Generalizations of Bebiano-Lemos-Providência inequality

藤井 正俊　大阪教育大学　名誉教授

Masatoshi Fujii Osaka Kyoiku University

mfujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

1　はじめに

ここでは、ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素を単に作用素と呼ぶことにします。作用素 A が positive $(A \geq 0)$ であるとは,

$$(Ax, x) \geq 0 \quad x \in H$$

が成り立つこととします。特に、A が positive かつ invertible のとき、$A > 0$ で表します。行列で言えば、A が 非負定値 (positive semidefinite) であることが positive $(A \geq 0)$ に、正定値が $A > 0$ に当たります。また、自己共役作用素 A, B に対して、$A - B \geq 0$ によって、作用素順序 $A \geq B$ が自然に導入されます。$\mathbb{R}^+$ 上で定義された連続関数 f による functional calculus がこの順序を保存する、すなわち

$$A \geq B \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(A) \geq f(B)$$

のとき、f を作用素単調といいます。冪関数については、次の重要な事実が知られています。

$$t \ \rightarrow \ t^\alpha \text{ は、} \alpha \in [0, 1] \text{ のときのみ、作用素単調である。}$$

通常、これは Löwner-Heinz inequality と呼ばれています。以下 (LH) で表わします。[29], [25], [32] ((LH) に対する Pedersen の見事な証明は、Appendix で紹介します。)
さて、(LH) はノルム不等式による同値な表現を持っています。[12], [22] 代表的なものが、次の Araki-Cordes 不等式 (AC) です：

(AC)　$\|B^t A^t B^t\| \leq \|BAB\|^t$ for $0 \leq t \leq 1$.

(AC) は、次のようにも変形できます：

(AC-1)　$\|B^t A^t B^t\| \geq \|BAB\|^t$ for $t \geq 1$.

(AC-2)　$\|A^t B^t\| \leq \|AB\|^t$ for $0 \leq t \leq 1$.

本稿では、norm 不等式の方向から、Löwner-Heinz 不等式の変身を見ていきたいと思います。そのためのロードマップをここに記しておきたいと思います。

Ando-Hiai inequality

$\nearrow$　　　$\searrow$

Löwner-Heinz inequality　　　Grand Furuta inequality

$\searrow$　　　$\nearrow$

Furuta inequality

$\Downarrow$

BLP inequality $\longrightarrow$ Grand BLP inequality

2　作用素幾何平均

Kubo-Ando [28] による作用素平均の理論によって、非負作用素単調関数と作用素平均の間には、アフィン-同型が

$$A \ \sigma \ B = A^{\frac{1}{2}} f(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } A > 0,\ B \geq 0$$

によって与えられます。特に、

$$f(x) = 1 \ \sigma \ x$$

は作用素平均 σ の表現関数と呼ばれています。なお、作用素平均は、次の 3 条件を満たす 2 項演算を言います：

Monotonicity:	$A \leq C,\ B \leq D \ \Rightarrow \ A \ \sigma \ B \leq C \ \sigma \ D$
Upper semi-continuity:	$A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B \ \Rightarrow A_n \ \sigma \ B_n \downarrow A \ \sigma \ B$
Transformer inequality:	$T^*(A \ \sigma \ B)T \leq (T^*AT) \ \sigma \ (T^*BT)$ for all T
(Normalization:	$1 \ \sigma \ 1$)

さて、(LH) より、$\alpha \in [0,1]$ に対して、α-幾何平均 $\#_\alpha$ が次のような形で定義されます：

$$A \#_\alpha B = A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } A > 0,\ B \geq 0,$$

cf. [33], [34], [1]。このように定義すると、複雑そうに見えますが、A と B が交換可能であれば、数の場合と同じように、

$$A \#_\alpha B = A^{1-\alpha} B^\alpha$$

特に、$\alpha = \frac{1}{2}$ の場合は、

$$A \# B = \sqrt{AB}$$

となります。
なお、歴史的には、上記のようにすんなりと α-幾何平均が導入されたのではなく、まず幾何平均 $\#$ が作用素行列を使って定義されました：$A, B \geq 0$ に対して、

$$A \ \# \ B = \max\{X \geq 0;\ \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0\}$$

ここで、A が invertible であるとすると、

$$\begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} 1 & A^{-\frac{1}{2}} X A^{-\frac{1}{2}} \\ A^{-\frac{1}{2}} X A^{-\frac{1}{2}} & A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \geq (A^{-\frac{1}{2}} X A^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$\Rightarrow \ (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \geq A^{-\frac{1}{2}} X A^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \ A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \geq X$$

従って、

$$A \ \# \ B = A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$$

と、丁度 $\alpha = \frac{1}{2}$ の時に適合しています。

作用素幾何平均を使った不等式の典型的なものとして、安藤-日合不等式が挙げられます。Ando-Hiai [2] による log-majorization theorem は、次のように表されています: $\alpha \in [0,1]$ と正定値行列 A, B に対して、

$$(A\#_\alpha B)^r \succ_{(\log)} A^r\#_\alpha B^r \quad (r \geq 1)$$

が成り立つ。ところが実際に証明されているのは、次の作用素不等式

$$A\#_\alpha B \leq 1 \implies A^r\#_\alpha B^r \leq 1 \quad \text{for } r \geq 1$$

で、Ando-Hiai inequality (AH) と呼ばれています。(LH) の運用がその証明の要点です。

Proof of (AH). まず、$\alpha \notin [0,1]$ に対して、2 項演算

$$A\natural_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}} \quad (A, B > 0)$$

を導入します。($\#_\alpha$ と形は同じですが、こちらの方は、作用素平均にはなりません。)以下で、次の変形公式を使用します: $A\natural_\alpha B = B\natural_{1-\alpha}A = B(B^{-1}\natural_{\alpha-1}A^{-1})B$
さて仮定は、次のように変形されます：$A\,\#_\alpha B \leq 1 \;\Leftrightarrow\; C^\alpha = (A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha \leq A^{-1} \;\Leftrightarrow\; C^{-\alpha} \geq A$
この下で示すべきことは、$r = 1 + \epsilon$ ($\epsilon \in [0,1]$) に対して、

$$A^r\#_\alpha B^r = A^{\frac{1}{2}}(A^\epsilon \,\#_\alpha\, A^{-\frac{1}{2}}B^rA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \leq 1$$

(1) $C^{-\alpha} \geq A$ に (LH) を適用して、$A^\epsilon \leq C^{-\alpha\epsilon}$ が分かります。

(2) 上記の公式を使い、

$$\begin{aligned} A^{-\frac{1}{2}}B^rA^{-\frac{1}{2}} &= A^{-\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}CA^{\frac{1}{2}})^rA^{-\frac{1}{2}} = A^{-1}\,\natural_r\,C = C(C^{-1}\,\#_{r-1}\,A)C \\ &= C(C^{-1}\,\#_\epsilon\,A)C \leq C(C^{-1}\,\#_\epsilon\,C^{-\alpha})C = C^{(1-\alpha)\epsilon+1} \end{aligned}$$

従って、$A^\epsilon \,\#_\alpha\, A^{-\frac{1}{2}}B^rA^{-\frac{1}{2}} \leq C^{-\alpha\epsilon} \,\#_\alpha\, C^{(1-\alpha)\epsilon+1} = C^\alpha \leq A^{-1}$ より

$$A^r\#_\alpha B^r = A^{\frac{1}{2}}(A^\epsilon \,\#_\alpha\, A^{-\frac{1}{2}}B^rA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \leq A^{\frac{1}{2}}A^{-1}A^{\frac{1}{2}} = 1$$

3 古田不等式

作用素幾何平均を使うことにより、より深い分析ができる例として、古田不等式を挙げることができると思います。古田不等式は、次のようなものですが (LH) の見事な一般化であります。

Furuta Inequality (FI)

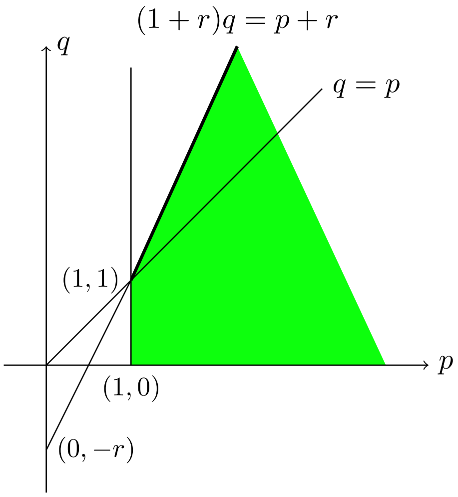
If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,

(i) $$(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}}B^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

and

(ii) $$(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

hold for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1+r)q \geq p + r$.



Furuta inequality に関する文献は、[20], [21], [10], [11], [36]、[16] など多岐にわたります。
（FI) は、付帯条件において等号成立のときが最も重要で、それを α-geometric mean を用いてそれを表すと次のような形にまとめられます：

If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$

$$A^{-r} \,\#_{\frac{1+r}{p+r}}\, B^p \leq A$$

holds for $p \geq 1$.

（FI) をこのように表すと、次に挙げる Kamei [26] よる精密化の意味が明確になります:

Satellite of (FI)　(SFI) If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$

$$A^{-r} \,\#_{\frac{1+r}{p+r}}\, B^p \leq B \ (\leq A)$$

holds for $p \geq 1$.

実は、もう少し弱い条件の下で（SFI) は成立します：

If $\log A \geq \log B$ for $A, B > 0$, then

$$A^{-r} \,\#_{\frac{1+r}{p+r}}\, B^p \leq B$$

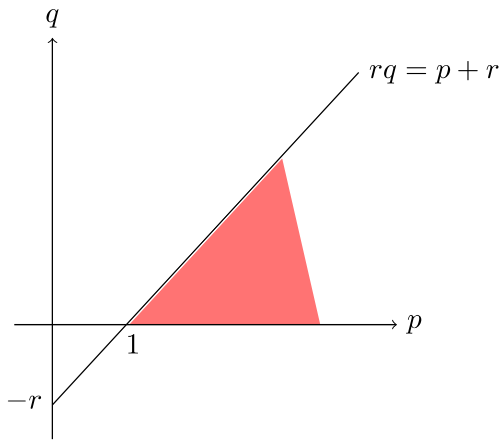
holds for $p \geq 1$ and $r \geq 0$.

$\log A \geq \log B$ は、chaotic order と呼ばれていますが、$\log t$ が作用素単調なので、$A \geq B (> 0)$ より弱い順序になっています。（記号は、$A \gg B$ と表されます。）
（SFI) を示すための道具が、次の古田型の不等式ですで

(FI) for chaotic order. If $\log A \geq \log B$ for $A, B > 0$, then

$$(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+r}{q}}$$

holds for $p \geq 0$, $q \geq 1$ and $r \geq 0$ such that $rq \geq p + r$.



(FI) の場合と同様に、作用素幾何平均で表せば、次のようになります。

（CFI) If $A \gg B$ for $A, B > 0$, then

$$A^{-r} \,\#_{\frac{r}{p+r}}\, B^p \leq I$$

holds for $p \geq 0$ and $r \geq 0$.

(CFI) の綺麗な証明は、Uchiyama [37] により与えられています。要点は

$$\left(1 + \frac{\log x}{n}\right)^n \to x \quad (n \to \infty)$$

の利用にあります。$A \gg B$ に対して、

$$A_n = 1 + \frac{\log A}{n},\ B_n = 1 + \frac{\log B}{n}$$

とおくと、$A_n \geq B_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ さらに、十分大なる n については、$A_n \geq B_n > 0$ が成立します。これらに対して、(FI) を適用すると、

$$(A_n^{\frac{nr}{2}} B_n^{np} A_n^{\frac{nr}{2}})^{\frac{1+nr}{np+nr}} \geq A_n^{1+nr}$$

が得られますが、ここで

$$(A_n)^n \ \to A, \quad (B_n)^n \ \to B$$

より、

$$(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq A^r$$

が得られます。これを幾何平均を用いて表せば、

$$A^{-r} \ \#_{\frac{r}{p+r}} \ B^p \leq I$$

になります。蛇足ですが、(FI) と (CFI) は同値であることが分かります。

さて、前述の (SFI) の精密版

If $\log A \geq \log B$ for $A, B > 0$, then

$$A^{-r} \ \#_{\frac{1+r}{p+r}} \ B^p \leq B$$

holds for $p \geq 1$ and $r \geq 0$.

ですが、(CFI) より簡単に証明できます。その補助道具は次の 2 つです：

Transposition: $A \#_\alpha B = B \#_{1-\alpha} A$

Multipicativity: $A \#_{\alpha\beta} B = A \#_\alpha (A \#_\beta B)$

この準備の下で、証明は以下の通り短いものです：

$$\begin{aligned}
A^{-r} \ \#_{\frac{1+r}{p+r}} \ B^p &= B^p \ \#_{\frac{p-1}{p+r}} \ A^{-r} \\
&= B^p \ \#_{\frac{p-1}{p}} (B^p \ \#_{\frac{p}{p+r}} \ A^{-r}) && \text{by (Mp)} \\
&= B^p \ \#_{\frac{p-1}{p}} (A^{-r} \ \#_{\frac{p}{p+r}} \ B^p) && \text{by (Tp)} \\
&\leq B^p \ \#_{\frac{p-1}{p}} \ I && \text{by (CFI)} \\
&= I \ \#_{\frac{1}{p}} \ B^p = B.
\end{aligned}$$

4　BLP 不等式

BLP は、Bebiano-Lemos-Providência の頭文字を取ったもので、彼らは [4] において次のノルム不等式を提示しました。

Bebiano-Lemos-Providência inequality (BLP)

$$\|A^{\frac{1+t}{2}}B^tA^{\frac{1+t}{2}}\| \leq \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^sA^{\frac{s}{2}})^{\frac{t}{s}}A^{\frac{1}{2}}\|$$

holds for $A, B \geq 0$ and $s \geq t \geq 0$.

この一般化は [18] で議論されています。

Theorem 4.1. *If $A, B > 0$, then*

$$\|A^{\frac{1+r}{2}}B^{1+r}A^{\frac{1+r}{2}}\|^{\frac{p+s}{p(1+r)}} \leq \|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{s}{2}}B^{p+s}A^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{2}}\|$$

holds for $p \geq 1$ and $s \geq r \geq 0$.

この定理が (BLP) の一般化になっていることは、B を $B^{\frac{r}{1+r}}$ で置き換え、$p = \frac{s}{r} \geq 1$ に取ると、

$$\frac{p+s}{p(1+r)} = 1,\ \frac{r(p+s)}{1+r} = s$$

より、(BLP) が得られることより知られます。
なお、もう少し内情を言えば、次の作用素不等式を示し、その norm 不等式版として Theorem 4.1 が位置付けられます。

Theorem 4.2. *If $A, B > 0$ satisfy $A^s \#_{\frac{1}{p}} B^{p+s} \leq A^{1+s}$ for some $p \geq 1$ and $s \geq 0$, then $B^{1+s} \leq A^{1+s}$ and so $B^{1+r} \leq A^{1+r}$ for $0 \leq r \leq s$.*

この不等式は、(FI) から導かれます。実際、仮定：$A^s \#_{\frac{1}{p}} B^{p+s} \leq A^{1+s}$ の両辺に両側から $A^{-\frac{s}{2}}$ を掛けて、仮定を

$$B_1 := (A^{-\frac{s}{2}}B^{p+s}A^{-\frac{s}{2}})^{\frac{1}{p}} \leq A$$

と変形しておいて、(FI) を使います。即ち、

$$A^{1+s} \geq (A^{\frac{s}{2}}B_1^pA^{\frac{s}{2}})^{\frac{1+s}{p+s}} = B^{1+s}$$

となり、結論が得られます。

次に、(FI) と (AH) の同時拡張である Grand Furuta inequality (GFI) は、次のような形で表出されています

Grand Furuta inequality (GFI) *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0, 1]$, then*

$$[A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \leq A^{1-t+r}$$

holds for $r \geq t$ and $p, s \geq 1$.

これを作用素平均の言葉で表せば、次のようになります。

(GFI) *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0,1]$, then*

$$A^{-r+t} \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \leq A$$

holds for $r \geq t$ and $p, s \geq 1$.

次に、(GFI) に対応する BLP 不等式の一般化を考えてみます。そのために、次の作用素不等式提起します。当然のことながら、これは Theorem 4.2 の (GFI) 版に当たっています。

Theorem 4.3. *Suppose that $A, B > 0$ and $t \in [0,1]$. If $A^{r-t} \natural_{\frac{1}{p}} (A^r \natural_{\frac{1}{s}} B^{(p-t)s+r}) \leq A^{1-t+r}$ for some $p, s \geq 1$ and $r \geq t$, then $B^{1-t+r} \leq A^{1-t+r}$.*

次の系は、Grand BLP inequality と呼ぶのは、自然の成り行きとして、許されるものと考えます。

Corollary 4.4. *Suppose that $A, B > 0$ and $t \in [0,1]$. Then*

$$\|A^{\frac{1-t+r}{2}} B^{1-t+r} A^{\frac{1-t+r}{2}}\|^{\frac{(p-t)s+r}{ps(1-t+r)}} \leq \|A^{\frac{1}{2}} \{A^{-\frac{t}{2}} (A^{\frac{r}{2}} B^{(p-t)s+r} A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{s}} A^{-\frac{t}{2}}\}^{\frac{1}{p}} A^{\frac{1}{2}}\|$$

holds for $p, s \geq 1$ and $r \geq t$.

Theorem 4.3 及び Corollary 4.4 で、$t = 0, s = 1$ とすると、Theorem 4.2 及び Theorem 4.1 が得られます。 また、 (GFI) と (AH) の関係は、

(GFI) for $t = 1,\ r = s \iff$ (AH)

であることがわかっていますので、Theorem 4.3 で、$t = 1, s = r$ とすると、

Let $r \geq 1$ be given. If $A^{r-1} \#_{\frac{1}{p}} (A^r \#_{\frac{1}{r}} B^{pr}) \leq A^r$ for some $p \geq 1$, then $B^r \leq A^r$.

が、成立することになりますが、仮定の方は、

$$A^{-1} \#_{\frac{1}{p}} (I \#_{\frac{1}{r}} A^{-\frac{r}{2}} B^{pr} A^{-\frac{r}{2}}) \leq I$$

さらに、$\alpha = \frac{1}{p}$, $B_1 = (A^{-\frac{r}{2}} B^{pr} A^{-\frac{r}{2}})^{\frac{1}{r}}$ とおくと、仮定は、$A^{-1} \#_\alpha B_1 \leq I$ と書き換えられます。一方、結論 $B^r \leq A^r$ は、$B^r = (A^{\frac{r}{2}} B_1^r A^{\frac{r}{2}})^\alpha$ より、

$$(A^{\frac{r}{2}} B_1^r A^{\frac{r}{2}})^\alpha \leq A^r \Leftrightarrow A^{-\frac{r}{2}} (A^{\frac{r}{2}} B_1^r A^{\frac{r}{2}})^\alpha A^{-\frac{r}{2}} \leq I \Leftrightarrow A^{-r} \#_\alpha B_1^r \leq I$$

となるので、(A の代わりに A^{-1} とすると) (AH) が得られます。

5 作用素相対エントロピー

1961 年、 Nakamura and Umegaki [31] は、

$$S(A) = -A \log A$$

によって、作用素エントロピーを導入しました。その後、作用素平均の理論の発展の下で、1989 年、 J-I Fujii and Kamei [9] により、作用素相対エントロピーが

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

として導入されました。これが作用素エントロピーの相対化であることは、

$$S(A|I) = S(A) = -A \log A$$

より知られます。なお、作用素相対エントロピーの自然な近似として、Yanagi, Kuriyama and Furuichi [38] は、Tsallis 作用素相対エントロピー　$T_\alpha(\rho|\sigma)$ $(\alpha \in [0,1])$ を導入しました：

$$T_\alpha(\rho|\sigma) = \frac{\rho \ \#_\alpha \ \sigma - \rho}{\alpha}$$

ここで、ρ, σ は、正定値行列ですが、そのまま正作用素にも適用でき、次のことが成り立ちます。

$$T_\alpha(\rho|\sigma) \ \downarrow \ S(\rho|\sigma) \ \ (\alpha \downarrow 0);$$

$$\frac{d(\rho \ \#_\alpha \ \sigma)}{d\alpha}|_{\alpha=0} = S(\rho|\sigma)$$

最後に、作用素相対エントロピーに関する BLP inequality について、考えてみたいと思います。
まず、(CFI) の応用として、次の不等式が得られます。

Theorem 5.1. *Let $A, B > 0$ and $r > 0$ be given. Then, if $S(A^r|A^{p+r}) \geq S(A^r|B^{p+r})$ for some $p > 0$, then $A^r \geq B^r$.*

Proof. まず、 $\frac{1}{p}S(A^r|B^{p+r}) = A^{\frac{r}{2}} \log(A^{-\frac{r}{2}}B^{p+r}A^{-\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}}A^{\frac{r}{2}}$ なので, 仮定は、 次のように言い換えられます。

$$\log A \geq \log(A^{-\frac{r}{2}}B^{p+r}A^{-\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}}.$$

そこで、 $B_1 = (A^{-\frac{r}{2}}B^{p+r}A^{-\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}}$ とおくと、$A \gg B_1$ が仮定ということになり、この結果、 (CFI) より

$$I \geq A^{-r} \ \#_{\frac{r}{p+r}} \ B_1^p = A^{-r} \ \#_{\frac{r}{p+r}} \ A^{-\frac{r}{2}}B^{p+r}A^{-\frac{r}{2}},$$

が得られ、その結果、

$$A^r \geq I \ \#_{\frac{r}{p+r}} \ B^{p+r} = B^r$$

が得られ、無事証明が終わることになります。

さらに、作用素相対エントロピーに関する GBLP inequality は、次のような形で与えられます。

Theorem 5.2. *Let $A, B > 0$ and $t, r \geq 0$ be given. Then, if*

$$S(A^{t+r}|A^{p+t+r}) \geq S(A^{t+r}|A^r \ \natural_{\frac{1}{s}} \ B^{(p+t)s+r})$$

holds for some $p, s > 0$ with $(p+t)s \geq t$, then $A^{t+r} \geq B^{t+r}$.

この証明の基になる (GFI) 型の作用素不等式を挙げておきます [16, Theorem 3.16]:

If $A \gg X$ for $A, X > 0$, then

$$A^{\frac{(p+t)s+r}{q}} \geq [A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{t}{2}}X^pA^{\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}]^{\frac{1}{q}}$$

holds for $p, t, r, s \geq 0, \ q \geq 1$ with $(t+r)q \geq (p+t)s + r$.

Proof. まず最初に、仮定は次のように変形できます。

$$\log A \geq \log[A^{-\frac{t+r}{2}}(A^r \ \natural_{\frac{1}{s}} \ B^{(p+t)s+r})A^{-\frac{t+r}{2}}]^{\frac{1}{p}}.$$

これより、$q = \frac{(p+t)s+r}{t+r}$ and $X = [A^{-\frac{t+r}{2}}(A^r \natural_{\frac{1}{s}} B^{(p+t)s+r})A^{-\frac{t+r}{2}}]^{\frac{1}{p}}$ として上記の (GFI) 型の作用素不等式を用いると、

$$\begin{aligned}
A^{t+r} &\geq [A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{t}{2}}X^pA^{\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}]^{\frac{t+r}{(p+t)s+r}} \\
&= [A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{t}{2}}[A^{-\frac{t+r}{2}}(A^r \natural_{\frac{1}{s}} B^{(p+t)s+r})A^{-\frac{t+r}{2}}]A^{\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}]^{\frac{t+r}{(p+t)s+r}} \\
&= [A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{r}{2}}(A^r \natural_{\frac{1}{s}} B^{(p+t)s+r})A^{-\frac{r}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}]^{\frac{t+r}{(p+t)s+r}} \\
&= [A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{r}{2}}B^{(p+t)s+r}A^{-\frac{r}{2}}A^{\frac{r}{2}}]^{\frac{t+r}{(p+t)s+r}} \\
&= B^{t+r},
\end{aligned}$$

によって、証明が完了します。

Appendix–Pedersen's proof of (LH)

$I = \{\alpha \in [0,1];\ x^\alpha \text{ is operator monotone }\}$ とおく。

$0, 1 \in I$ なので、I が凸、即ち、$2\alpha, 2\beta \in I \ \Rightarrow\ \alpha + \beta \in I$ を示せばよい。結論を書き直せば、

$$A^{-1} \geq B \geq 0 \ \Rightarrow\ A^{-(\alpha+\beta)} \geq B^{\alpha+\beta}, \text{i.e., } A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}B^{\alpha+\beta}A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \leq 1$$

さて、仮定より、$A^{-1} \geq B \geq 0$ の下では、

$$A^\alpha B^{2\alpha}A^\alpha \leq 1,\ A^\beta B^{2\beta}A^\beta \leq 1, \text{i.e., } \|A^\alpha B^\alpha\| \leq 1,\ \|B^\beta A^\beta\| \leq 1$$

従って、($r(X)$ is the spectral radius of X.)

$$\begin{aligned}
\|A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}B^{\alpha+\beta}A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\| &= r(A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}B^{\alpha+\beta}A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}) = r(A^\alpha B^{\alpha+\beta}A^\beta) \\
&\leq \|A^\alpha B^{\alpha+\beta}A^\beta\| \leq \|A^\alpha B^\alpha\|\|B^\beta A^\beta\| \leq 1.
\end{aligned}$$

参考文献

[1] T. Ando, *Topics on Operator Inequalities*, Lecture Note, Hokkaido University, Sapporo, 1978.

[2] T. Ando and F. Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl., **197, 198** (1994), 113–131.

[3] H. Araki, *On an inequality of Lieb and Thirring*, Let. Math. Phys., **19** (1990), 167–170.

[4] N. Bebiano, R.Lemos and J. Providência, *Inequalities for quantum relative entropy*, Linear Algebra Appl., **401** (2005), 159–172.

[5] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *An operator inequality*, Linear Algebra Appl., **142** (1990), 153–159.

[6] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *Convexity of the geodesic distance on spaces of positive operators*, Illinois J. Math., **38** (1994), 87–94.

[7] J. Fujii, M. Fujii, T. Furuta and R. Nakamoto , *Norm inequalities related to McIntosh type inequality*, Nihonkai Math. J., **118** (1993), 827–830.

[8] J. Fujii, M. Fujii, T. Furuta and R. Nakamoto , *Norm inequalities equivalent to Heinz inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1992), 67–72.

[9] J. Fujii and E. Kamei, *Relative operator entropy in noncommutative information theory*, Math. Japon., **34** (1989), 341–348.

[10] M. Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator Theory, 23 (1990), 67–72.

[11] M. Fujii, *Furuta inequality and its related topics*, Ann. Funct. Anal., **1** (2010), 28–45.

[12] M. Fujii and T. Furuta , *Löwner-Heinz, Cordes and Heinz-Kato inequalities*, Math. Japon., **38** (1993), 73–78.

[13] M. Fujii, T. Furuta and R. Nakamoto , *Norm inequalities in the Corach-Porta-Recht theory and operator means*, Illinois J. Math., **40** (1996), 527–534.

[14] M. Fujii, M. Ito, E. Kamei and A. Matsumoto, *Operator inequalities related to Ando-Hiai inequality*, Sci. Math. Japon., **70** (2009), 229–232.

[15] M. Fujii and E. Kamei, *Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 2751–2756.

[16] M. Fujii, J. Mićić Hot, J. Pečarić and Y. Seo, *Recent Developments of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Element, Zagreb, Monographs in Inequalities **4**, 2012.

[17] M. Fujii and E. Kamei, *Ando-Hiai inequality and Furuta inequality*, Linear Algebra Appl., **416** (2006), 541–545.

[18] M. Fujii, R. Nakamoto and M. Tominaga, *Generalized Bebiano-Lemos-Providência inequalities and their reverses*, Linear Algebra Appl., **426** (2007), 33–39.

[19] M. Fujii and Y. Seo, *reverse inequalities of Cordes and Löwner-Heinz inequalities*, Nohonkai Math. J., **16** (2005), 145–154.

[20] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ *assures* $(B^rA^pB^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ *for* $r \geq 0,\ p \geq 0,\ q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 85–88.

[21] T. Furuta, *Elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. **65** (1989), 126.

[22] T. Furuta, *Norm inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem*, Rev. Math. Phys., **1** (1989), 135–137.

[23] T. Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl., **219** (1995), 139–155.

[24] F. Hansen, *An operator inequality*, Math. Ann., **246** (1980), 249–250.

[25] E. Heinz, *Beitrage zur Storungstheorie der Spectral-zegung*, Math. Ann., **123** (1951), 415–438.

[26] E. Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon. 33 (1988), 883–886.

[27] M. Kian and Y. Seo, *Norm inequalities related to the matrix geometric mean of negative power*, Sci. Math. Japon., Online, 2018–7.

[28] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246** (1980), 205–224.

[29] K. Löwner, *Über monotone Matrix function*, Math. Z., **38** (1934), 177–216.

[30] A. McIntosh, *Heinz inequalitiesand perturbation of spectral families*, Macquarie Math. Reports, 1979.

[31] M. Nakamura and H. Umegaki, *A note on the entropyfor operator algebras*, Proc. Japan Acad., **37** (1961), 149–154.

[32] G. K. Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 309–310.

[33] G. K. Pedersen and M. Takesaki, *The operator equation* $THT = K$, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 311–312.

[34] W. PUSZ and S. L. WORONOWICZ, *Functional calculus for sesquilinear formsand the purification map*, Rep. Math. Phys., **8** (1975),159–170.

[35] Y. SEO, *Matrix trace inequalities related to the Tsallis relative entropy of negative order*, J. Math. Anal. Appl., **472** (2019), 1499–1508.

[36] K. TANAHASHI, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 141–146.

[37] M. UCHIYAMA, *Some exponential operator inequalities*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 469–471.

[38] K. YANAGI, K. KURIYAMA, S. FURUICHI, *Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy*, Linear Algebra Appl., **394** (2005) 109–118.