

Uncertainty Relations Represented by Tracial or Non-Tracial Positive Linear Maps

城西大学・理学部 柳 研二郎

Kenjiro Yanagi
Department of Mathematics
Faculty of Science
Josai University

1 Introduction

量子情報理論では、量子状態 (density operator) ρ のもとで物理量 (self-adjoint operator) A を観測したときの期待値は $\text{Tr}(\rho A)$ で表され、分散は $\text{Var}_\rho(A) := \text{Tr}(\rho A^2) - (\text{Tr}(\rho A))^2$ で表されることが知られている。量子状態 ρ のもとで2つの物理量 A, B に対して Heisenberg uncertainty relation は次の不等式で与えられている。

$$\text{Var}_\rho(A)\text{Var}_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}(\rho[A, B])|^2$$

さらにより強い不等式が Schrödinger によって得られている。

$$\text{Var}_\rho(A)\text{Var}_\rho(B) - |\text{Re}(\text{Cov}_\rho(A, B))|^2 \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}(\rho[A, B])|^2,$$

ただし $[A, B] := AB - BA$ は A, B の commutator であり、covariance は $\text{Cov}_\rho(A) := \text{Tr}(\rho AB) - \text{Tr}(\rho A)\text{Tr}(\rho B)$ で与えられる。Yanagi-Furuichi-Kuriyama [12] は one parameter correlation と one parameter Wigner-Yanase skew information を次のように定義した。 $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$\text{Corr}_\rho^\alpha(A, B) = \text{Tr}(\rho A^* B) - \text{Tr}(\rho^{1-\alpha} A^* \rho^\alpha B), \quad I_\rho^\alpha(A) = \text{Corr}_\rho^\alpha(A, A).$$

そして彼らは次のようなトレース不等式を得た。

$$I_\rho^\alpha(A)I_\rho^\alpha(B) \geq \left| \text{Re}(\text{Corr}_\rho^\alpha(A, B)) \right|^2.$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ のときはそれぞれ correlation $\text{Corr}_\rho(A, B)$, Wigner-Yanase skew information $I_\rho(A)$ である。また Luo [10] は不確定性を表す量として

$$U_\rho(A) = \sqrt{\text{Var}_\rho(A)^2 - (\text{Var}_\rho(A) - I_\rho(A))^2}.$$

を導入して, $U_\rho(A)$ についての Heisenberg 型の不等式の拡張を得た.

$$U_\rho(A)U_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}(\rho[A, B])|^2.$$

Wigner-Yanase-Dyson skew information の凸性は, 量子力学分野で長く問題として与えられていたが, Lieb [9] によって証明された. これは $\varphi(A, B) = \text{Tr}A^\rho K^* B^{1-\rho} K$ で定義された写像 $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ が同時凹であることを示すことによって証明された. ただし $M_n(\mathbb{C})$ は $n \times n$ complex matrices の全体とする. 以下この報告で用いられる記号等を導入する. $M_{n,sa}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ self-adjoint matrices の全体, $M_{n,+}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ positive semi-definite matrices の全体, $M_{n,+1}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ density matrices の全体とする. $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $\text{Tr}[A]$ は次の性質をもつことに注目する.

- (1) $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ (2) $A \geq 0 \implies \text{Tr}(A) \geq 0$ (3) $\text{Tr}(A^*) = \overline{\text{Tr}(A)}$
(4) $\text{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{Tr}(A) + \beta \text{Tr}(B)$ for all $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (5) $\text{Tr}(A)\text{Tr}(B) = \text{Tr}(B)\text{Tr}(A)$

2 UR for Non-Tracial Positive Linear Maps

通常の Trace の拡張となる写像 $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_m(\mathbb{C})$ で次の条件を満たすものを考える.

- (1) $\Phi(AB) = \Phi(BA)$ (2) $A \geq 0 \implies \Phi(A) \geq 0$ (3) $\Phi(A^*) = \Phi(A)^*$
(4) $\Phi(\alpha A + \beta B) = \alpha \Phi(A) + \beta \Phi(B)$ for all $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

特に (1) が成り立たない場合は Non-Tracial という. 次の Lemma が知られている.

Lemma 2.1 $A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$ で $A > 0, B > 0$ とする. このとき次の (1)~(3) は同値である.

$$(1) \begin{pmatrix} A & X \\ X^* & B \end{pmatrix} \geq 0 \quad (2) A \geq XB^{-1}X^* \quad (3) B \geq X^*A^{-1}X$$

Definition 2.1 $A, B \in M_n(\mathbb{C}), \rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ とする. また h を ρ のスペクトルを含む区間上で定義される *real-valued function* とするとき, 次のように定義する.

$$\text{Var}_{\rho,\Phi}^h(A) = \Phi(h^{1/2}A^*Ah^{1/2}) - \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}),$$

$$\text{Cov}_{\rho,\Phi}^h(A, B) = \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*Bh^{\frac{1}{2}}) - \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}}),$$

ただし $h(\rho)^{\frac{1}{2}}$ を省略して $h^{\frac{1}{2}}$, また $\Phi(h(\rho))^{-1}$ を省略して Φ^{-1} とそれぞれ書くことにした.

Theorem 2.1 $A, B \in M_n(\mathbb{C}), \rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} \text{Var}_{\rho,\Phi}^h(A) & \text{Cov}_{\rho,\Phi}^h(A, B) \\ \text{Cov}_{\rho,\Phi}^h(B, A) & \text{Var}_{\rho,\Phi}^h(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Proof.

$$0 \leq \begin{pmatrix} h^{\frac{1}{2}}A^* & 0 & 0 \\ h^{\frac{1}{2}}B^* & 0 & 0 \\ h^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ah^{\frac{1}{2}} & Bh^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^{\frac{1}{2}}A^*Ah^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}}A^*Bh^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}} \\ h^{\frac{1}{2}}B^*Ah^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}}B^*Bh^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}}B^*h^{\frac{1}{2}} \\ h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}} & h(\rho) \end{pmatrix}.$$

Φ の three-positivity property より,

$$\begin{pmatrix} \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*Bh^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}}) \\ \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*Bh^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*h^{\frac{1}{2}}) \\ \Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h(\rho)) \end{pmatrix} \geq 0.$$

よって

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*Bh^{\frac{1}{2}}) \\ \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*Bh^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} \\ & \geq \begin{pmatrix} \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}}) \\ \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*h^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} \Phi^{-1} \begin{pmatrix} \Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}}) \\ \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} Var_{\rho, \Phi}^h(A) & Cov_{\rho, \Phi}^h(A, B) \\ Cov_{\rho, \Phi}^h(B, A) & Var_{\rho, \Phi}^h(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

□

Theorem 2.2 (Heisenberg Type) $\Phi(M_n(\mathbb{C}))$ が可換のとき, すなわち 任意の $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $\Phi(A)\Phi(B) = \Phi(B)\Phi(A)$ が成り立つとする. このとき任意の $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, 任意の $\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ および ρ のスペクトルを含む区間上で定義された任意の *positive real-valued continuous function* h に対して次が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} Var_{\rho, \Phi}^h(A) & \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) \\ -\frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) & Var_{\rho, \Phi}^h(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Theorem 2.3 (Schrödinger Type) *Theorem 2.2* と同じ条件のもとで次が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} Var_{\rho, \Phi}^h(A) & \operatorname{Re}\{Cov_{\rho, \Phi}^h(A, B)\} + \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) \\ \operatorname{Re}\{Cov_{\rho, \Phi}^h(A, B)\} - \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) & Var_{\rho, \Phi}^h(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Proofs of Theorem 2.2 and 2.3.

$$\begin{aligned}
& Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B) - Cov_{\rho,\Phi}^h(B, A) \\
&= \Phi(h^{\frac{1}{2}}ABh^{\frac{1}{2}}) - \Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}}) - \Phi(h^{\frac{1}{2}}BAh^{\frac{1}{2}}) + \Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}) \\
&= \Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) \quad (\Phi(M_n(\mathbb{C})) \text{ の commutativity を用いる}) \\
&= 2i\text{Im}\{Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)\}.
\end{aligned}$$

$$Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B) + Cov_{\rho,\Phi}^h(B, A) = 2\text{Re}\{Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)\}$$

したがって

$$2Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B) = \Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) + 2\text{Re}\{Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)\}.$$

よって

$$|Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)|^2 = |\text{Re}\{Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)\}|^2 + \frac{1}{4}|\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}})|^2.$$

Theorem 2.1 より

$$Var_{\rho,\Phi}^h(A) \geq Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)Var_{\rho,\Phi}^h(B)^{-1}Cov_{\rho,\Phi}^h(B, A).$$

ここで $\Phi(M_n(\mathbb{C}))$ は commutative であるので

$$Var_{\rho,\Phi}^h(A) \cdot Var_{\rho,\Phi}^h(B) \geq |Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)|^2 = |\text{Re}\{Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)\}|^2 + \frac{1}{4}|\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}})|^2.$$

したがって

$$\begin{aligned}
& Var_{\rho,\Phi}^h(A) \\
&\geq \left(|\text{Re}\{Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)\}|^2 + \frac{1}{4}|\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}})|^2 \right) (Var_{\rho,\Phi}^h(B))^{-1} \\
&= \left((\text{Re}\{Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)\})^2 - \frac{1}{4}(\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}))^2 \right) (Var_{\rho,\Phi}^h(B))^{-1} \\
&\quad (\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}})^* = -\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) \text{ を用いる}) \\
&= \left(\text{Re}\{Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)\} + \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) \right)^* (Var_{\rho,\Phi}^h(B))^{-1} \\
&\quad \left(\text{Re}\{Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)\} - \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) \right). \\
&\quad (\Phi(M_n(\mathbb{C})) \text{ の commutativity を用いる})
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\left(\begin{array}{cc} Var_{\rho,\Phi}^h(A) & \text{Re}\{Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)\} + \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) \\ \text{Re}\{Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B)\} - \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) & Var_{\rho,\Phi}^h(B) \end{array} \right) \geq 0.$$

これより Theorem 2.3 が示された. また Theorem 2.1 より

$$M = \left(\begin{array}{cc} Var_{\rho,\Phi}^h(A) & -Cov_{\rho,\Phi}^h(B, A) \\ -Cov_{\rho,\Phi}^h(A, B) & Var_{\rho,\Phi}^h(B) \end{array} \right) \geq 0.$$

$\Phi(M_n(\mathbb{C}))$ は commutative であるので

$$N = \begin{pmatrix} \text{Var}_{\rho, \Phi}^h(A) & \text{Cov}_{\rho, \Phi}^h(A, B) \\ \text{Cov}_{\rho, \Phi}^h(B, A) & \text{Var}_{\rho, \Phi}^h(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

ゆえに

$$0 \leq M + N = \begin{pmatrix} 2\text{Var}_{\rho, \Phi}^h(A) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) \\ -\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A, B]h^{\frac{1}{2}}) & 2\text{Var}_{\rho, \Phi}^h(B) \end{pmatrix}.$$

したがって Theorem 2.2 が示された. \square

3 UR for Tracial positive Linear Maps

f, g を $\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ のスペクトル上で定義された real valued functions とする. このとき f, g が次の条件を満たすとき monotone pair であるという. 任意の $x, y \in D$ に対して $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$. ([2, 7])

Definition 3.1 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して, 次のように定義する.

$$I_{\rho, \Phi}^{f,g}(A) = \Phi(f(\rho)g(\rho)A^*A) - \Phi(f(\rho)A^*g(\rho)A),$$

$$\text{Corr}_{\rho, \Phi}^{f,g}(A, B) = \Phi(f(\rho)g(\rho)A^*B) - \Phi(f(\rho)A^*g(\rho)B).$$

Theorem 3.1 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $I_{\rho, \Phi}^{f,g}(A) + I_{\rho, \Phi}^{f,g}(A^*) \geq 0$. 特に, $A \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対しては $I_{\rho, \Phi}^{f,g}(A) \geq 0$.

Proof. Let $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i$ を ρ のスペクトル分解とする. このとき

$$\begin{aligned} & f(\rho)g(\rho)A^2 \\ &= \sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_i A^2 = \sum_{i,j} f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_i A E_j A \\ &= \sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_i A E_i A + \sum_{i < j} f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_i A E_j A + \sum_{i > j} f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_i A E_j A \\ &= \sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_i A E_i A + \sum_{i < j} f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_i A E_j A + \sum_{i < j} f(\lambda_j)g(\lambda_j)E_j A E_i A, \end{aligned}$$

であるので, 次を得る.

$$\begin{aligned} \Phi(f(\rho)g(\rho)A^2) &= \Phi\left(\sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_i A^2\right) \\ &= \Phi\left(\sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_i A E_i A\right) + \Phi\left(\sum_{i < j} f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_i A E_j A\right) + \Phi\left(\sum_{i < j} f(\lambda_j)g(\lambda_j)E_j A E_i A\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)\Phi(E_iAE_iA) + \sum_{i<j} \Phi(\{f(\lambda_i)g(\lambda_i) + f(\lambda_j)g(\lambda_j)\}E_iAE_jA) \\
&\geq \sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)\Phi(E_iAE_iA) + \sum_{i<j} \Phi(\{f(\lambda_i)g(\lambda_j) + f(\lambda_j)g(\lambda_i)\}E_iAE_jA) \\
&= \Phi(f(\rho)Ag(\rho)A). \quad \square
\end{aligned}$$

Definition 3.2 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して次のように定義する.

$$Corr'_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(A, B) = \frac{1}{2}\{Corr_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(A, B) + Corr_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(B^*, A^*)\}, \quad I'_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(A) = \frac{1}{2}\{I_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(A) + I_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(A^*)\}.$$

Theorem 3.2 $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} I_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(A) & Corr'_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(A, B) \\ Corr'_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(B, A) & I_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(A) & \text{Re}\{Corr_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(A, B)\} \\ \text{Re}\{Corr_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(B, A)\} & I_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Proof. $\Psi : M_{2n}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2m}(\mathbb{C})$ を次のように定義する.

$$\Psi\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\Phi(A) + \Phi(D)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき Ψ は tracial positive linear map である. $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \in M_{2n,sa}(\mathbb{C}).$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \Phi(f(\rho)g(\rho)A^*A) + \Phi(f(\rho)g(\rho)AA^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2\Psi\left(\begin{pmatrix} f(\rho)g(\rho) & 0 \\ 0 & f(\rho)g(\rho) \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \\
&\geq 2\Psi\left(\begin{pmatrix} f(\rho) & 0 \\ 0 & f(\rho) \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\rho) & 0 \\ 0 & g(\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Phi(f(\rho)A^*g(\rho)A) + \Phi(f(\rho)Ag(\rho)A^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ゆえに次を得る.

$$\Phi(f(\rho)g(\rho)A^*A) + \Phi(f(\rho)g(\rho)AA^*) \geq \Phi(f(\rho)A^*g(\rho)A) + \Phi(f(\rho)Ag(\rho)A^*).$$

したがって

$$I_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(A) + I_{\rho, \Phi}{}^{f,g}(A^*) \geq 0.$$

□

Corollary 3.1 $\Phi(M_n(\mathbb{C}))$ が可換 のとき, $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$|\operatorname{Re}\{\operatorname{Corr}_{\rho,\Phi}^{f,g}(A, B)\}|^2 \leq I_{\rho,\Phi}^{f,g}(A)I_{\rho,\Phi}^{f,g}(B).$$

Theorem 3.3 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{\Phi(f(\rho)A^*g(\rho)A) + \Phi(f(\rho)Ag(\rho)A^*)\} &\geq \Phi(f(\rho)^{1/2}g(\rho)^{1/2}A^*f(\rho)^{1/2}g(\rho)^{1/2}A) \\ &\geq \Phi(f(\rho)A^*g(\rho))\Phi(f(\rho)g(\rho))^{-1}\Phi(f(\rho)Ag(\rho)). \end{aligned}$$

したがって $A \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して, 次が成り立つ.

$$I_{\rho,\Phi}^{f,g}(A) \leq I_{\rho,\Phi}^{\sqrt{fg},\sqrt{fg}}(A) \leq \operatorname{Var}_{\rho,\Phi}^{fg}(A).$$

Proof. $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i$ を ρ のスペクトル分解とする. ただし $\lambda_i : i = 1, 2, \dots, n$ は real numbers, $E_i : i = 1, 2, \dots, n$ は ortogonal projections で $\sum_{i=1}^n E_i = I$ を満たす. $f(\lambda_i), g(\lambda_j)$ をそれぞれ f_i, g_j と略記する. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \Phi(f(\rho)g(\rho)A^2) & W \\ W & \Phi(f(\rho)g(\rho)B^2) \end{pmatrix} \\ &\quad \text{ただし } W = \Phi(f(\rho)g(\rho)AB) + \Phi(f(\rho)g(\rho)BA), \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A^2) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i AB) \\ \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i BA) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B^2) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A^2) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i AB) \\ \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i AB) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A(\sum_{j=1}^n E_j)A) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A(\sum_{j=1}^n E_j)B) \\ \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B(\sum_{j=1}^n E_j)A) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B(\sum_{j=1}^n E_j)B) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A(\sum_{j=1}^n E_j)A) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B(\sum_{j=1}^n E_j)A) \\ \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A(\sum_{j=1}^n E_j)B) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B(\sum_{j=1}^n E_j)B) \end{pmatrix} \\ &\quad \left(\sum_{j=1}^n E_j = I \text{ より} \right) \\ &= 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i A) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i A) \\ \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i B) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i B) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 2 \sum_{i < j} f_i g_i \Phi(E_i A E_j A) & \sum_{i=1}^n (f_i g_i + f_j g_j) \Phi(E_i A E_j B) \\ \sum_{i < j} f_j g_j \Phi(E_j B E_i A) & 2 \sum_{i < j} f_i g_i \Phi(E_i B E_j B) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 2 \sum_{i < j} f_j g_j \Phi(E_j A E_i A) & \sum_{i < j} (f_i g_i + f_j g_j) \Phi(E_i B E_j A) \\ \sum_{i < j} f_i g_i \Phi(E_i A E_j B) & 2 \sum_{i < j} f_j g_j \Phi(E_j B E_i B) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i A) & \sum_{i < j} f_i g_i \Phi(E_i B E_i A) \\ \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i B) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i B) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 2 \sum_{i < j} \delta_{ij} \Phi(E_i A E_j A) & \sum_{i < j} \delta_{ij} \Delta_{ij} \\ \sum_{i < j} \delta_{ij} \Delta_{ij} & 2 \sum_{i < j} \delta_{ij} \Phi(E_i B E_j B) \end{pmatrix} \\
&\quad (\Phi \text{ は } \textit{tracial} \text{ より}), \\
&\quad \text{ただし } \delta_{ij} = f_i g_i + f_j g_j, \quad \Delta_{ij} = \Phi(E_i A E_j B) + \Phi(E_j A E_i B) \\
&= 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i A) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i A) \\ \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i B) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i B) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{i < j} \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\Phi(E_i A E_j A) & \Delta_{ij} \\ \Delta_{ij} & 2\Phi(E_i B E_j B) \end{pmatrix} \\
&\geq 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i A) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i A) \\ \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i B) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i B) \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{i < j} \begin{pmatrix} \xi_{ij} & 0 \\ 0 & \xi_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\Phi(E_i A E_j A) & \Delta_{ij} \\ \Delta_{ij} & 2\Phi(E_i B E_j B) \end{pmatrix} \\
&\quad (f, g \text{ は } \textit{monotone pair} \text{ より}), \\
&\quad \text{ただし } \xi_{ij} = f_i g_j + f_j g_i \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i A E_j A) & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i B E_j A) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i A E_j B) & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i B E_j B) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i A E_j A) & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i A E_j B) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i B E_j A) & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i B E_j B) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\Phi(f(\rho)g(\rho)A) & V \\ V & 2\Phi(f(\rho)Bg(\rho)A) \end{pmatrix}, \\
&\quad \text{ただし } V = \Phi(f(\rho)Ag(\rho)B) + \Phi(f(\rho)Bg(\rho)A).
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} \Phi(f(\rho)g(\rho)A^2) & \frac{1}{2}W \\ \frac{1}{2}W & \Phi(f(\rho)g(\rho)B^2) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \Phi(f(\rho)Ag(\rho)A) & \frac{1}{2}V \\ \frac{1}{2}V & \Phi(f(\rho)Bg(\rho)B) \end{pmatrix},$$

ゆえに次を得る.

$$\begin{pmatrix} I_{\rho, \Phi}^{f, g}(A) & \operatorname{Re}\{Corr_{\rho, \Phi}^{f, g}(A, B)\} \\ \operatorname{Re}\{Corr_{\rho, \Phi}^{f, g}(A, B)\} & I_{\rho, \Phi}^{f, g}(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

□

Corollary 3.2 $\rho \in M_{n,+}(\mathbb{C})$, $A \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して, 次が成り立つ.

$$I_{\rho, \Phi}^{\alpha}(A) \leq I_{\rho, \Phi}^{1/2}(A) \leq \operatorname{Var}_{\rho, \Phi}(A).$$

Acknowledgement The author was partially supported by JSPS KAKENHI 19K03525. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

- [1] T. Ando, *Convexity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products*, Linear Algebra Appl. **26** (1979), 203–241.
- [2] J. C. Bourin, *Some inequalities for norms on matrices and operators*, Linear Algebra Appl. **292** (1999), 139–154.
- [3] M. D. Choi and S. K. Tsui, *Tracial positive linear maps of C^* -algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), no. 1, 57–61.
- [4] A. Dadkhah and M. S. Moslehian, *Quantum information inequalities via tracial positive linear maps*, J. Math. Anal. Appl. **447** (2017), no. 1, 666–680.
- [5] A. Dadkhan, M. S. Moslehian and K. Yanagi, *Noncommutative versions of inequalities in quantum information theory*, Analysis and Mathematical Physics, **9**(2019), no. 4, 2151–2169.
- [6] S. Friedland, V. Gheorghiu, and G. Gour, *Universal uncertainty relations*, Phys. Rev. Lett. **111** (2013), 230401.
- [7] J. I. Fujii, *A trace inequality arising from quantum information theory*, Linear Algebra Appl. **400** (2004), 141–146.
- [8] T. Furuta, J. Mićić Hot, J. Pečarić, and Y. Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities. Inequalities for Bounded Self-adjoint Operators on a Hilbert Space*, Element, Zagreb, Croatia, 2005.
- [9] E. H. Lieb, *Convex trace functions and the Wigner–Yanase–Dyson conjecture*, Adv. Math. **11** (1973), 267–288.
- [10] S. Luo, *Heisenberg uncertainty relation for mixed states*, Phys. Rev. A **72** (2005), 042110, pp.3.
- [11] E. Schrödinger, *About Heisenberg uncertainty relation*, Proc. Prussian Acad. Sci. Phys. Math. Section **XIX** (1930), p.293.
- [12] K. Yanagi, S. Furuichi, and K. Kuriyama, *A generalized skew information and uncertainty relation*, IEEE Trans. Info. Theory **51** (2005), 4401–4404.