

数学での教育と学修 － 数学教育の実践を通じて －

清水勇二

国際基督教大学 教養学部

はじめに 教育数学の目的を、数学を教育する理想的なプラットフォームの構築を通じた数学教育の実践とするならば、理系学部とは限らない大学一般での数学教育のあり方を検討する必要があるだろう。更には、中等教育に加え、大学の枠組みに収まらない一般市民への数学教育も検討するに値すると考えられる。

大学の文理を問わない学生に向けた数学教育の現在必要とされる形を論じる。

大学の理系学部とは限らない場における教育数学を、筆者の本務校での経験・複数の場面における実践を通じて検討することが、元来講演で試みたことだった。本研究会での様々な講演等に示唆されたことも本稿に書き加えることにした。

1 大学の一般教育

大学での一般教育について、その目的とそれを実現するための内容・方法について考察する。

一般教育は、専門教育に対置する意味で言われている。日本の大学全般としては高等教育、すなわち一般教育と専門教育の双方により、広い視野の教養と専門的知識を備えた人材を育成することが大学全体での教育の目的であろう。

個別の大学の目的は、現在では(各)大学の教育方針を公表するディプロマ・ポリシー(学位授与に関する方針)の中で大学の特色として表現される。それは各大学が送り出す人材の理想像として示され、卒業生に備えてほしい資質の育成が大学の目的となる。それは努力目標であり、どれだけ達成されたかを評価し改善する努力が必要となる。

ディプロマ・ポリシーの目的達成のために、カリキュラム・ポリシー(教育課程の編成方針)が示され、また人材の理想像に共鳴する志願者を募るアドミッション・ポリシー(入学者受入れ方針)がある。このような建て前となっている。

1.1 一般教育の目的

一般教育について、広い視野の教養を身につけるとすでに表現した。一般教育をより広い意味で教養教育ということも多いと思われる。一般教養は、専門知識を専門的に特化していない学生が学ぶ内容、あるいは幅広い専門知識を意味することも多いように思われる。

一般教養の中には、語学力も含まれるし、近年ではコミュニケーション能力やプレゼンの能力も含まれることが多い。この前者に含まれるか分からないが、文章記述力 (writing skill) を必須の能力と挙げる場合もある。これらの力は育成する方法が比較的明らかな能力である。

しかし、批判的思考力、問題を発見し解決する能力、自主的に学ぶ力などは特定の訓練で育成するというよりは、学問を深めていく過程で身につけて行く力であるだろう。

筆者の所属する国際基督教大学 (ICU) では、リベラルアーツ教育を標榜している。ICU のリベラルアーツ教育は、世界平和を始めとする世界の諸問題の解決を考えられるよう、社会の諸構成員、市民を育成することを目標としている。物事を批判的に考え、総合的に理解し、創造性が豊かな個人を育成することが目標である。

受動的な学びの形態より、学生が主体となって学ぶ機会があることも、リベラルアーツ教育の特徴として挙げることができるかもしれない。

話を大学一般に戻す。一般教育における数学教育の目標を改めて考えてみると、一般教養として必要な数理的能力の育成が含まれていると思う。これについては後で、科学リテラシーの中の数学教育として触れる。

数学教育において学習者が主体的に学び理解して行くことは当然である、という了解は数学者の間では当たり前のことと思う。そのような学習はいわゆるアクティブラーニングと言ってよいと思う。具体的には、授業における演習・演義の部分がそれに当たると言ってよい。もちろん、授業時間外での復習等の学びは本来アクティブなものである。数学を理解するときのこのような特質は、一般には理解されていないと思われる。

1.2 一般教育科目 数学の世界

次に筆者自身の一般教育科目での経験について述べる。

ICU は学部は教養学部唯一つで、学部生の定員は 1 学年当たり 620 名である。4 年間で一般教育科目を 21 単位履修することになっており、自然科学系の一般教育科目は 6 単

位の履修が課せられている。ICU は 3 年生になるときにメジャー (専攻分野) を選択する。自然科学系のメジャーを選ぶ学生は現在 70 名前後なので、自然科学系の一般教育科目を履修する学生の多くはいわゆる文系の学生である。

現在、数学の一般教育科目は「数学の世界」と「数学の方法」の 2 科目ある。「数学の方法」は、1 変数微分積分の初歩と線形代数の初歩の 2 つからなる。

さて、「数学の世界」について、以下で詳しく説明する。

履修者： 過去 6 回ほど同じ形式で、同じようなトピックを扱ったが、2017 年度、2018 年度と連続で担当している。すでに述べた通り、全学生にとり自然科学系の一般教育科目が必要な状況なので、2018 年度は 150 名、2017 年度は 142 名の履修者数であった。(人数の上限 150 が決められている。) そういう事情もあるので、多くの学生に数学に興味を持ってもらうようなトピックを扱うようにしている。

目的： 前節「一般教育の目的」で述べたように、ICU はリベラルアーツ教育を標榜している。批判的思考力やコモンセンス (市民としての基礎的判断力) を養うことを目的としている。その目的を背景において、それぞれの専門分野について語る訳だが、分野横断的な視点も必要とされている。これは通常の数学の教育とはだいぶ異なる要素である。私の講義においてこの目標が達成されたとは、自信を持っていうほどには至っていない。

内容： 数学の基礎概念を紹介し、また他分野とのつながりをも示すために、いくつかのトピックを取り上げている。

2018 年度の講義において取り上げたトピックは次の通り。

Week 1 Introduction

- 1) 単語「数学」の語源, 2) 数学の中身, 3) 数学の歴史, 役割, etc.

Week 2 数の世界

- 1) 自然数, 2) 分数, 小数, 3) 無理数, 4) 虚数・複素数

Week 3 世界の記述

- 1) 文字式と座標, 2) 関数, 3) ベクトルと空間

Week 4 数学者の文章を読む

- 1) F. Dyson “Birds and Frogs” を読む,
- 2) B. Russell “Mathematics and Logic” を読む

Week 5 対称性

- 1) 美といろいろな対称性, 2) 平面紋様・結晶, 3) 図形の対称性

Week 6 幾何学のいろいろ

- 1) ユークリッド幾何・非ユークリッド幾何, 2) 透視画法, 円錐曲線, 射影幾何
- 3) 高次元の幾何, トポロジー (位相幾何)

Week 7 論理と集合の話

- 1) 論理とは何か, 2) 論理の歴史と記号論理学, 3) 集合と無限

Week 8 社会科学と数学 Social Sciences and Math

- 1) 統計の基礎, 2) 微分積分法と統計, 3) 社会科学と統計

Week 9 整数論と符号・暗号

- 1) 素数と合同式, 2) 符号理論, 暗号理論, 3) フェルマーの最終定理

Week 10 和の数学

- 1) 和算, 2) 日本人数学者

2017 年度もほぼ同じ内容で、項目だけ上げると次のものである。

数の世界, 関数と連続性, 空間と写像, 社会科学と数学,
対称性, 論理の話, 集合と無限, 幾何学のいろいろ, 和の数学

この講義を始めたときの目標は、数学が数、式、関数を扱う学問という (狭い) 見方を取り払うために、現代数学で扱われる概念を少しでも取り上げることであった。それは実際の講義を通じて、少しずつ変化した。概念を理解してもらうことだけでも難しいが、例えば、有理数といった具体的な対象を通じて同値関係の考え方への導入とするのが近道と考えた。しかし、このようなやり方は先人たちが既に試みていたとも言えよう。

ただし、21 世紀に入り益々数学へのアクセスをよくする書籍、ホームページや、講座などは増え続けている。私の講義でも、そのような情報資源を利用させて頂いている。

他の要素: Week 4 では、いわゆる講義ではなく、Dyson, Russell といった数学者が、非専門家をも意識して書いた文章の一部を読んだ。

2017 年度には、他分野の教員によるゲスト講義を行い、社会科学とのつながりの実際を見てもらった。

大人数のクラスなので、教員から一方向に伝えることになるが、授業中の小さな問いかけに関する回答をアンケートのようにまとめてフィードバックすることも行った。問いかけの内容としては、数学用語が日常で使われている実例など、日常生活と数学とのつながりを考えるきっかけとした。

反省: 毎回の学生によるコメントシートへの授業での返答というフィードバックはある程度できたが、それ以外に学生の積極的参加を促す仕組みが十分でなかったように思っ

いる。ただし、双方向のやり取りができるためには、少人数でじっくり学ぶ形式でないと難しいと思う。

さて、上記の一般教育科目「数学の世界」を教育数学の観点から考えてみよう。

数学者の目から見ると、そもそも数学を教えていないとの批判があるかもしれない。数学という学問分野での長い探求の末に確立した内容を数学と呼ぶのが、多くの数学者の常識かもしれない。筆者もある程度はそのように感じている。そのような見方では、研究者のスタンダードに達していない扱いのレベルを数学と呼ぶのが難しくなってしまう。高校までの数学は、数学者の目からは必ずしも数学とは言えないかもしれない。

この「数学の世界」のような一般教育科目は、数学者の常識的に思う数学を非専門家の目でも分かるように紹介したり説明する試み、と言うのがほぼ正確であろう。教育数学はこのような試みを許容するものだと言筆者は理解している。

教育数学と関連するそのような観点からは、一般教育科目にとどまらずに、次のような問が考えられる。

- 聴衆に応じて、取り上げる数学の掘り下げ方をどうするのがよいか。

一般教育科目では、聴衆は大学生で、必ずしも理系の専攻分野を選んでいない人を含んでいる。

- 取りあげるべきトピックは、時代に合わせたトピックがよいのか。あるいは時代で変わる必要のないトピックがよいのか。

本来数学は、時間を超越した学問であると信ずるが、大学を取り巻く環境からのプレッシャーにより、教育内容の力点が変化して来ていることを感ぜざるを得ない。

2 市民への数学教育

今度は、大学から外に出たの数学教育の話をしたい。すると当然、対象は大学生ではなく、数学を専門とする訳でもない。広い意味では初等中等教育も含められが、ここでは対象として一般の社会人を考える。それには、主に高校生以上の学生も含むと理解する。このような広い範囲の社会人一般を市民と呼ぶことにする。

市民への数学教育には、市民を対象とした数理科学的リテラシーが目的となり得る。市民が持つべき数理科学に沿ったリテラシーについては、その必要性も含めて議論がいろいろとあるだろう。それに関しては後で述べることにする。

2.1 市民への数学講座

ここでは、市民への数学教育の筆者による実践例を報告して、教育数学に関して考えたい。それらの例では、19世紀以降の数学の研究およびその成果について、市民に伝えることを主目的としている。これは社会への学問の間接的還元的一种と考えられると思うが、それはリテラシーの目的に大きく関連すると思われる。

- 三鷹ネットワーク大学での寄付講座「数学の夕べ」

三鷹ネットワーク大学は、三鷹市が中心となって運営している市民講座の集まりである。JR 三鷹駅前のビルにフロア1つを占め、講座・イベントを昼夜に開いている。いわゆるカルチャーセンター的な役割を果たし、市民の教育の場として機能している。近隣地域の大学の寄付講座がいくつも開かれているが、大学の社会貢献の一つの形となっている。

三鷹ネットワーク大学での数学の講座は、東京女子大学の寄付講座があり、ICUの数学の講座はそれに続くものである。どちらの講座も、退職した教員などのボランティアに依っている。筆者も地域への社会貢献の一環として引き受けている。

聴衆はいろいろな年齢の人がいるが、多くは年配の人で、かつて大学の理系学部出身者が多い。また、数学についての関心を持つ社会人が一定数いる一方、理系、特に数学についての講座が開かれる機会や場所は限られている。

以上の前提を踏まえて、2014年度に国際基督教大学寄付講座として統一のタイトル「数学の夕べ」で年に計2回の講座を始めた。その後、3回に増やし、2016年度からは同僚であった土屋あい子氏を講師に加えて、年計6回に増やして現在に至っている。

「数学の夕べ」で取りあげるテーマは、同値関係、複素関数、双対、微分形式、圏論等様々である。2017年には年度統一のテーマ「幾何学」で、2018年度は「トポロジー」で講座を開いている。

- 現代数学・物理学入門講座 新春特別講義 (@東京大学本郷キャンパス)

これは、高校生と社会人向けの講座で、日本数学協会、東京大学素粒子物理国際研究センター (ICEPP)、四日市大学関孝和数学研究所の共催である。ICEPP が会場である小柴ホールを確保している。

毎回、5名ほどの講演者がその回のテーマに沿った講義を行っている。取りあげるテーマは、最近5年間では次の通り。

幾何の世界, 次元をめぐる分類: 数, 図形から素粒子まで,

リーマンに始まる数学・物理学, 方程式を解く

出席者は、主に社会人、特に退職後で数学に高度の関心を示す人が多い。開催時期は1月上旬の成人の日を含む連休としている、そのためか、高校3年生を含め高校生の参加は少ない。これが非常に残念な点である。

以上の2つの枠組みでの講座に共通する特徴としては、聴衆に退職後で理系学部出身者が多いこと、高度な数学のトピックに関心を持っている人が多いことが挙げられる。

2.2 市民への科学リテラシーの中での数学教育

ここでは、初等中等教育・高等教育とは別の成人に対する科学教育の中での数学教育という位置付けについて考える。

成人が身につけるべき科学に関する常識・理解力を、科学リテラシーということにする。特に、次のような点が目標とされる。

- 自然界に親しみ、その統一性を尊重すること
- 数学、技術および科学相互の重要な関連の仕方を認識すること
- 科学の基本概念と基本原理を理解すること
- 科学的な思考方法を取ることができること
- 科学・数学・技術が人間の営みであり、その有効さと限界とを知っていること
- 科学的知識および思考方法を個人的あるいは社会的目的のために用いることができること

非専門家の市民が理解すべき科学的知識は何か、科学の専門家がどのように科学教育に係わるべきか、という問題に科学者自身が意識していかなければならない時代となっている。しかし、そこまで意識する余裕のない研究者が多いのではないだろうか。年配になるにつれ、認識が深まることが多いだろう。

科学教育の中での数学教育の目的は、科学教育自体の目的と基本的に同じである。社会人の教育、生涯教育というその第1番目である。また、ずっと言われ続けてきた理科離れ、数学嫌いへの対策が第2番目である。

生涯教育に関しては、20世紀後半の目覚ましい科学の進歩により次のような必要性が生じてきた。

- ITの普及に伴う情報リテラシーの必要性
- 新しい技術(医療)に対する理解と評価の必要性
- 地球温暖化等の環境教育の必要性

グローバル化による理系分野も含めた教養教育の必要性

筆者はICUにおいて、(数学ではないが)科学教育論、自然科学総合演習といった科目を担当したことが、市民への科学リテラシーについて考えるきっかけとなっている。(必ずしも数学専攻の学生とは限らない)学生に、学際的視野で諸問題を考えてもらうために、教員およびゲストによる講義を聞き、ディスカッション、グループワークをしてもらう。数名の教員による担当のこともあり、理系の他の専門分野についてもある程度理解することが必要となった。

3 教育数学に関連する観点

教育数学は、学び者にとっても教える者にとっても楽しいものであることが重要な点であるとすると、その両方を満たすのは難しいものだと思われる。数学者にとっては、その人の専門である分野に関連づけようとする、上手く行きやすい分野とそうでない分野とがあるのは事実だろうと思う。

3.1 実践例から示唆される点

一般教育科目「数学の世界」や、数学を紹介する講座における経験からは、講師の問題意識、聴衆の年齢等の背景、トピックの設定、およびそれらのバランスが教育の場にとり重要であることを筆者は学んだ。その中から若干まとめてみる。

- 数学に対するニーズはどこから来るか? 誰のための数学か?

個人のニーズであれば、それに見合った場や内容を選べばよい。

しかしそれが、文部科学省、経済界、マスコミ等の方針やキャンペーンによるもの場合、必然性がどれだけあるか見極めなければならない。

- 数学者・数学愛好家の思い

筆者は概念を扱う数学というものを伝えたいと思ってきた。しかし、非専門家と数学者の意識の乖離はかなり大きいと言える。また、互いの関心の食い違いは避けられないうが、そのマッチングの努力と非専門家の純粋な情熱、好奇心を削がない工夫は必要であろう。

- 市民にとって必要な科学、特に数学の知識とは?

科学コミュニケーション、科学教育が必要とされる理由を数学者もある程度心得ることが必要な時代になっていると思う。数学の中からだけでなく、数学の外の分野を少しは理解していることが求められている。そのためにも、自身の専門ではない分野とのつき

あいができることが望ましい。

- 先達の様々な知見が蓄積している

先達が蓄積した知見・資料を活用して、より効率よく問題解決に向かうことが出来るはずである。そのためにも、知見を学び生かすネットワークを組織的に構築し、活用するノウハウを共有できるとよい。

3.2 2018 年秋の省察

2018 年 2 月の RIMS での研究集会以降の省察をまとめるつもりでいたが、実際には以上の内容に、2018 年度秋の経験も加味してまとめることになった。それで、ここに触れるのは以上で言い残したことになった。

まず、この 1 年間に世間で Artificial Intelligence (AI) の実用と潜在的力についての話が浸透してきている。これは、教育の目標となる身につけてほしい能力が、コミュニケーション能力に加えて、従来以上に知識自体から知識を活用する力にシフトしているという点などで、教育全般に大きな影響を与えている。高校数学が大学受験の対策に重点を置きすぎるなか、暗記科目と誤解されている実情を是正するよい機会かもしれない。一方、プログラミングといった要素が数理解科学教育において比重を増すと、教育に必要な時間の絶対量は増すがそれはどの段階の教育にとっても重荷となる。

数学嫌いの風潮は、この 20 年に始まったことではないが、大学受験で文理系の区別ができ、さらに数学を課さない受験が導入される中では、必然的にその風潮は生ぜざるを得ない。まずは、機会あるごとに面白い数学、楽しめる数学、役立つ数学というものを知ってもらうことが不可欠であると思う。

参考文献

1. 『教育数学の一側面 – 高等教育における数学の規格とは –』, 数理解析研究所講究録 2021 (2017.4).
2. 藤垣 裕子, 廣野 喜幸 (編), 『科学コミュニケーション論』, 東京大学出版会 (2008.10).
3. 「21 世紀の科学技術リテラシー像～豊かに生きるための智～プロジェクト」
<http://www.scj.go.jp/ja/info/kohyo/pdf/kohyo-20-h64-3.pdf>
<http://www.jst.go.jp/csc/science4All/>