとともに，現象を掘り下げて深く考える力をつける．しかし，現実に日本の高校生が出会う整数は，入学試験問題に引きずられて記述されるため，行きあたりばったりで切れ切れの知識が積みあげられ，小手先の方法論が先行し，単純で美しく，かつ豊かな整数の世界がかえってわかりにくくなっている．これが現状である．これはたいへん残念なことである．

このような現状を打破し，数の理論の美しさを伝えてゆく．そのための基礎作業の一つがこの『数論初歩』である．整数分野は教育数学にとっても重要な分野である．したがってこれは，教育数学を構築してゆく上での基礎作業でもある．

> ●まえがき●数論の基礎／自然数／整数／約数と倍数／一次不定方程式／素数／演習問題●剰余類／合同式／オイラーの関数／1 の n 乗根／フェルマの小定理／原始根と指数／演習問題●相互法則／平方剰余／平方剰余の相互法則／いくつかの別証明／演習問題●除法のできる環／ユークリッド整域／多項式環／ガウス整数環／演習問題●連分数／一次不定方程式と連分数／二次行列と実数の連分数展開／連分数と格子／演習問題●ペル方程式／解集合の構造と解の存在／連分数による解の構成／演習問題●素数分布／素数の分布とは／素数が無数にあることの別証明／素数分布の探求／素数定理●存在と構成／自然数の構成／整数と有理数の構成●文献と解答／演習問題解答／入試問題解答●出典と文献

解析基礎　本稿では，数列と関数の収束に関する，いわゆる $\epsilon-\delta$ 論法は終始一貫して用いる．次のような内容を骨子に，いくつか関連したことを含めて展開した．

第一，現代数学は集合をその言葉として用いる．まずこれを整理するとともに，整列集合と選択公理についてのべる．その上で，整数の公理系を出発点とする．西洋の伝統では自然数からはじめ

るのであるが，高木貞治の『数の概念』にならい，東洋の伝統を引き継いで，整数を定義し，有理数にすすむ．

第二，実数の公理までまとめる．整数の公理は人間がつかんでいる数の世界の構造を定式化するものであるが，実数の公理は理論の要請である．実数の公理を満たすモデルの存在を，有理数をもとに示す．実数の構成でのカントールの方法はそれ数列を用いる．実数の連続性を理論の根拠として，そこから導かれる，数列の極限に関する基本性質と無限級数についてまとめる．

第三，解析学は関数を解析することが，基本である．ではその関数とは何か．また，関数の連続性とは何か．これをいわゆる $\epsilon - \delta$ 論法によって定義し，基本性質を示す．

第四，無限小変化率として微分をとらえ，関数の微分を定義し，基本定理としての平均値の定理を示す．平均値の定理の一般化として，関数の展開定理を示す．

第五，無限小の総和としての積分を微分とは独立に定義する．そのうえで面積，体積などの量と定積分の関係を考える．また，積分と微分がどのような条件で逆演算であるかを解明する．

第六，微分と積分を多次元空間の関数に適用し，陰関数定理を証明する．ベクトル解析と多変数の微分積分の初歩をつかむ．

第七，微分方程式を定義し，実数の完備性がどのように微分方程式の解の存在を保証するのかを確認する．

第八，以上の準備の下に，物理世界への適用として，地球の軌道が太陽を焦点とする楕円軌道をなすことを証明する．

幾何学の精神　これは 2010 年の 1 月にはじまる私の射影幾何学習帳であった．それまでも『数学対話』のなかで，射影幾何に関連する話題を取りあげてきた．その内容は高校範囲かそれに地続きな領域内でのことであった．それら『数学対話』の中の射影幾何に関するものを見直し，私自身の勉強として，改めてその根拠を掘り下げるため，パスカルに立ちかえって読み解き，それをふまえて公理的方法によって射影幾何を再構成したいと考えた．

青空学園の願いは，この場が，制度としてある教育体制から自由に，高校数学とそれにつながる領域を掘りさげる場となり，そして何より，高校数学を学問として学び考える力をつける場となることであった．

学問とは根拠を問うことであり，根拠を問うとは、現象を批判し存在を根本において捉えようとすることであり，さらにそれをも捉え直そうとする永続運動である．青空学園はこの根拠を問う永続運動としての学問の復興を願ってきた．教育とは具体的な課題の勉強と研究を通して，この意味における学問を身につけることでなければならないと考えてきた．

高校生の数学教育にかかわるものは，数学を学ぶだけではなく，再構成するという実践がなければ，ほんとうに，教えていることを理解することもできず，また教える内容を普遍的な立場から自由に語ることもできず，その意味で本当に教えるということは出来ないと考えてきた．大学初年級の講義においても不可欠であると考える．

『数学対話』では具体的な数学的現象として，パスカルの定理やポンスレの定理を一般化してつかもうとした．それをふまえ,『幾何学の精神』は射影幾何の公理系からこれらを演繹するということを主眼とした．

2.3　方法を問う

帰納的探究と演繹的構成，これこそが高等数学で実践し，大学初年級で目的意識をもって身につけるべきことである．そのうえで，これらを学問としての高校数でさらに具体化するために，いくつかの入り口となるものを制作してきた．その第一が，高校生のための数学方法論として書いた『高校数学の方法』であり，この間，版を重ねてきた．

高校数学の方法　高校生はまず数学の問題に出会う．では，数学にとって問題とは何か．数学では実際に問題を解くことがその根幹にある．数学の問題は他の教科の問題とは少し意味合いが違う．

世界史において教科の内容を学ぶこととは，基本的な歴史的事実をまずしっかりとつかみ，そのうえでその事実が歴史のなかでどのような意味をもつのかを考え，まとめることである．世界史の試験は歴史的事実をどれだけ把握しているかということと，その事実の意義を評価する力がどれだけあるかを試すものだ．

それに対して数学の問題は，それ自身が数学現象である．数学はすべて現実世界の量に根拠をもつ．そこから一定の抽象を経て，数学的な諸現象が得られる．数学的現象を調べること自体が数学の問題なのだから，その意味で数学は問題自体の中にある．問題を解き，疑問を解決し，わかったことをまとめる．このような営為そのものが数学なのだ．

数学はいつも「これは本当だろうか」という問い,「これを求めるにはどうしたらいいのだろう」という問い，これを原動力にしてきた．こうして論証のための体系がまとめられていった．既知なことが整理され体系化されていった．そのようにまとめられた体系は系統だって学校教育のなかで教えられる．しかしそれだけでは知識に過ぎない．

数学するとは問題を立て問題を解く実践そのものである．演習問題は数学そのものの超縮小模型である．だから数学では問題をどんどん解くことがどうしても必要である．結果だけが解答ではない．それが確かに問いに対する解であることを論証しなければならない．ここまで含めて問題に対する解答なのだ．このような数学の実践，それが問題を解くということだ．高校生にとって数学は問題の中にあり，問題を解くことは数学に触れることなのだ．

数学の問題の構造を実際の問題を通して調べ，それを手がかりに問題を解く方法論を身につける．問題に対面したときに意識的に方法を考えることが身につけば，その結果として，実力が飛躍する．方法をおぼえることよりも，どう解こうかと方法を考える態度を身につけることの方がはるかに大切なのだ．

『高校数学の方法』は，高校数学の方法論としてはこれ以上のことはない．そういうものとして書かれている．

ある知らせ　大切なことは，方法の意識化，である．これが高校生に可能なのか．実際これを受けとめる高校生はいる．ある年の春には次のような報告がサイトの掲示板に寄せられた．

> 自宅浪人の末，京大文学部に合格した者です．青空学園の「高校数学の方法」,「整数の基本」,「確率の基本」を勉強させていただきました．どの本も難しく，完璧には消化しきれなかったです．しかし，学校では聞いたことのない「方法」という観点などから，数学の奥深さや論理の大切さを感じられたように思います．現役の時は 0 完だった二次試験も今年はほぼ 3 完することができました．
>
> また,「勉強のすすめ」からも力をいただきました．たとえば「内因論」，たとえば「分からない，からあと 5 分」．うまくいかないときや，自分のこれからについて独りで考えるとき、この言葉に助けられました．数学は，いまだに僕にとっては難しいも

> のですが，この一年間取り組んでみて，数学の問題の解き方だけではなく，様々なことを考えることができました．これからも，多くの困難があっても，しっかりと考えながら生きていこうと思います．本当にありがとうございました．

この人は確かに,「方法」という観点，を捉えている．そしてこれを大学初年級でもういちど意識して学ぶのである．そのような教育の全体ができてゆかねばならない．可能ではあるが，現実の学校や大学にはない．それが近代日本の数学教育の現実である．

それでも青空学園の提起を，受けとめる高校生や卒業生はいる．どこの誰かはわからなくてよい．これが文化である．数学すること，つまり定義を理解し，命題の根拠を示し，自ら考え，計算し，そしてわかる喜びを知ること．これを伝えなければならないし，それは可能である．

そしてこれは，高校卒業後にこそ，方法を方法として探究するという意識化が必要である．大学初年級で，このような教育が一般化してゆけば，それこそ日本に iPhone 以上のものが生まれ，世のなかのさまざまの組織における大きな枠組が，生み出されるだろう．しかしそれは，はるかに先のことであり，教育数学が教育運動として大きなうねりとなり，実際に数学教育が変革されてゆかなければ，ありえない．

2.4 前提の準備

近代日本語　数学教育は日本語で行われる．私の仕事の半ば，青空学園での制作を続けながら，同時に近代日本語をもう一度考え直すという作業であった．

シンポジュウムでも「日本語は情緒的で，日本語で論文を書くと曖昧になる」という意味の発言があった．しかしそれではいけない．日本語で論述ができなければ，そこから人を育てることはできない．

私は，塾などで高校生に数学を教え始めたとき，高校生の言葉で考える力，つまりは論述の力が衰えているという問題に直面した．

いかなる言葉であっても，それが言葉として生きているかぎり構造をもち，その構造によって定まる言葉の論理がある．それを取りだし，近代の日本語の論述の言葉を生み出してゆかねばならない．言葉とは存在を分節してつかむことであり，同時に考えることそのものであり，それをまとめ，話し書いてゆくことである．

この力がおしなべて弱い．何度も何度もこの事実に出会ってきた．考える力の衰退という現実に出会うことで，自分自身が高校時代，近代日本語への違和感を強くもっていたことにあらためて気づいた．そのころ読んだ哲学の本のなかに「思考する」という言葉が何度も出てきた．しかし高校生の自分には「思考する」とはどのように頭を働かせることなのかわからなかった.「思う」はわかる.「考える」もわかる．だが「思考する」はわからなかった．

高校生の私は「思う」と「考える」は別の言葉だと考えていた.「私のことをほんとうに思っているの.」「そうだよ.」「なら、もっとしっかり考えてよ.」という対話がある．

この対話は,「思う」という言葉と「考える」という言葉が，並置できない別の言葉であることを示している．同時に，ほんとうに思うのなら考えるはずだということも意味している．別の言葉だからこそ，この使い分けができる．

ところが近代日本語は，これをそのまま繋いで並置し「思考する」という言葉を作った．これは英語の think 等に対応するための漢字造語であって，それまで用いてきた日本語に根ざした言葉ではない．

このような問題を日本語の基層から考えたのが『神道新論』([4]) である．このような作業が，数学教育の内容的な準備と並行されねばならない．

これを私は青空学園日本語科で積みあげてきた．ようやく人に語る段階となり，出版した次第である．

勉強のすすめ　私は，このようにして，帰納的分析と一般化という面と，演繹的構成という面から，高校から大学初年級の範囲での数学そのものを提示してきた．

それにあわせて，いわば学問論というべきことも書き置いてきた．それが先の掲示板での書き込みにある『数学のすすめ』である．その目次は次のようになっている．

大学という進路／近代日本の大学／大学と学問の変化／学生生活を能動的に／若者が未来をつくる

生きる力と勉強の力／まずもてる力で考えよ／実践なくして習得なし／自分自身との闘い／言葉の力がすべての土台

いきいきと考えよう／分からない，からあと 5 分／黒板を写すな，ノートをとれ／まず挑戦し，まちがいに学べ／手で考え，それをまとめる

まったくこれはいまの大学生に言いたいことでもある.「まずもてる力で考えよ」では次のことを提起した．

力は内から　勉強の途上で何か分からないことに出会ったら，まず，現在の自分の内部の力，自分の知っている方法で考える．これは練習問題にかぎらずいえることだ．これまでいろんなことを勉強し，一定の知識を持っている．今の自分の知識をもとに考える．すぐに類題や例題の解答を見たりしない．教科書などで言葉の定義は正確に確認する．

そして何が問題であるかがつかめたら自分で考える．まず自分の内部の力で考える．これを内因論の態度という．いま自分の内にある知識と方法で考える．そのことによって解き方を考えたり方法そのものを工夫する力が育つ．

それに対して，すぐに例題の解答に頼ったり，まだ習っていないからできないと放置したり，こういう態度を外因論という．やり方を知らないからとあきらめたり，安易に解答を見たり，解き方を人に聞いたりする．これでは力が伸びない．

内因論が身についている人は，確実に力が伸びる．こうやって一歩一歩その分野を自分のものにし，自分の内に考える力を育てていく．あらゆる教科についていえることであるばかりでなく，人間が生きていくにあたってぶつかるすべての問題に対し，内因論の態度で事にあたる．

内因論　ものごとはすべて内 (うち) からの力によって動き，生成し，発展し，成長する．結局は内からの力による以外に何事も解決しない．どれだけ内部の要因が熟し，内部の力が育っているかである．このようなものの見方・考え方の基本を「内因論」という．つまり内因論とは，すべてのものは置かれた状況に対応して，それ自身の内部の要因によって展開しそれ以外ではあり得ない，という立場である．

そして，そうであるなら，われわれもまた自身の内の力を第一にして，何ごとにも取り組もう．この基本的な態度が内因論である．これは単純なことであり，誰もが否定しがたい．しかし現実には，すぐに人に頼ったり，外部に依存した生き方 (行き方) をする人が多い．内因論を，ものの見方や考え方，人間の生き方，そして組織のあり方にまで一貫させるには，意識的な努力が必要だ．

困難でも確実に頂上にいたる道を　自分の力を信じ，困難でも確実に目的地にいたる道を歩んで欲しい．頂上に至る道ほど勾配がきつく，険しい道である．その道が険しいからといって，勾配の緩やかなところばかりを歩いていると，いつまでたっても頂上には至らない．山の周りをまわっ

ているばかりになってしまう．目の前に二つの道がありいずれに進むか迷ったなら，困難に見える道を選べ．実はそれがいちばん確かな道なのだ．それが目的地に続く道なのだ．

自分にとってより困難に見える道を選び，そして努力の末に解決した．このような経験はこれからの力になる．高校時代の勉強，受験期の勉強をとおして，このような勉強の姿勢，人生の態度が身につけば，それは何よりあなたの財産になる．

問題を解く　青空学園では『高校数学の方法』の具体的な応用として，毎年の入試数学問題の中で背景があり一般化ができる問題を選んで，その解答も作ってきた．高校が現実にかかえる課題としての入学試験から離れることなく，そこを入り口にして，学問としての高校数学に触れるように導いてきた．その解答の論述を学ぶことをとおして，日本語での論述力がつくように配慮してきた．

さらに『別解研究』や『新作改作問題』などで，この数学的現象としての問題を掘り下げることを示してきた．これらはすべて，それを学ぶことで自らそのように考えられる力をつけてほしいとの観点からなしてきた．

これらはいずれも，教育数学を述べてゆく前提の準備である．そのように考えて蓄積してきた．

3　大学初年の数学

さて，大学初年級の数学教育は，いまもう一度何を伝えるのかにおいて，根本からの見直しが必要なところに来ている．

今回の共同研究の開催趣旨のなかに「『数学を修めたこと』によって共有されるもの」との言葉がある．しかし，現在の日本の数学教育の場においては，その「もの」の内容がところによって大きく違っているのではないだろうか．

従って，何が共有されているのか，されてはいないのか、こそが問われねばならない．高校数学から大学初年級の数学への橋渡しの所で，考えるべき問題の一端を提起したい．

3.1　微分と積分

これは前回も報告したのであるが,『解析基礎』を学んだ大学 3 年生の Y さんから，2011 年の 3 月次のようなメールをいただいた．

> 僕は、理学部物理学科の 3 回生です。青空学園数学科の様々な記事を読ませていただき、心から感動しました。本当にありがとうございます。中でも特に感激したのが、「解析基礎」の記事です。僕は物理学科ですが、数学に非常に興味があり、数学科の授業をいろいろと履修しています。昨年、「ルベーグ積分」の授業を受講しました。しかし、単位はとれたものの、理解したとは全く言えない状態でした。具体的には次のような疑問が残りました。
>
> ○測度のもつ性質がいろいろあって煩雑すぎる。本質はどれか。
> ○リーマン積分で成り立たないことがルベーグ積分で成り立つのはなぜか。
> ○原始関数と定積分はどのように結び付くのかなどなどです。
>
> いろいろなルベーグ積分の本を読みましたがすっきりすることはありませんでした。しかしあきらめずに勉強を続けていると結局、
> ○面積（測度）はどのように定義されるのか。
> ○微分の逆演算がなぜ、定積分と関連するのか。

ここがわかっていないのだと気付きました。そんなとき、インターネットで青空学園の記事を見つけたのです。そこで、「定積分は微分とは独立に定義されるもの」という、僕にとって革命的な記事に出会いました。感動と悔しさで涙が出ました (笑)。

確かに、高校数学では、定積分を原始関数の差で定義しています。だから、原始関数が存在するかどうかなんて考えもせずに、定積分を計算します。僕もその一人でした。このことが、ルベーグ積分がわからなかった根本の原因だったのです。計算方法の習得だけで根拠がわからなければ、やはりどこかで弊害が出てくるのですね。

今日，多くの数学教師はリーマン和の概念すら知らず，定積分の定義を強調しては教えない．高校生の多くは，定積分の定義を意識しては身につけない．それでも少数ながら「定義する」ということに自覚的である高校生はいる．それを大切にし，それに答えうる教育でなければならない．

今回の「高等数学の教育において何を伝えるのか」という課題に即していえば，Y さんは大学初年級の解析の授業でも，定積分の定義に触れることはなかったのである．本来なら，この段階で高校数学を越えねばならなかった．

メールの彼は，とにかく自力で日本の高校数学を乗り越えた．それができなくて，何となくおかしいと曖昧さを残したままの学生も多いだろう．これでは分野を問わず本当の基礎的な研究はできないのではないか．大きな問題である．

3.2　実数の構成

構成することの意義　実数は，公理的に構成される．このように構成し，そうすることで直線を連続性の下に近似し，物理現象を数学的に記述する基礎とする．このような課科学的認識の基礎にある構成された数学的対象の存在の重要性，これは $\varepsilon - \delta$ 論法が教えられないこと以上に，まったく教えられることはない．ほんらいつぎのことが伝えられなければならない．

実数への要請　実数，これが解析学が展開されるもっとも基礎の部分をなす．実数に求められる性質は，全順序体であるということに加えて，以下の内容が加わる．今はまだこのような性質をもつ数学的対象としての実数が存在するかどうかはわからない．それを踏まえたうえで，以下，実数を $\mathbb{R}$ で表す．

連続性　実数はまず順序体でなければならない．しかし順序体ということでいえば，有理数の集合 $\mathbb{Q}$ もまた順序体である．同じ順序体で有理数と実数を分けるのは連続性である．

連続とはいうまでもなく「つながっている」ということである．この世界が連続であるかどうか，それはわからない．物質に最小の単位があるのであれば，それが素粒子であれ，より小さいものであれ，その単位以上には分解できないのだから，棒を二つに切るのに任意のところできるというわけにはいかないことになる．切断に関して棒が連続であるとはいえない．

移動という観点から見れば，あそこからここまで不連続に移動したとは考えられないように思われる．途中を飛ばして移動できるとは思われないからだ．しかしこれも連続な座標系が，連続な時間とともに固定されていることを前提にするからいえるのである．もし時間が不連続なら，移動が連続であることに意味はない．

このように連続という概念は，考えれば考えるほど難しい．連続について深く考えようとする人は『無限と連続』(遠山啓，岩波新書) のような書をぜひとも読んでみてほしい．

数学では現実世界の連続性に関する思弁的な議論はしない．数学の対象としての連続なものを準備し，それを用いてこの世界を近似してつかむということだ．準備された連続なものを用いて現実を近似するのである．普通は $\sqrt{2}$ を有理数 1.4142 で近似するという．実は実数を準備しそれを用いてこの世界を連続な世界として近似するのだ．近似する側の実数は，そのために何が要請されるのか．

上限, 下限　順序体 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A がある．A の任意の要素 a に対して

$$a \leqq r$$

となる実数 r を A の**上界**という．

ここでさらに，上界が存在することを**上に有界**という．上界に最小値が存在すれば，それを A の**上限**といい $\sup A$ と表す．

同様に，下界が存在することを**下に有界**という．下界に最大値が存在すれば，それを A の**下限**といい $\inf A$ と表す．

連続の公理　次の公理を**連続の公理**という．

> 順序体の空でない部分集合 A が上に有界であるなら，A の上限 $\sup A$ が存在する．

連続の公理を満たす順序体を実数体と言い $\mathbb{R}$ と記す．その要素を**実数**という．

このような公理を満たす集合が構成される．それには 2 つの方法が知られている．

カントールの方法　カントールは，以上の準備の下，基本数列を定義し，そのある同値類の集合として実数を定義した．

数列 $\{a_n\}$ が性質

任意の正の実数 ϵ に対し，$N < m,\ n$ なら $|a_m - a_n| < \epsilon$　となる N が存在する．

をもつとき，これを**基本数列**または**コーシー数列**という．

集合 R を有理数からなる基本数列 $\{a_n\}$ の集合とする． R に属する二つの基本数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ において

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$$

が成り立つとき，二つの基本数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ には関係〜が成り立つとする． 関係〜は同値関係である．

$R_C = R$ ／〜 を実数とする．

デデキントの方法

有理数 $\mathbb{Q}$ が二つの集合 A と B の和集合で，A の任意の要素 a と B の任意の要素 b の間につねに $a < b$ が成り立っているとき，これを $(A|B)$ と書いて「切断」と呼ぶ．A を $(A|B)$ の下組，B を上組という．

A から B か，B から A かへ 1 つの要素を動かしてそれを A', B' とするとき $(A'|B')$ も切断になるなら，同値，すなわち

$$(A|B) \sim (A'|B')$$

とする．切断の集合の同値関係 $\sim$ による商集合 $R_D = \{\ (A|B)\ \}$ ／〜 を実数とする．

二論は同等　二つの実数の構成法はずいぶん異なっている．

カントールによって基本数列を用いる構成では，数の大小関係 (順序) を一切使わず，二つの数の間の距離のみを用いている．つまり距離による完備化である．逆に順序は改めて定義しなければならなかった．そのうえで埋め込まれた有理数体の大小関係を用いてアルキメデスの原則が成り立つことを示し，それを用いて上限の存在を示した．

これに対して，デデキントの切断は，二つの有理数の間の距離 (長さ) のような概念を一切使わず，ただ数の大小関係 (順序) しか使わない．順序を用いた有理数の完備化である．したがってただちに上限の存在は示せた．つまりアルキメデスの原則は定義からの帰結である．

二つの定義は同値である．それはいくつかの準備の後に示される．定義の同値性は，実に心揺さぶられることではないか．

どのような公理を立てるのかがなぜそんなに問題になるのか．それは公理相互の関係を解明し，可能なかぎり一般的で前提の少ない公理系をうち立て，公理相互の関係を研究すること自体が，実数というものの本質を研究することである．

数学的現象は事実として存在する．それを公理系で捉えようとする．公理は絶対的真理ではなく，数学的な対数学的な対象を捉えるための方法であり，公理相互の関係の中にその対象の本質的が顕れている．

3.3　確率の構造

高校確率の混乱　よく勉強している高校生から質問がでる．

> 教科書では「独立な試行の確率」の冒頭に,「1 個のさいころを投げる試行と，1 枚の硬貨を投げる試行において，互いにその結果に影響を及ぼさない．これらの試行は独立であるという」などと書かれている．ここでいう「独立」と,「事象の独立」での「独立」は同じことなのですか，違うのですか．
>
> 事象とは試行の結果ですから,「試行の独立」と「事象の独立」は同じことのはずではないのですか．ところが，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ という等式は,「独立試行」では，結果としてこれが成立すると書かれていますが,「事象の独立」ではこれがその定義になっています．結果なのですか，定義なのですか．
>
> また，独立でない試行の例として，くじを 1 回目に引く試行を S，2 回目に引く試行を T としたうえで,「引いたくじをもとに戻さない場合」をあげています．
>
> しかしこの場合，1 回目に当たりを引くか外れを引くかで，2 回目にくじを引く条件が異なります．2 回目の T は「同じ状態のもとでくりかえすことができる」という条件に反するので，試行とは言えないのではないでしょうか．

このような疑問が寄せられた．これは当然である．

実際,「試行の独立」，あるいは「独立試行」という用語は，教育現場に混乱をもたらしている．

ある教科書は「同じ状態のもとでくりかえすことができる」ことを試行の条件として書く．そのうえで「2 つの試行が互いに他方の結果に影響しないとき，これらの試行は独立である」と書く．また，この教科書は

> 2 つの独立な試行 S，T を行うとき，S で A が起こり，T で B が起こる事象を C とすると，事象 C の確率は
> $$P(C) = P(A)P(B)$$

と書く．

一方，事象の独立は，積事象の確率が確率の積になることとして定義された．ところが，この記述では，何の論証もなしに，この等式が提示される．いったいこの等式は「2 つの試行 S，T が独立である」ことの定義なのか，あるいは結論として出てくるものなのか不明である．

ではどのように考えるべきなのか．

私は質問を寄せた高校生に次のように答えた．

試行とは，手順「戻して n 回引く」とか,「戻さずに n 回引く」などの規則にもとづく一連の行為全体を意味し，それによって定まる確率空間を基礎とする，というのが確率論の立場である．

n 回くじを引くとき，その結果は（○××○⋯）のような　n 個の○と×の順列の全体である．戻すときも戻さないときも，その確率は計算できる．そのなかで 1 回目当たりという事象は (○△△⋯)（△はどちらでもよい）の形をした部分集合であり，その確率も計算できる．2 回目当たりという事象は (△○△⋯) の形をした部分集合，1，2 回目当たりという事象は (○○△⋯) の形をした部分集合である．その確率も計算できる．

これが任意の k 回目と l 回目で計算でき，その事象が独立か否かが定まる．k 回目の事象と l 回目の事象が，各 k と l で独立なとき，その試行を「独立試行」という．それぞれの回の確率的行為が独立という意味ではない．n 回くじを引くという試行の性質なのである．

実際，かつては教科書もそのようになっていた．手元にある 1969 年の実教出版の教科書では,「独立試行」の「独立」はこの手順の性質としてつけられた形容詞であって，1 回 1 回の確率的行為が独立という意味ではない．

このように，独立試行という概念は，事象の独立のなかに含むことができ，またそうしてこそ，確率論の記述となる．

また，教科書では「独立な試行の確率」の冒頭に,「1 個のさいころを投げる試行と，1 枚の硬貨を投げる試行において，互いにその結果に影響を及ぼさない．これらの試行は**独立**であるという」などと書かれている．しかし，これもまた，事象の独立を経てはじめてその意味が明確になることなのである．

現在の高校数学の確率は，現実を分析する体系やその構造を教えるのではなく，ただ経験主義的に資料の整理を教えるのみである．

コルモゴロフの仕事の意義を押さえ、それを少しでも高校生や大学初年級に伝えよう，そうすることで，現実の現象を捉えるための数学的準備としての確率論を伝える．今日，大データの扱いがいろいろ言われる．しかし，確率論ぬきの大データの処理は，理屈抜きの単なる計算にすぎない．

4　数学教育の変革

4.1　数学者の責任

これでいいのか　2018 年に高等学校の新たな指導要領の変更が提示された．数学および情報の教科に関していえば，今回の大きな変更点は次の 5 つである．

- 数学の「統計，データの分析」を重視する．
- 数学 C の復活,「ベクトル」が数学 B から数学 C へ移行,「行列、1 次変換」は復活せず．
- 数学 A から「整数」が消滅．
- 「情報」をプログラミングも含めて文系理系共通で必須科目として行う．

- あらゆる教科でコンピュータの活用を推進.

しかしこれは，これはまったく殺伐とした改編ではないか．確率論の問題で提起した「現実を分析する体系やその構造を教えるのではなく，ただ経験主義的に資料の整理を教えるのみ」がいっそう進むのではないか.

日本の産業界は，教育に対して，創造性がますます減衰していることや，枠組を提示する力がないことなどの問題を提起している．それに対して，日本の文教政策は，産業界の要請を名目にして，このような情報教育の強化を行おうとしている.

これでは，問題に向きあうどころか，ますます考える力を育てず，言われたとおりに数を操作する能力のみをつける方向に，これがこれまでの方向であったのだが，すすんでゆこうとしている．つまり，考える力を養うことよりも，考えずに技能のみをつける方向に，進んでいる.

私は，考える力をつけるという点からいえば，15 歳〜18 歳の時期に学ぶべき数学は，この 100 年，そんなには変わらないと考えている．1960 年代の高校数学の内容を，そのまま今日にもってきたほうがよほどよい.

ところが日本の文教政策に携わる官僚は，変えようとする．変えることが役割だと考えている．これに対して無意味な改変に歯止めをかける役割を担うのが，数学者でなければならない.

高校数学の教科書には，多くの数学者が著作者や監修者として名を連ねている．しかし，彼らはほんとうに，自分の名が出ている教科書を書いているのか，読んでいるのか.

数学者は自らの理念をもって高校教科書を書き読むべきである．そして，文教政策で出てきた基本的な問題に対してこれを正面から指摘すべきである．しかし，それはなされているとは言い難い.

4.2　教育数学とは

教育数学のなすべきこと　近年ようやくに「教育数学」が言われはじめた．数理解析研究所講究録 1711 の『教師に必要な数学能力に関する研究』[47] や 1801 の『教育数学の構築』[48] を読むと，それぞれの論文で「教育数学」に関していくつかの定義が試みられている.

「数学教育とは，出来上がった数学 (カリキュラム) をどう教えるかを問題にするものであり，教育数学は教育の諸々の諸相から実際に数学者がかかわることの出来る部分を取り出す営為である」というのが，この共同研究の主宰者・蟹江幸博氏の定義である．このような研究がさらにひろく展開されることを願っている.

しかし，教育数学の真の課題は，このように混迷している今日の高校数学と大学初年級の数学教育に対して，新たな方向を示すものでなければならない.

そして，教育数学が提起されたこの数年，この課題に関していささかでも前進があったのかといえば，現実はまったくそうではない.

やはり，近代 150 年，西洋式の数学はまだこの日本の現場には根づいているとは言いがたいのである．では，少なくとも数学教育のそれぞれの場で関わるものが，自覚的につかまねばならないことはどのようなことであるのか.

(1) 何が定義であり何が結論であるのかという数学構造そのものを考えさせる．数学には構造があるということ自体をつかませる．高校確率をふり返るところから入ることも一つの方法である.

(2) 命題が成立する根拠を問うことをつねに行う.「なぜそんなことが言えるのか」をつねに考えさせる．ここに科学がはじまる．根拠を問うとは，すべてを疑い，現象を根本において捉え

ることである．さらにその根拠をも問い直す．この永続運動が科学である．$\varepsilon-\delta$ 論法を学ぶことは，そのための教材の一つである．

(3) 根拠が明確でないとき，一定の公理系から再構成するという問題を立てる．公理体系がいかなるものでなければならないのかを考える．実数論はその適切な材料である．

(4) 考える対象としての集合をとらえ，その構造をつかむことを学ぶ．集合を定義する一定の条件が集合の構造を決めることの意味と，それを探求するための方法論の模索そのものが教育の内容である．

これらを実際にやってみることが高等数学の教育である．そして，これは十分可能である．問題は．数学教育に携わるものの，そのための教育であり，数学教育に携わるもの自身の学ぶべき内容の提示，ここに教育数学の実践的な意義がある．

私は,『数学対話』の「量と数」において，次のように書いた．

> 数学の教育においては，その根幹に，わかる喜びの継承がなければならない，と考える．高校生に数学を教えることを生業としてきたが，授業というのは，わかる喜びを体験する場なのだということが，経験を通しての確信である．生徒が自ら問題を正しくつかみ，自分で考え，わかってにっこりする．それが「学問としての高校数学」を生きた学問にする.「理解はできるが，納得できない」段階からの飛躍である．その指導に方法としての数学教育の難しさと醍醐味がある．

しかしそれを可能にする前提として，教えるもの自らがわかる喜びを経験していなければならない.「わかった」という経験のないものが数学を教えるなら，生徒たちがわかる喜びを経験するように指導することは難しい.「わかる喜びの継承」は文化である．授業を通してわかる喜びを次代に伝える，ここに数学教育の根幹があり，それを可能にするのが教育数学である．

つまり教育数学とは，わかる喜びの継承を根幹とする数学教育において，それに携わる者自身がそれを研究することをとおして自らわかる喜びを経験する場でなければならない．

例えば，私自身が『幾何学の精神』を学び書いてゆく過程は，私の「わかった」という場であり，これを行うこと自体が教育数学の素材であると言える．

こういう自らの経験をふまえて言えば，高校や大学初年級の数学教員は，一定の公理系からすべてを演繹することも一度はやらねばならず，それを貴重な経験にとしてもたねばならないし，そういう問題提起もまた教育数学の役割である．

教育数学への問題提起と，そして問題は開かれたままであることの指摘をもって，本報告を終わりたい．

参考文献

[1] 青空学園数学科：http://aozoragakuen.sakura.ne.jp

[2] 『次の世代に何を伝えるのか〜今こそ「高い立場からみた初等数学」を〜』，河村央也，数理解析研究所講究録 No.2021，2014

[3] 『$\varepsilon-\delta$ 論法とその形成』，中根美知代，共立出版，2010

[4] 『神道新論』，河村央也，作品社，2018