ランダムウォークの(非)ノイズ鋭敏性

田中亮吉

京都大学国際高等教育院/大学院理学研究科数学教室
rtanaka@math.kyoto-u.ac.jp

Abstract

非初等的なグロモフ双曲群上のランダムウォークが小さいノイズパラメータに対して強い意味で非鋭敏的であるという結果について紹介します [Tan22]. 離散群上のランダムウォークのノイズ鋭敏性については [BB21], 関連する問題や背景は [Kal18] によります.

1 離散群上のランダムウォークのノイズ鋭敏性

ここでの離散群とは正確には可算群で離散位相を備えた位相群のことです. そのような群 Γ とその上の確率測度 μ にたいして (単位元を出発点とする) **μ-ランダムウォーク (RW)** $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ とは, 以下で定義される Γ 上のマルコフ連鎖です:

> Γ に値を取る μ を共通な分布とする独立同分布な列 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ にたいして $w_n := x_1 \cdots x_n$ また $w_0 := \mathrm{id}$ (単位元) とする.

例えば, Γ が有限生成であり S をその1つの有限生成系で対称なもの (つまり $S^{-1} = S$ を満たす) とし, μ を S 上の一様分布とすると μ-RW はペア (Γ, S) に対するケーリーグラフ上の単位元を出発点とする単純ランダムウォークです. 特に $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, $S = \{\pm \boldsymbol{e}_1, \pm \boldsymbol{e}_2\}$ (ここで $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ は標準基底とします), また μ が S 上の一様分布であるときは μ-RW は原点を出発点とする正方格子上の単純ランダムウォークを与えます.

このとき Γ 上の μ-RW にたいして以下のように **"ノイズによる摂動"** を定義します. 実数 $\rho \in (0, 1)$ を固定し (ノイズパラメータとよびます), ランダムウォークの各増分 x_n ごと独立に以下の操作を施します:

> 確率 ρ で x_n を分布 μ を持つ独立な y_n に置き換える,
>
> 確率 $1 - \rho$ で $y_n = x_n$ とする.

このとき $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ によって $z_n := y_1 \cdots y_n$ また $z_0 := \mathrm{id}$ とし $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ を与えます. 各 y_n の分布は μ であり, また独立であることから $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ は μ-RW であることに注意しま

す. さて**任意**の $\rho \in (0,1)$ にたいして, 結合分布 $\{(w_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ は **"漸近的に独立"** になるでしょうか?

より形式的に以下のように定義を与えます: 実数 $\rho \in [0,1]$ にたいして $\Gamma \times \Gamma$ 上の確率測度

$$\pi^{\rho} := \rho\mu \times \mu + (1-\rho)\mu_{\mathrm{diag}}$$

を定義します. ここで $\mu \times \mu$ は積測度また

$$\mu_{\mathrm{diag}}((x,y)) := \begin{cases} \mu(x), & x = y \text{ のとき}, \\ 0, & x \neq y \text{ のとき}, \end{cases}$$

です. このとき上で与えた $\{(w_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ は $\Gamma \times \Gamma$ 上の π^{ρ}-RW です. ここで π_n^{ρ} を (w_n, z_n) の分布, μ_n を w_n (あるいは z_n) の分布とします.

Definition 1.1. Γ 上の μ-RW が ℓ^1**-ノイズ鋭敏的** (noise sensitive, 以下 **NS**) であるとは, 任意の $0 < \rho < 1$ にたいして,

$$\|\pi_n^{\rho} - \mu_n \times \mu_n\|_{\mathrm{TV}} \to 0, \quad n \to \infty,$$

が成り立つときをいう. ここで $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ は $\Gamma \times \Gamma$ 上の確率測度 ν_1, ν_2 の間の全変動距離です:

$$\|\nu_1 - \nu_2\|_{\mathrm{TV}} = \sup_{A \subset \Gamma \times \Gamma} |\nu_1(A) - \nu_2(A)| = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Gamma \times \Gamma} |\nu_1(x) - \nu_2(x)|.$$

Example 1.2. 有限群 Γ 上の任意の μ-RW は ℓ^1-NS です [BB21]. これは μ-RW が Γ 上既約かつ非周期的 (aperiodic) ならば $\Gamma \times \Gamma$ 上 π^{ρ}-RW は任意の $\rho \in (0,1]$ にたいして一様分布を定常分布に持ち, π_n^{ρ} が $n \to \infty$ のとき一様分布に収束することからわかります. (既約でない, あるいは非周期的でない場合は少し注意が必要です.)

Example 1.3. $\Gamma = \mathbb{Z}$ (無限巡回群), またその上の確率測度 μ が有限の 2 次モーメントを持ちその分散が $\mathrm{Var}(\mu) = \sigma^2 > 0$ を満たすとき (特に μ が $\{1, -1\}$ 上の一様分布のとき), μ-RW は ℓ^1-NS ではありません. これは中心極限定理の帰結です: (w_n, z_n) を平均 $(0,0)$ にシフトし $\sqrt{n}$ で正規化した確率変数の分布が平均 $(0,0)$, 共分散行列

$$\sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 1-\rho \\ 1-\rho & 1 \end{pmatrix}$$

を持つガウス分布に弱収束します. もし μ-RW が ℓ^1-NS ならば全変動距離による収束は弱収束を導くことから任意の $\rho \in (0,1)$ にたいして $1 - \rho = 0$ でなければならず, 矛盾します.

そこで有限生成**無限**群 Γ とその上の μ-RW で ℓ^1-NS であるようなものが存在するか, という問題を考えてみます. Benjamini と Brieussel は以下を示しました:

Theorem 1.4 ([BB21])**.** 無限二面体群 $D_{\infty} = \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle$ にたいして次が成り立つ:

- μ を $\mu(a) = \mu(b) = \frac{1}{2}$ とすると, μ-RW は ℓ^1-NS でない.

- μ を $\mu(\mathrm{id}) = \mu(a) = \mu(b) = \frac{1}{3}$ とすると, μ-RW は ℓ^1-NS である.

有限生成無限群で有限生成系をサポートにもつ任意の分布 μ にたいして対応する μ-RW が ℓ^1-NS であるようなものは見つかっていません. 第 1 種 Grigorchuk 群がそのような群であると予想されていますが未解決です [BB21, Kal18].

2　強い意味での非ノイズ鋭敏性

離散群 Γ 上の μ-RW が ℓ^1-NS であることの**障害**を考えてみます. Example 1.3 を一般化して Γ が $\mathbb{Z}$ への全射準同型を持つ場合, Γ 上に ℓ^1-NS でない μ-RW を構成することができます. もう 1 つの障害として以下が知られています:

Theorem 2.1 ([BB21])**.** ペア (Γ, μ) が非リューヴィルである, つまり有界な $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ で μ-調和であるもの

$$\sum_{s \in \Gamma} f(xs)\mu(s) = f(x), \quad x \in \Gamma,$$

は定数関数に限るとき, 任意の $\rho \in (0, 1)$ にたいして

$$\liminf_{n \to \infty} \|\pi_n^\rho - \mu_n \times \mu_n\|_{\mathrm{TV}} > 0$$

である. 特に Γ 上の μ-RW は ℓ^1-NS ではない.

離散群 Γ 上の μ-RW が ℓ^1-NS であることの障害は, Γ が $\mathbb{Z}$ への全射準同型を持つこと, またはペア (Γ, μ) が非リューヴィルであることのみであるかどうかは興味深い問題です [BB21, Question 1.5]. 以下の結果は, 非リューヴィルであるペア (Γ, μ) の広いクラスで, (次の意味で) ℓ^1-NS の強い否定が成り立つことを示しています:

Theorem 2.2 ([Tan22])**.** Γ を非初等的なグロモフ双曲群とし, μ をその上の分布で有限生成系をサポートに持つものとします. このときある $0 < \rho_0 \leq 1$ で任意の $0 < \rho < \rho_0$ にたいして

$$\|\pi_n^\rho - \mu_n \times \mu_n\|_{\mathrm{TV}} \to 1, \quad n \to \infty,$$

が成り立つ.

非初等的なグロモフ双曲群の具体例には階数 2 の自由群 F_2, 三角形群

$$\langle a, b, c \mid a^2, b^3, c^7, abc \rangle$$

種数 2 の向き付け可能閉曲面の基本群があります. 定理 2.2 のペア (Γ, μ) は常に非リューヴィルです (Γ の非従順性の帰結です). 一方そのような Γ で $\mathbb{Z}$ への全射準同型を持たないものもあります. また注意として定理 2.2 の μ についての条件は, μ のサポートが (半群としてではなく, 群として) 生成する部分群が F_2 と同型な群を含む, かつ μ は (語距離について) 有限な 1 次モーメントを持つ, というものに弱められます. 定理の主張で $\rho_0 = 1$ と取れるような μ-RW が存在することは分かっていますが, 一般に $\rho_0 = 1$ とできるかはわかっていません.

3 定理 2.2 の証明の方針

証明には次の 2 つを示すことがポイントとなります:

(1) ランダムウォークが群の境界に定める**調和測度が真に次元的**であること.

(2) ランダムウォーク・エントロピーの**パラメータについての連続性**.

以下この 2 点を説明します. Γ の (グロモフ) 境界を $\partial\Gamma$ とし Γ のコンパクト化 $\Gamma\cup\partial\Gamma$ を考えます (これは距離化可能です). μ-RW $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ は境界のある点 w_∞ に (コンパクト化の位相で) 概収束します. この w_∞ の分布を ν_μ とかき, μ-**調和測度**とよびます. 一方 π^ρ-RW $\{(w_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ は $(\Gamma\cup\partial\Gamma)^2$ において $(\partial\Gamma)^2$ のある点 (w_∞, z_∞) に概収束します. この (w_∞, z_∞) の分布を ν_{π^ρ} とかき, π^ρ-**調和測度**とよびます. ここで $n\to\infty$ のとき, μ_n は ν_μ に $\Gamma\cup\partial\Gamma$ 上弱収束し, π_n^ρ は ν_{π^ρ} に $(\Gamma\cup\partial\Gamma)^2$ 上弱収束します. (ここで $(\Gamma\cup\partial\Gamma)^2$ のランダムウォークの "行き先" は $(\partial\Gamma)^2$ であることに注意します.) 境界 $\partial\Gamma$ には自然な (擬) 距離が定まります. 積 $(\partial\Gamma)^2$ 上の (擬) 距離についての閉球を $B(\xi, r)$ (中心 $\xi\in(\partial\Gamma)^2$, 半径が $r>0$ であるもの) とかくことにします.

上記のステップ (1) は π^ρ-調和測度 ν_{π^ρ} が**真に次元的** (exact dimensional) であることを示すことです:

> ν_{π^ρ} についてほとんどすべての点 $\xi\in(\partial\Gamma)^2$ で
>
> $$\lim_{r\to 0}\frac{\log \nu_{\pi^\rho}(B(\xi, r))}{\log r} = \frac{h(\pi^\rho)}{l}, \qquad \text{(D)}$$
>
> が成り立つ.

ここで $h(\pi^\rho)$ は π^ρ-RW のランダムウォーク・エントロピー, l はドリフトでそれぞれ正で有限の値です. この設定では l は $\Gamma\times\Gamma$ 上のある距離についての平均移動距離で, この距離として自然なものをとると l は ρ によりません. ここでランダムウォーク・エントロピー $h(\pi^\rho)$ の定義のみ述べると

$$h(\pi^\rho) = \lim_{n\to\infty}\frac{H(\pi_n^\rho)}{n}, \quad \text{ここで } H(\pi_n^\rho) := -\sum_{x\in\Gamma\times\Gamma}\pi_n^\rho(x)\log\pi_n^\rho(x),$$

です (極限の存在は Fekete の補題によります). 同様にして $h(\mu)$ を定義します.

上記のステップ (2) は $\rho\mapsto h(\pi^\rho)$ が単位区間 $[0,1]$ において連続であることを示すことです. これは Erschler と Kaimanovich の結果から従います [EK13]. 一方 μ-RW と π^ρ-RW のランダムウォーク・エントロピーについて

$$h(\mu)\le h(\pi^\rho)\le 2h(\mu),$$

が成り立ちます. いま $h(\mu)>0$ です (これはいまの場合は Γ が非従順であることの帰結です; $h(\mu)>0$ とペア (Γ,μ) が非リューヴィルであることとは同値です [KV83]). これより

十分小さいすべての $\rho > 0$ で $h(\pi^\rho) < 2h(\mu)$ であり, $h(\pi^0) = h(\mu)$ また $h(\pi^1) = 2h(\mu)$ であることに注意すると, (D) から $(\partial\Gamma)^2$ 上の 2 つの確率測度 ν_{π^ρ} と $\nu_\mu \times \nu_\mu$ は互いに特異になります．これより $(\Gamma \cup \partial\Gamma)^2$ 上の確率測度の列 $\{\pi_n^\rho\}_{n=0}^\infty$, $\{\mu_n \times \mu_n\}_{n=0}^\infty$ がそれぞれ ν_{π^ρ}, $\nu_\mu \times \nu_\mu$ に弱収束することから,

$$\liminf_{n\to\infty} \|\pi_n^\rho - \mu_n \times \mu_n\|_{\mathrm{TV}} \geq \|\nu_{\pi^\rho} - \nu_\mu \times \nu_\mu\|_{\mathrm{TV}} = 1,$$

が得られます．一般に 2 つの $\Gamma \times \Gamma$ 上の確率測度 ν_1, ν_2 に対して $\|\nu_1 - \nu_2\|_{\mathrm{TV}} \leq 1$ であることから,

$$\lim_{n\to\infty} \|\pi_n^\rho - \mu_n \times \mu_n\|_{\mathrm{TV}} = 1,$$

となり, 定理 2.2 の主張が帰結されます.

Remark 3.1. ここで $\{a, b\}$ 上の自由半群 F_2^+ とその上の確率測度 μ として $\mu(a) = \mu(b) = 1/2$ であるものをとると, 対応する π^ρ-RW のランダムウォーク・エントロピーは

$$h(\pi^\rho) = \log 2 - \frac{\rho}{2}\log\frac{\rho}{2} - \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)\log\left(1 - \frac{\rho}{2}\right)$$

です．この場合は任意の $\rho \in (0, 1)$ にたいして $h(\pi^\rho) < h(\pi^1) = 2\log 2$ を満たします.

References

[BB21] Itai Benjamini and Jérémie Brieussel. Noise sensitivity of random walks on groups. arXiv:1901.03617v2, 2021.

[EK13] A. Erschler and V. A. Kaimanovich. Continuity of asymptotic characteristics for random walks on hyperbolic groups. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 47(2):84–89, 2013.

[Kal18] Gil Kalai. Three puzzles on mathematics, computation, and games. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. I. Plenary lectures*, pages 551–606. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018.

[KV83] V. A. Kaimanovich and A. M. Vershik. Random walks on discrete groups: boundary and entropy. *Ann. Probab.*, 11(3):457–490, 1983.

[Tan22] Ryokichi Tanaka. Non-noise sensitivity for word hyperbolic groups. arXiv:2211.03951, 2022.