Stokes 方程式の初期値問題に対する BMO 最大正則性について

小川卓克 (東北大・理/数理科学連携研究センター) [1]

1. 放物型偏微分方程式の初期値問題と最大正則性

1.1. 放物型方程式の最大正則性. Banach 空間 X において次の抽象発展方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f, & t \in I, \\ \quad u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \tag{AC}$$

ここで $u = u(t)$ は $I \to X$ に値を取る時間変数 $t \in I$ の函数であり, $I = (0, T)$ は $T \le \infty$ とした時間区間, A は X 上の閉作用素であり, 具体的には X を Lebesgue 空間 $L^p(\mathbb{R}^n)$ に定めた際の 2 階楕円形作用素などを表す. 初期値問題 (AC) に対する最大正則性とは外力 f を Bochner 空間 $L^\rho(I; X)$ に与えたときに解 u が得うる最大の正則性を不等式の形で示したものである. A の X 上での定義域を $D(A)$ とおき, $B(X)_{\theta,1-1/\rho} \equiv \big(X, D(A)\big)_{\theta,1-1/\rho}$ を X との実補間空間とすれば最大正則性は $1 \le \rho \le \infty$ にたいして

$$\Big\|\frac{du}{dt}\Big\|_{L^\rho(I;X)} + \|Au\|_{L^\rho(I;X)} \le C_M\big(\|u_0\|_{B(X)_{\theta,1-1/\rho}} + \|f\|_{L^\rho(I;X)}\big) \tag{MR}$$

で与えられることとなる. ここで C_M は f, u_0 に依存しない定数である. これは方程式の右辺である外力と同一の正則性（可積分性) を左辺の各項が保つことを意味しており, 双曲型偏微分方程式の初期値問題のごとく, 左辺の各項の特異性をキャンセルして方程式が成り立っていると言うことが起こらないことを意味する. この評価は Laplace 変換を通じて定常問題の楕円形正則性評価である, いわゆる楕円形 L^p 評価と結びつき, Laplace 変換を通じた発展方程式の一般論に対する強力な主張を誘導する ([1], [3], [15]-[18], [24], [30], [58]).

とりわけ Banach 空間 X が無条件 martingale 差型 (Uniconditional Martingale Differences, 以下 UMD と呼ぶ) Banach 空間である場合, 時間指数が $1 < \rho < \infty$ であれば最大正則性評価 (MR) は無限次元空間 X における Hölmander-Mikhlin 型の Fourier かけ算作用素に関わる $L^\rho(I)$ 有界性により与えられる. すなわち最大正則性成立の必要十分条件は作用素 A の resolvent の族 $T_1(\tau) \equiv A(\tau + A)^{-1}$ と $T_2 = \tau\partial_\tau A(i\tau + A)^{-1}$ $(\tau \ne 0)$ に対する $\mathcal{R}$-有界性が成り立つこと, すなわちある $C > 0$ が存在して, 任意の $\{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_N\} \subset \mathbb{R}$ と $\{u_1, u_2 \cdots, u_N\} \subset X$ に対して $\{r_j\}_{j=1}^\infty$ を Rademacher 直交系として,

$$\int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^N r_j(t) T_\ell(\tau_j) u_j\Big\|_X^\rho dt \le C \int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^N r_j(t) u_j\Big\|_X dt$$

が $\ell = 1, 2$ に対して成り立つと同値であることが知られており (Weis [58]), X が UMD の枠組みでは初期値問題はもとより初期値境界値問題など多くの問題に有効な評価 (MR) が直ちに導かれることとなる.

---

[1]本研究は日本学術振興会科学研究費補助金, 基盤研究 S #19H05597 の支援を受けている.

他方, X が UMD であれば必然的に回帰的となるため (Rubio de Francia [53], cf. Amann [1]) 非回帰的な Banach 空間では UMD とならない. したがって非回帰的 Banach 空間上での最大正則性の成立は各論に依るところとなる. 特に L^1 などの空間では最大正則性の非成立が知られており, 斉次 Besov 空間 $\dot{B}^s_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ (Danchin [12], [13], [14], Ogawa-Shimizu [44], [45], [46]) modulation 空間 $M^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ (Iwabuchi [25]), Fourier-Sobolev 空間 $\widehat{\dot{H}}{}^s_p(\mathbb{R}^n)$ (Iwabuchi-Takada [27]), あるいは Radon 測度の Fourier 像の空間 $\mathcal{FM}(\mathbb{R}^n)$ (Giga-Saal [23]) と言った空間での最大正則性の成立が示されている. こうした背景の上で, 以下では非回帰的 Banach 空間の例の一つである有界平均振動のクラス $BMO(\mathbb{R}^n)$ における, 熱方程式の初期値問題, 及び Stokes 方程式の初期値問題に対する最大正則性について議論する. なおここで取り上げた空間とはわずかに異なる空間における BMO 最大正則性が Auscher-Frey [2] によって議論されている.

1.2. 非圧縮性粘性流体方程式の臨界適切性. 有界平均振動 $BMO(\mathbb{R}^n)$ における最大正則性を議論する動機として以下の流体の運動方程式の適切性の問題が挙げられる. 非圧縮性粘性流体のダイナミクスを記述する運動方程式として Navier-Stokes 方程式が知られている. 流体の流速を $u(t,x)$: $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3, \cdots)$ 圧力を $p(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ としたときこれらを未知関数とする非圧縮性流体の運動は以下の Navier-Stokes 方程式で記述される:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad \operatorname{div} u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,y) = u_0(y), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

流体方程式の実学上の応用に際しては, 有界領域や半空間, あるいは外部領域などそれぞれの問題に適した, 領域を設定して考察することが重要であり, 実際のモデルにおいてはそこから様々な現象が導かれるが, そうした問題の基本となるべきやや理想的な設定が上記の問題に初期条件のみを与える初期値問題を考察することである.

Navier-Stokes 方程式にはその解を不変にする伸長作用 (以下スケーリングと呼ぶ) が存在する. すなわち仮に (u,p) が問題 (1.1) の方程式部分のみを満たすものとすると, 次のスケール変換により与えられた新しい函数の組み (u_λ, p_λ)

$$\begin{cases} u(t,y) \to u_\lambda(t,x) \equiv \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \\ p(t,y) \to p_\lambda(t,x) \equiv \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x). \end{cases} \quad \lambda > 0, \tag{1.2}$$

は再び問題 (1.1) の方程式を満たす, すなわちスケール変換 (1.2) は Navier-Stokes 方程式を不変に保ち, この変換で不変となる函数空間, 特に問題 (1.1) の軟解 (積分方程式を Bochner 空間で満たす解) を得るのに自然な Bochner 空間のクラス $L^\rho\big(\mathbb{R}_+; \dot{H}^s_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\big)$ では, 指数の組みが

$$\frac{2}{\rho} + \frac{n}{p} = 1 + s$$

を満たすとき, 不変スケール (1.2) によりその norm が不変となる臨界空間となる. Fujita-Kato による著名な結果 [21] に従えば, こうしたクラスでの可解性の議論が重要である. このような空間で考察することにより初期値問題の初期条件の大きさに依存しない時間局所的な可解性と, 初期条件の小ささを仮定した上での時間大域的な可解性を同時に得ることができるからである.

発展方程式論の立場からは，$\rho=\infty$ と選んで初期条件と各時刻における解の属する空間を同一に取る制約 (解の連続性・統徹性) をおくと可微分性と可積分性を表す指数に対して以下の条件が課される:

$$s_c=-1+\frac{n}{p}.$$

これにより考えるべき函数空間は Sobolev 空間であれば $\dot{H}_2^{-1+\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ あるいは Lebesgue 空間であれば $L^n(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ であることがわかる. この方針に基づいて, 解の存在する基礎空間を Sobolev 空間 $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ (Fujita-Kato [21]) や $L^n(\mathbb{R}^n)$ (Kato [32]) に選ぶ, あるいはより広い空間である斉次 Besov 空間 $\dot{B}^s_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ (Cannone [8], Cannone-Planchon [9], Planchon [50], 定義は [4] 参照) や Morrey 空間 (Giga-Miyakawa [22]), あるいは Morrey-Besov 空間 (Kozono-Yamazaki [35]) に拡張する試みが続けられてきた.

このように解の属する空間をスケール不変性を維持しながら拡大したいと言う意図は, スケール不変性を保つ空間で解を構成することにより, 多くの場合に解の正則性を伴うことができるため, 古典解や強解といった取り扱いの比較的容易な解を見いだすことが自然にできるという点がある. 上記のスケール不変則 (1.2) の観察によりたとえば空間 2 次元のユークリッド空間における初期値問題は流速の臨界空間が $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ であることと, 解の L^2norm が流速の運動エネルギーの有限性:

$$\|u(t)\|_2^2+2\int_0^t\|\nabla u(s)\|_2^2ds\le\|u_0\|_2^2$$

(ただし $\|\cdot\|_2$ は $\mathbb{R}^2$ 上の L^2-norm を表す) により時間大域的な強解の存在が導かれる. こうした解空間 X の拡大は最終的に Koch-Tataru [33] によりなされ, 小さい初期値に対して

$$C\big([0,\infty);BMO^{-1}_{\mathrm{u}loc}(\mathbb{R}^3)\big)\cap C\big((0,\infty);L^\infty(\mathbb{R}^3)\big)$$

でその適切性が示されている (cf. Iwabuchi-Nakamura [26]). また斉次 Besov 空間での端点指数空間 $\dot{B}^{-1}_{\infty,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ $(1\le\sigma\le\infty)$ での初期値への連続性が破綻する非適切性の結果が知られている (Bourgain-Pavlovicz [7], Wang [56], Yoneda [59]). 以上のように, 非圧縮性粘性流体に対する Navier-Stokes 方程式の初期値問題について, 有界平均振動のクラスが, その臨界適切性と密接に関わることが知られており, そうしたクラスでの最大正則性を議論しておくことは関連する問題を考察する上では重要な役割を演ずることが期待される.

1.3. 移流拡散方程式の臨界適切性と特異極限. $BMO(\mathbb{R}^n)$ における最大正則性を示すもう一方の動機として半導体などを記述する移流拡散方程式 (Mock [38]) あるいは, タマホコリカビなどの走化性を持つ粘菌のダイナミクスを記述する運動方程式として Patlak-Keller-Segel 方程式の初期値問題の適切性があげられる ([31], [49]). 粘菌の密度を $u(t,x)$: $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ $(n=2,3,\cdots)$ 化学 (電気) ポテンシャルを $\psi(t,x):\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ としたときこれらを未知関数とする粘菌の運動は以下の方程式で記述される:

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+\kappa\nabla\cdot(u\cdot\nabla\psi)=0, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n,\\ \tau^{-1}\partial_t\psi-\Delta\psi=u, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n,\\ \qquad u(0,x)=u_0(y),\quad \psi(0,x)=\psi_0(x) & \qquad x\in\mathbb{R}^n,\end{cases}\tag{1.3}$$

ここで $\tau > 0$ は緩和時間パラメーターで, ポテンシャルのダイナミクスが粘菌のそれに比べて著しく遅い場合には, $\tau \to \infty$ の極限を考えることとなる．また κ は系の誘引系か反発系かを区別するパラメータで, $\kappa = 1$ の場合走化性モデルのような誘引系をまた $\kappa = -1$ の場合は半導体モデルのごとく反発系を表す.

このモデルにもスケール不変性が備わり, 以下のスケール変換で方程式は不変となる:

$$\begin{cases} u(t,y) \to u_\lambda(t,x) \equiv \lambda^2 u(\lambda^2 t, \lambda x), \\ \psi(t,y) \to \psi_\lambda(t,x) \equiv \psi(\lambda^2 t, \lambda x). \end{cases} \qquad \lambda > 0, \tag{1.4}$$

したがって対応する不変空間は指数

$$\frac{2}{\rho} + \frac{n}{p} = 2 + s$$

特に $\rho = \infty$ の場合

$$s_c = -2 + \frac{n}{p}$$

となる．ψ のほうについては

$$\frac{2}{\rho} + \frac{n}{p} = 0 + s$$

となり $\rho = \infty$ の場合,

$$s_c = \frac{n}{p}$$

を与える．このとき密度 u の不変空間としては $H_p^{-2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ あるいは $\dot{B}_{p,\sigma}^{-2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ などが考えられるが, とりわけ可微分指数 $s = 0$ となる, $p = \frac{n}{2}$ の場合に興味がある．これは Keller-Segel 系の主なモデルが空間次元 $n = 2$ に限られるからであり, さらに初期値に正値性を仮定することにより, 系の総質量である $\|u(t)\|_1$ が保存されて初期値のそれ $\|u_0\|_1$ と一致することとなるが, $n = 2$ ではこの量が scaling 不変量となるためである．そして初期総質量の大きさにより解が有限時刻で爆発するか時間大域的に存在するかの閾値 8π が与えられる ([5], [6], [11], [28], [39], [41], [57])．このときポテンシャルに対する不変スケールは $\|\psi(t)\|_\infty$ となるわけではあるが, 楕円形正則性の端点評価に対応し, 一般に $\psi(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ は $\tau \to \infty$ の場合に期待できず, 最大でも $\psi(t) \in BMO(\mathbb{R}^2)$ が得られる限界となる．したがって $\tau \to \infty$ などのような特異摂動を考察する上では正則性の議論に有界平均振動のクラスが自然に導入される (Kozono-Sugiyama-Yahagi [34], Kurokiba-Ogawa [37] see also [43]).

2. BMO 空間と Chmin-Lerner 型空間

2.1. 有界平均振動のクラス. 以下で BMO に属す函数のいくつかの性質を概観し, BMO と同値な norm を列挙する.

<u>定義</u> $\mathbb{R}^n$ 上の可測函数 f が 有界平均振動のクラス $BMO(\mathbb{R}^n)$ に属すとは

$$\|f\|_{BMO} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n, R>0} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x)} \left| f(y) - \bar{f}_{B_R(x)} \right| dy < \infty,$$

ここで $\bar{f}_{B_R(x)}$ は f の球 B_R 上の平均:

$$\bar{f}_{B_R(x)} = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x)} f(y) dy.$$

上記の定義による $\|\cdot\|_{BMO}$ はすべての定数に対して 0 となるので, semi-norm となる．このため函数解析的な整合性を得るには $BMO(\mathbb{R}^n)$ に定数差を法とする商空間を導入して norm となる．このとき $BMO(\mathbb{R}^n)$ は Banach 空間となる．

$BMO(\mathbb{R}^n)$ に属す典型的な函数は $\log|x|$ である．このことから $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq BMO(\mathbb{R}^n)$ となる．

以下で BMO の semi-norm の同値表現について言及する．まず平均差分は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B_R|^2}\int_{B_R}|f(x)-f(y)|^2dxdy \leq& 4\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|f(x)-\overline{f_{B_R}}|^2dx \\
=&4\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|f(x)|^2dx - 2\overline{f_{B_R}}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}f(x)dx + \overline{f_{B_R}}^2\right) \\
=&4\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|f(x)|^2dx - |\overline{f_{B_R}}|^2\right) \\
\leq& 4\frac{1}{|B_R|^2}\int_{B_R}|f(x)-f(y)|^2dxdy
\end{aligned}$$

と表されることから

$$\|f\|_{BMO} \simeq \sup_{x_0,R>0}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|f(x)|^2dx - \overline{f_{B_R}}|^2\right)$$

である．さらに $0 < c \leq 1 \leq C$ に対して

$$c\chi_{B_{R/2}}(x-x_0) \leq \eta_R(x) \leq C\chi_{B_R}(x-x_0) \tag{2.1}$$

を満たすなめらかな cut-off 函数 $\eta_R(x)$ を考える．ここで $\chi_A(x)$ は A 上に台を持つ特性関数を表すものとする．

$$c|B_{R/2}| \leq \|\eta_R\|_1 \leq C|B_R|$$

である．以下簡単のために $c = C = 1$ とする．このとき明らかに

$$|B_{R/2}| \leq \|\eta_R\|_2^2 \leq \|\eta_R\|_1 \leq |B_R| \tag{2.2}$$

が成り立つ．このとき (2.2) より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n|B_{R/2}|}\int_{B_{R/2}(x_0)}|f(x)-\bar{f}_{B_R}|^2dx =& \frac{1}{|B_R|}\int_{B_{R/2}(x_0)}|f(x)-\bar{f}_{B_R}|^2dx \\
\leq& \frac{1}{\|\eta_R\|_1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)-\bar{f}_B|^2\eta_R(x)dx \\
\leq& \frac{1}{|B_{R/2}|}\int_{B_R(x_0)}|f(x)-\bar{f}_{B_R}|^2dx \leq 2^n\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|f(x)-\bar{f}_{B_R}|^2dx.
\end{aligned}$$

従って (2.1)-(2.2) の設定で以下が成り立つ．

補題 2.1. $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき

$$(2^{\frac{n}{2}})^{-1}\|f\|_{BMO} \leq \sup_{x_0,R>0}\left(\frac{1}{\|\eta_R\|_1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)-\bar{f}_B|^2\eta_R(x)dx\right)^{1/2} \leq 2^{\frac{n}{2}}\|f\|_{BMO}$$

が成り立つ．

命題 2.2. 任意の $1 \le p < \infty$ と $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\|f\|_{BMO_p} \equiv \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} \left(\frac{1}{|B_R|^2} \iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)} |f(x)-f(y)|^p dxdy \right)^{1/p}$$

としたとき，　ある定数 $C>0$ が存在して

$$C^{-1}\|f\|_{BMO} \le \|f\|_{BMO_p} \le C\|f\|_{BMO}$$

が成り立つ.

命題 2.2 の証明. $1 \le p < \infty$ を任意に固定する. 後述の古典的な John-Nirenberg 評価 (4.1) から

$$\|f\|_{BMO} \simeq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - \overline{f_{B_R}}|^p dx \right)^{1/p}$$

となることが知られている. 従って

$$\|f\|_{BMO_p} \simeq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - \overline{f_{B_R}}|^p dx \right)^{1/p}$$

を示せば良い. ❑

これは以下の評価から従う:

補題 2.3. $1 \le p < \infty$ に対して $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ とする. このとき

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - \overline{f(x_0)}_{B_R}|^p dx \right)^{1/p} \le& \left(\frac{1}{|B_R|^2} \iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)} |f(x)-f(y)|^p dxdy \right)^{1/p} \\ \le& 2\left(\frac{}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} |f(x) - \overline{f(x_0)}_{B_R}|^p dx \right)^{1/p}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで

$$\overline{f(x_0)}_{B_R} = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} f(y)dy$$

は f の $B_R(x_0)$ での積分平均.

補題 2.3 の証明. $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$ として $1 \le p < \infty$ に対して,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} \left|f(x) - \overline{f(x_0)}_{B_R}\right|^p dx =& \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} \left(\sum_{k=1}^n \left(f_k(x) - \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} f_k(y)dy \right)^2 \right)^{p/2} dx \\ =& \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} \big(f_k(x) - f_k(y)\big)dy \right)^2 \right)^{p/2} dx \\ & \text{(内側の } y \text{ 積分で Cauchy-Schwartz の不等式を用いて)} \\ \le& \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} \big(f_k(x) - f_k(y)\big)^2 dy \right)^{p/2} dx\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\big|f(x)-f(y)\big|^2dy\right)^{p/2}dx$$

(再び内側の y 積分で $p/2$-$p/(p-2)$ の Hölder の不等式を用いて)

$$=\frac{1}{|B_R|^2}\int_{B_R(x_0)}\int_{B_R(x_0)}\big|f(x)-f(y)\big|^p dxdy.$$

他方後半の不等式は三角不等式から

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B_R|^2}\int_{B_R(x_0)}\int_{B_R(x_0)}\big|f(x)-f(y)\big|^p dxdy\right)^{1/p}\\
&=\left(\frac{1}{|B_R|^2}\int_{B_R(x_0)}\int_{B_R(x_0)}\big|f(x)-\overline{f(x_0)}+\overline{f(x_0)}-f(y)\big|^p dxdy\right)^{1/p}\\
&\leq\left(\frac{1}{|B_R|^2}\int_{B_R(x_0)}\int_{B_R(x_0)}\big|f(x)-\overline{f(x_0)}\big|^p dxdy\right)^{1/p}\\
&\quad+\left(\frac{1}{|B_R|^2}\int_{B_R(x_0)}\int_{B_R(x_0)}\big|\overline{f(x_0)}-f(y)\big|^p dxdy\right)^{1/p}\\
&=\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\big|f(x)-\overline{f(x_0)}_{B_R}\big|^p dx\right)^{1/p}\\
&\quad+\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\big|\overline{f(x_0)}_{B_R}-f(y)\big|^p dy\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

❑

BMO の norm における ball は cube に置き換えることができる．これはあとで用いる Calderon-Zygmund 分解を適用する上で有益である．

補題 2.4. $Q_R(x_0)$ を中心 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 一辺が $2R$ の n-次元超立方体 *(hyper-cube)* とする．

$$|||f|||_{BMO}^2 \equiv \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n, R>0}\left(\frac{1}{|Q_R|}\int_{Q_R(x_0)}|f-\overline{f_{Q_R(x_0)}}|^2dx\right)$$

とおいたとき

$$\|f\|_{BMO}\simeq |||f|||_{BMO}$$

で同値な *norm* となる．

補題 2.4 の証明. $B_R(x_0)\subset Q_R(x_0)$ に対して, それを囲う同じ中心の ball $B_{2^{n/2}R}(x_0)=B_{R'}(x_0)$ を考える．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|f(x)-\overline{f_{B_R}}|^2dx \leq&\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}|f(x)-f(y)|^2dxdy\\
\leq&\frac{|Q_R|^2}{|B_R|^2}\frac{1}{|Q_R|^2}\int_{Q_R(x_0)\times Q_R(x_0)}|f(x)-f(y)|^2dxdy\\
=&\left(\frac{(2R)^{2n}}{(\omega_n/n)^2R^{2n}}\right)^2\frac{1}{|Q_R|^2}\int_{Q_R(x_0)\times Q_R(x_0)}|f(x)-f(y)|^2dxdy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(n2^n)^4}{(\omega_n)^4}\frac{1}{|Q_R|^2}\int_{Q_R(x_0)\times Q_R(x_0)}|f(x)-f(y)|^2dxdy\\
&\le\frac{(n2^n)^4}{(\omega_n)^4}\frac{|B_{R'}|^2}{|Q_R|^2}\frac{1}{|B_{R'}|^2}\int_{B_{R'}(x_0)\times B_{R'}(x_0)}|f(x)-f(y)|^2dxdy\\
&=\frac{|B_{R'}|^2}{|B_R|^2}\frac{1}{|B_{R'}|^2}\int_{B_{R'}(x_0)\times B_{R'}(x_0)}|f(x)-f(y)|^2dxdy\\
&=2^n\frac{1}{|B_{R'}|^2}\int_{B_{R'}(x_0)\times B_{R'}(x_0)}|f(x)-f(y)|^2dxdy.
\end{aligned}
$$

上記の不等式の各辺で $x_0\in\mathbb{R}^n$ と $R>0$ についての上限をとれば良い. ❑

定義 $C_0(\mathbb{R}^n)$ の $\|\cdot\|_{BMO}$ による完備化を vanishing mean oscillation と呼び $VMO(\mathbb{R}^n)$ と記す.

$VMO(\mathbb{R}^n)\subset BMO(\mathbb{R}^n)$ だが実は $VMO(\mathbb{R}^n)\subsetneq BMO(\mathbb{R}^n)$ である.

命題 2.5. $VMO=VMO(\mathbb{R}^n)=\overline{C_0(\mathbb{R}^n)}^{BMO}$ とおく.

(1) 任意の $f\in VMO$ とほとんどいたるところの $x\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$
\lim_{R\to\infty}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x)}|f-\bar{f}_R|dx=0, \tag{2.3}
$$

$$
\lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x)}|f-\bar{f}_R|dx=0. \tag{2.4}
$$

ここで $\bar{f}_R$ は f の *ball* $B_R(x)$ 上での積分平均:

$$
\bar{f}_R=\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x)}f(y)dy.
$$

(2) $VMO(\mathbb{R}^n)\subset vmo(\mathbb{R}^n)$.

実際命題 2.5 の (2.3) を用いると $\log|x|\notin VMO(\mathbb{R}^n)$ が示される. 他方, $(\mathcal{H}^1)^*=BMO(\mathbb{R}^n)$ かつ $VMO(\mathbb{R}^n)^*=\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ (Fefferman-Stein [19]) より $VMO(\mathbb{R}^n)$, $BMO(\mathbb{R}^n)$ のいずれも回帰的ではなく, したがって UMD ではない.

2.2. **Koch-Tataru の空間.** Koch-Tataru は BMO^{-1}_{uloc} に対する, caloric extention の表現を用いて非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の可解性を議論したことにある. 要点は以下の表現を導入した点にある:

$$
\|f\|_{BMO^{-1}_{\mathrm{uloc}}}\equiv\sup_{x\in\mathbb{R}^n,0\le R\le 1}\left(\frac{1}{|B_R(x)|}\int_0^{R^2}\int_{B_R(x)}|e^{t\Delta}f(x)|^2dxdt\right)^{1/2}<\infty. \tag{2.5}
$$

そして解を

$$
|\!|\!|f|\!|\!|\equiv\sup_{t<T}t^{1/2}\|e^{t\Delta}f\|_\infty+\|f\|_{BMO^{-1}_{uloc}}
$$

でとらえようとしている. ここで第一項の効果は

$$
\sup_{t<T}t^{1/2}\|e^{t\Delta}f\|_\infty\simeq\|f\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}
$$

であるので $BMO^{-1}_{\mathrm{uloc}} \subset B^{-1}_{\infty,\infty}$ であることから既知の非適切な解のクラスには抵触しない.

ここで注意が必要なのは $T \le 1$ に制限されていることであって, これは通常の BMO の定義である

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{R>0} \left(\frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} |f - \bar{f}_{B_R}|^p dx \right)^{1/p}.$$

との関係が異なり, 集合としては広い空間となる. John-Nirenberg の定理から上の定義において指数 p は $1 \le p < \infty$ で自由に選んで互いに同値となる. そのためとりわけ $p = 2$ と選ぶと相性がよい.

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{R>0} \left(\frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} |f - \bar{f}_{B_R}|^2 dx \right)^{1/2}.$$

同値な semi-norm として Frazier-Jawerth [20] による以下の定義が挙げられる.

<u>定義</u> ([20]). $1 \le q < \infty$ とする. $f \in \dot{\mathcal{F}}^s_{\infty,q}$ であるとは

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{F}}^s_{\infty,q}} \equiv \sup_{k\in\mathbb{Z}, x_0\in\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j\ge k} \frac{1}{|B_{2^{-k}}|} \int_{B_{2^{-k}}(x_0)} \left|2^{sj}\phi_j * f(x)\right|^q dx \right)^{1/q} < \infty.$$

のとき. ここで $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は Littlewood-Paley 2 進単位分解, $B_{2^{-k}}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < 2^{-k}\}$ は n 次元球をあらわす.

この定義による Lizorkin-Triebel 空間 $\dot{\mathcal{F}}^s_{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$ は有界平均振動のクラスである BMO と同値な空間であることがわかる. 定義をよく見ると, modified Lizorkin-Triebel 空間 $\dot{\mathcal{F}}^0_{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$ の semi-norm は以下と同値であることが予想される:

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{\mathcal{F}}^0_{\infty,2}} &\equiv \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n} \sup_{R>0} \left(\sum_{j\le \log_2 R} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} \int_{2^j}^{2^{j+1}} |\psi_j * f(x)|^2 dtdx \right)^{1/2} \\ &\simeq \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n} \sup_{R>0} \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} \int_0^{R^2} |\nabla e^{t\Delta}(x) f|^2 dtdx \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

ここで $\psi_j = t^{1/2}\nabla G_t|_{t=2^{-j}}$ は熱核の微分で, L-T 分解と概直交な疑似 L-P 分解である. このとき形式的に $f \to |\nabla|^{-1} f$ と変換してパラメータ $R > 0$ を $R \le 1$ に制限したものは

$$\|f\|_{\widetilde{\dot{\mathcal{F}}^{-1}_{\infty,2}}} \equiv \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<R\le 1} \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} \int_0^{R^2} |\sqrt{t} e^{t\Delta} f(x)|^2 \frac{dt}{t} dx \right)^{1/2}$$

となり, これが Koch-Tataru の用いた定義 (2.5) に相当する.

2.3. BMO と **Chemin-Lerner 空間.** Chemin-Lerner [10] は Navier-Stokes 方程式の適切性を議論する上で, Bochner 空間 $L^\rho\big(I; \dot{B}^s_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\big)$ (ただし $1 \le \sigma \le \rho \le \infty$) よりも幾分狭い

$$\widetilde{L^\rho\big(I; \dot{B}^s_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\big)} \subsetneq L^\rho\big(I; \dot{B}^s_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\big),$$

を

$$\|f\|_{\widetilde{L^\rho\left(I;\dot{B}^s_{p,\sigma}\right)}} \equiv \left(\sum_{\mathrm{J}\in\mathbb{Z}} 2^{s\sigma j}\|\phi_j * f\|^\sigma_{L^\rho(I;L^p)}\right)^{1/\sigma} < \infty$$

により導入して, Navier-Stokes 方程式の可解性を示した. 以下ではこれに相当する有界平均振動に関わる空間を定義する.

<u>定義</u> $t>0$ と $x\in\mathbb{R}^n$ について可測函数 $f=f(t,x)$ が $f\in\widetilde{L^2(I;BMO(\mathbb{R}^n))}$ であるとは

$$\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}} \equiv \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n,R>0}\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\big|f(t,x)-f(t,y)\big|^2 dxdydt\right)^{1/2} < \infty.$$

のとき.

ここで定義した norm(semi-norm) は以下の norm と同値となる (命題 4.1 を参照):

$$\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_1)}} \equiv \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n,R>0}\left(\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\big|f(t,x)-f(t,y)\big|dxdy\right)^2 dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Koch-Tataru [33] が得た Navier-Stokes 方程式の初期値問題 (1.1) の解のクラスは

$$u\in C([0,T);BMO^{-1})\cap V$$

で $f\in V$ は

$$\sup_{R>0,x\in\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_0^{R^2}\int_{B_R(x)}|\nabla e^{t\Delta}f|dxdt\right)^{1/2} < \infty$$

特徴付けられる. これは斉次 Besov 空間に対する Chemin-Lerner 空間

$$V\simeq\widetilde{L^2(I;BMO(\mathbb{R}^n))}$$

に対応する. 定義により

$$L^2(I;BMO(\mathbb{R}^n))\subsetneq\widetilde{L^2(I;BMO(\mathbb{R}^n))}$$

であり, 通常の Bochner 空間ではないが,

$$\widetilde{L^2(I;BMO(\mathbb{R}^n))}\simeq BMO(\mathbb{R}^n;L^2(I))$$

と解釈でき, この意味では Bochner 空間と見なせる.

補題 2.6. $f\in\widetilde{L^2(I;BMO)}$ に対して

$$\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}} \simeq \sup_{x_0,R>0}\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{\|\eta_R\|_1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)-\bar{f}_B|^2\eta_R(x)dxdt\right)^{1/2}$$

も成立する.

命題 2.7. $\sigma(t)$ を時間に依存する函数とする．このとき

$$\sup_{x_0,R>0}\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|f(t,x)-\overline{f_{B_R}}|^2dxdt\right)^{1/2}$$
$$\leq \inf_{\sigma(t)}\sup_{x_0,R>0}\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|f(t,x)-\sigma(t)|^2dxdt\right)^{1/2}$$

が成立する．

命題 2.7 の証明.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|f(t,x)-\sigma(t)|^2dx\\
&=\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\Big(|f(t,x)|^2-2\sigma(t)\cdot f(t,x)+|\sigma(t)|^2\Big)dx\\
&=\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|f(t,x)|^2dx-2\sigma(t)\cdot\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}f(t,x)dx+|\sigma(t)|^2\\
&\geq\left|\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}f(t,x)dx\right|^2-2\sigma(t)\cdot\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}f(t,x)dx+|\sigma(t)|^2\\
&=\left|\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}f(t,x)dx-\sigma(t)\right|^2
\end{aligned}$$

依って $\sigma(t)=\overline{f_{B_R(x_0)}}(t)$ と選ぶのが最適となる． ❑

3. Stokes 方程式における BMO における最大正則性

3.1. 熱方程式の初期値問題に対する BMO 最大正則性. $\nu>0$ に対して熱方程式の初期値問題を考察する:

$$\begin{cases}\partial_t u-\nu\Delta u=f, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n,\\ \quad u(0,x)=u_0(x), & t=0,\ x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}\tag{3.1}$$

非 UMD 空間を含む Banach 空間の最大正則性についてはすでに議論をしている (cf. Ogawa-Shimizu [44])．Koch-Tataru は Stein による Carleson 測度による BMO の定式化から以下を用いた:

$$\left(\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|\nabla_x e^{\nu t\Delta_x}u_0|^2dxdy\right)dt\right)^{1/2}\leq C_0\|u_0\|_{BMO}.\tag{3.2}$$

以下, 論文 Ogawa-Shimizu [47] にしたがって, $u_0\in BMO(\mathbb{R}^n)$ における熱方程式の初期条件に対する最大正則性評価を得ることを目指す．BMO の semi-norm が L^p の形でかけることを利用し, $p=2$ として時間可積分指数とそろえて考える．次の命題は本質的に Koch-Tataru の評価 (3.2) と同値な評価である．

命題 3.1. $e^{\nu t\Delta}$ を熱半群とし 初期値を $u_0 \in BMO(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき以下が成り立つ.

$$\left(\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}|\nabla_x e^{\nu t\Delta_x}u_0-\nabla_y e^{\nu t\Delta_y}u_0|^2dxdy\right)dt\right)^{1/2}\le C_0\|u_0\|_{BMO},$$

ここで C_0 は $T>0$ に依存しない定数.

系 3.2. $e^{\nu t\Delta}$ を熱半群とし 初期値を $u_0 \in BMO(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき以下が成り立つ.

$$\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|\nabla_x e^{\nu t\Delta_x}u_0-(\overline{\nabla e^{\nu t\Delta}u_0})_{B_R}|dxdy\right)^2dt\le C_0\|u_0\|_{BMO}^2,$$

ここで C_0 は $T>0$ に依存しない定数.

系 3.2 は命題 3.1 から直ちに従う. Koch-Tataru の証明 (Stein [54] による Carleson 測度の証明) とは異なる命題 3.1 の別証明を Appendix に与える.

命題 3.1 を受けて次の非斉次項への評価を得ることができる. 以下では簡単のため $\nu=1$ とする.

命題 3.3. $e^{t\Delta}$ を熱半群とし 初期値を $u_0 \in BMO(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき以下が成り立つ.

$$\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\int_s^{R^2}\left|\nabla_x e^{(t-s)\Delta_x}f(s,x)-\nabla_y e^{(t-s)\Delta_y}f(s,y)\right|^2dxdy\right)dtds$$
$$\le C_0\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}},$$

ここで C_0 は $T>0$ に依存しない定数.

命題 3.3 の証明. 定理 3.4 と同様に (3.15) から

$$\nabla_x v(t,y)=\nabla_y v(t,x)=0$$

を用いて

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|\nabla_x v(t,x)-\nabla_y v(t,y)\right|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)dt \qquad (3.3)\\
&\le-\left[\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|v(t,x)-v(t,y)\right|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right]_{t=0}^{R^2}\\
&\quad+\varepsilon\int_0^{R^2}\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|\nabla_x v(t,x)-\nabla_y v(t,y)\right|^2\widetilde{\eta_R}(x)\widetilde{\eta_R}(y)dxdydt\\
&\quad+C(\varepsilon)\int_0^{R^2}\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|v(t,x)-v(t,y)\right|^2|\nabla_x\eta_R(x)\eta_R(y)|^2dxdydt\\
&\quad+\int_0^{R^2}\frac{2}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\big(v(t,x)-v(t,y)\big)\cdot\Big(f(t,x)-f(t,y)\Big)\eta_R(x)\eta_R(y)dxdydt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\le& \varepsilon \int_0^{R^2} \frac{1}{\|\eta_R\|_1^2} \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \Big|\nabla_x v(t,x) - \nabla_y f(t,y)\Big|^2 \widetilde{\eta_R}(x)\widetilde{\eta_R}(y)dxdydt \\
&+ C(\varepsilon)\int_0^{R^2} \frac{1}{\|\eta_R\|_1^2} \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \big|v(t,x)-v(t,y)\big|^2 |\nabla_x \eta_R(x)\eta_R(y)|^2 dxdydt \\
&+ C \sup_{0<t<R^2} \left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \big|v(t,x)-v(t,y)\big|^2 \eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)^{1/2} \\
&\quad \times \int_0^{R^2} \left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \big|f(t,x)-f(t,y)\big|^2 \eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)^{1/2} dt \\
\equiv& K_1 + K_2 + K_3.
\end{aligned}
$$

第一項 K_1 は左辺に吸い込ませる. $\chi_{B_R}(x)$ を半径 $R>0$ の球 $B_R(x_0)$ の特性関数とする:

$$
\eta_R(x) = \chi_{B_R}(x)\eta_R(x), \quad \nabla_x\eta_R(x) = \chi_{B_R}(x)\nabla_x\eta_R(x), \quad \frac{1}{2^n}\|\chi_{B_R}\|_1 \le \|\eta_R\|_1 \le \|\chi_{B_R}\|_1 = |B_R| \tag{3.4}
$$

より $|\nabla\eta_R| \le \frac{C}{R}$ かつ,

$$
\begin{aligned}
K_2 \le& C \sup_{x_0,R>0} \int_0^{R^2} \left(\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \big|v(t,x)-v(t,y)\big|^2 |\nabla\eta_R(x)\eta_R(y)|^2 dxdy\right) dt \qquad (3.5)\\
\le& C \sup_{x_0,R>0} \int_0^{(2R)^2} \left(\frac{1}{(2R)^2|B_{2R}|^2}\iint_{B_{2R}(x_0)\times B_{2R}(x_0)} \big|v(t,x)-v(t,y)\big|^2 dxdy\right) dt \\
\le& C \sup_{x_0,R>0} \int_0^{R^2} \left(\frac{1}{R^2|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)} \big|v(t,x)-v(t,y)\big| dxdy\right)^2 dt \\
\le& C \Bigg[\sup_{x_0,R>0} \int_0^{R^2} \Bigg(\frac{1}{R^2|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)} \\
&\quad \times \Big(\int_s^{R^2} \big|e^{(t-s)\Delta_x}e^{(t-s)\Delta_y}\big(f(s,x)-f(s,y)\big)\big|dt\Big)\widetilde{\eta_R}(x)\widetilde{\eta_R}(y)dxdy\Bigg)^{1/2} ds\Bigg]^2.
\end{aligned}
$$

ここで (3.5) の被積分関数は以下のように評価される:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{R^2\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \Big(\int_s^{R^2} \big|e^{(t-s)\Delta_x}e^{(t-s)\Delta_y}\big(f(s,x)-f(s,y)\big)\big|^2 dt\Big)\widetilde{\eta_R}(x)\widetilde{\eta_R}(y)dxdy\right)^{1/2} \qquad (3.6)\\
\le& C\left(\frac{1}{R^2|B_R|}\int_{B_R(x_0)} \Big(\int_s^{R^2} \big|e^{(t-s)\Delta_x}\chi_{B_R}(x)\big(f(s,x)-\overline{f_{B_R}}(s)\big)\big|^2 dt\Big) dx\right)^{1/2} \\
&+ C\left(\frac{1}{R^2|B_R|}\int_{B_R(x_0)} \Big(\int_s^{R^2} \big|e^{(t-s)\Delta_x}\chi_{B_R^c}(x)\big(f(s,x)-\overline{f_{B_R}}(s)\big)\big|^2 dt\Big) dx\right)^{1/2} \\
\equiv& K_{2,1} + K_{2,2}.
\end{aligned}
$$

(3.6) の右辺第一項は square 函数の L^2-有界性から $t < R^2$ に対して

$$
\begin{aligned}
K_{2,1} \leq & C\left(\frac{1}{R^2|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\int_s^{R^2}\left|e^{(t-s)\Delta_x}\chi_{B_R}(x)\big(f(s,x)-\overline{f_{B_R}}(s)\big)\right|^2 dtdx\right)^{1/2} \qquad (3.7)\\
\leq & C\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\int_s^{R^2}\frac{t}{R^2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}G_t(y)\chi_{B_R}(x)\big(f(s,x-y)-\overline{f_{B_R}}(s)dy\right|^2\frac{dt}{t}dx\right)^{1/2}\\
\leq & C\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\left|f(s,x)-\overline{f_{B_R}}(s)\right|^2 dx\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

他方 $K_{2,2}$ は $0 \leq r \leq t \leq R^2$ にたいして

$$
\begin{aligned}
\left|f(s,y)-\overline{f_{B_R}}(s)\right| \leq & \left|f(s,y)-\overline{f_{B_{2^kR}}}(s)\right| + \left|\overline{f_{B_{2^kR}}}(s)-\overline{f_{B_{2^{k-1}R}}}(s)\right| + \cdots\\
& \cdots + \left|\overline{f_{B_{2R}}}(s)-\overline{f_{B_R}}(s)\right|
\end{aligned}
$$

に注意して

$$
\begin{aligned}
K_{2,2} = & C\left(\frac{1}{R^2|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\Big(\int_s^{R^2}\left|e^{(t-s)\Delta_x}\chi_{B_R^c}(x)\big(f(s,x)-\overline{f_{B_R}}(s)\big)\right|^2 dt\Big)dx\right)^{1/2} \qquad (3.8)\\
\leq & C\left(\int_s^{R^2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}G_{t-s}(x-y)\chi_{B_R^c}(y)\big(f(s,y)-\overline{f_{B_R}}(s)\big)dy\right|^2 dt\right)^{1/2}\\
\leq & C\left(\int_s^{R^2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(t-s)^{-\frac{n}{2}}}{(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}}(x-y))^{n+1}}\chi_{B_R^c}(y)\big(f(s,y)-\overline{f_{B_R}}(s)\big)dy\right|^2 dt\right)^{1/2}.\\
\leq & C\sup_{x_0,R>0}\sum_{k\geq 0}k2^{-k}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_{2^kR}|}\int_{B_{2^kR}(x-x_0)}\left|\big(f(t,y)-\overline{f_{B_{2^kR}}}(t)\right|dy\right)dt\\
\leq & C\|f\|_{\widetilde{L^1(I;BMO_1)}}.
\end{aligned}
$$

したがって (3.6)-(3.8) から

$$
\begin{aligned}
K_2 \leq & C\left[\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|f(s,x)-f(s,y)\right|^2\widetilde{\eta_R}(x)\widetilde{\eta_R}(y)dxdy\right)^{1/2}ds\right]^2 \qquad (3.9)\\
\leq & C\|f\|^2_{\widetilde{L^1(I;BMO)}}
\end{aligned}
$$

を得る. 最後に K_3 の評価は

$$
\begin{aligned}
& \sup_{t\in[0,R^2]}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|v(t,x)-v(t,y)\right|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)^{1/2} \qquad (3.10)\\
\leq & C\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|f(t,x)-f(t,y)\right|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)^{1/2}dt.
\end{aligned}
$$

実際, Minkovskii の不等式と John-Nirenberg の評価である命題 4.1 から

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x_0,R>0}\sup_{t\in[0,R^2]}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|v(t,x)-v(t,y)\right|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)^{1/2} \qquad (3.11)\\
\le& C\sup_{x_0,R>0}\sup_{t\in[0,R^2]}\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|\int_0^t\big(e^{(t-s)\Delta_x}f(s,x)-e^{(t-s)\Delta_y}f(s,y)\big)ds\right|\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
\le& C\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{(t-s)\Delta_x}\big(\chi_{B_R}(x)\big(f(s,x)-\overline{f_{B_R}}(s)\big)\big)\right|\eta_R(x)dx\right)ds\\
&+C\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{(t-s)\Delta_x}\big(\chi_{B_R^c}(x)\big(f(s,x)-\overline{f_{B_R}}(s)\big)\big)\right|\eta_R(x)dx\right)ds\\
=& K_{3,1}+K_{3,2}.
\end{aligned}
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
K_{3,1}\le& C\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{(t-s)\Delta_x}\big(\chi_{B_R}(x)\big(f(s,x)-\overline{f_{B_R}}(s)\big)\right|\eta_R(x)dx\right)ds\\
\le& C\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\chi_{B_R}(x)\big(f(t,x)-\overline{f_{B_R}}(t)\big)\right|dx\right)ds \qquad (3.12)\\
\le& C\|f\|_{\widetilde{L^1(I;BMO_1)}}.
\end{aligned}
$$

さらに $K_{3,2}$ は変数を $t-s=r$ と変換し, $0<r<R^2$ に注意して 円環上で $A_{2^kR}(x_0)$

$$
\frac{r^{\frac12}}{(r^{\frac12}+|x_0-y|)^{n+1}}\le\frac{r^{\frac12}}{(2^kR)^{n+1}}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{r\Delta_x}\big(\chi_{B_R^c}(x)\big(f(t-r,x)-\overline{f_{B_R}}(t-r)\big)\right|\eta_R(x)dx\right)\\
\le&\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\left(\sum_{k\ge0}\int_{A_{2^kR}(x_0)}\frac{r^{\frac12}}{(r^{\frac12}+|y|)^{n+1}}\left|\big(f(t-r,x-y)-\overline{f_{B_R}}(t-r)\right|dy\right)dx\right) \qquad (3.13)\\
\le& C\sum_{k\ge0}2^{-k}\frac{r^{\frac12}}{R}\left(\frac{1}{|B_{2^kR}|}\int_{B_{2^kR}(x_0)}\left|f(t-r,x-y)-\overline{f_{B_R}}(t-r)\right|dy\right)
\end{aligned}
$$

評価式 (3.13) の両辺を時間で積分して, $0\le r\le t\le R^2$ にたいして $K_{2,2}$ の評価と類似にして

$$
\begin{aligned}
\left|f(t,x-y)-\overline{f_{B_R}}(t)\right|\le&\left|f(t,x-y)-\overline{f_{B_{2^kR}}}(t)\right|+\left|\overline{f_{B_{2^kR}}}(t)-\overline{f_{B_{2^{k-1}R}}}(t)\right|+\cdots\\
&\cdots+\left|\overline{f_{B_{2R}}}(t)-\overline{f_{B_R}}(t)\right|
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
K_{3,2}=& C\sup_{x_0,R>0}\sup_{t\in[0,R^2)}\int_0^t\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{(t-s)\Delta_x}\big(\chi_{B_R^c}(x)\big(f(s,x)-\overline{f_{B_R}}(s)\big)\big)\right|\eta_R(x)dx\right)ds\\
\le& C\sup_{x_0,R>0}\sum_{k\ge0}k2^{-k}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_{2^kR}|}\int_{B_{2^kR}(x-x_0)}\left|\big(f(t,y)-\overline{f_{B_{2^kR}}}(t)\right|dy\right)dt \qquad (3.14)\\
\le& C\|f\|_{\widetilde{L^1(I;BMO_1)}}.
\end{aligned}
$$

各評価 (3.3), (3.9), (3.11), (3.12), (3.14) を合わせることにより

$$\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|\nabla_x v(t,x)-\nabla_y v(t,y)\right|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)dt$$
$$\le C\|f\|^2_{\widetilde{L^1(I;BMO)}},$$

すなわち

$$\left\|\nabla_x\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s)ds\right\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\le C\|f\|_{\widetilde{L^1(I;BMO)}}$$

を得ることができる. □

注意: Stein の定理から Koch-Tataru の評価を導いた場合に仮定された Potential への $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x)dx=0$ という条件は不要である. 従って熱核の微分のみならず, 熱核や fractional power の熱核のようなものでも対応可能となる.

$$\left\|\|\nabla e^{s\Delta}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right\|_{BMO}\le\left(\int_0^\infty\|\nabla e^{s\Delta}u_0\|^2_{BMO}dt\right)^{1/2}$$

となり, Bochner 空間 $L^2(I;BMO)$ における熱方程式の最大正則性に対する初期トレース評価は不成立である. 実際 Sharp trace 評価を前提とするならば Bochner space $L^2(I;BMO)$ での熱方程式の最大正則性は破綻する.

命題 3.3 により外力項に対する熱方程式の初期値問題の BMO における最大正則性を考える. これが本稿で述べる主張結果である:

定理 3.4 (BMO 最大正則性 [47])**.** 次元 n だけに依存するある定数 $C_M>0$ が存在して任意の外力 $f\in\widetilde{L^2(\mathbb{R}_+;BMO(\mathbb{R}^n))}$ と初期条件 $\nabla u_0\in BMO(\mathbb{R}^n)$ にたいして熱方程式の初期値問題 (3.1) が一意的な解を $u\in\dot{W}^{1,2}(\mathbb{R}_+;BMO(\mathbb{R}^n))\cap\widetilde{L^2(\mathbb{R}_+;\dot{BMO}^2(\mathbb{R}^n))}$ に持ち, 以下の最大正則性が成立する*:*

$$\|\partial_t u\|_{\widetilde{L^2(\mathbb{R}_+;BMO)}}+\|\Delta u\|_{\widetilde{L^2(\mathbb{R}_+;BMO)}}\le C_M\big(\|\nabla u_0\|_{BMO}+\|f\|_{\widetilde{L^2(\mathbb{R}_+;BMO)}}\big).$$

定理 3.4 の証明. 以下では証明の概略を示す. 詳細は [47] を参照のこと. $f\equiv 0$ の場合の斉次評価はすでに命題 3.1 において得られているので $u_0\equiv 0$ の場合の外力項 f に対する評価のみを述べる. $T\le\infty$ にたいして時間区間を $I=(0,T)$ として外力を $f\in L^2(I;\mathcal{S})$ かつ $g\in L^2(I;\mathcal{S})$ とする. 補題 2.3 を用いることを意図して $R>0$ に対して

$$\eta_R(x)=\begin{cases}1, & |x-x_0|\le\frac{1}{2}R,\\ \text{smooth, radially decreasing}, & \frac{1}{2}R<|x-x_0|\le R,\\ 0, & R<|x-x_0|\end{cases}$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&\qquad=\frac{2}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big)\\
&\qquad\qquad\times\Big(\int_0^t \Delta_x e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t \Delta_y e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big)\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&\qquad\quad+\frac{2}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\times\Big(f(t,x)-f(t,y)\Big)\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&\qquad\equiv I+II.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

第 1 項目は

$$
\nabla_x\cdot\int_0^t\nabla_y e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds=\nabla_y\cdot\int_0^t\nabla_x e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds=0
$$

などに注意しながら

$$
\begin{aligned}
I=&-\frac{2}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big|\int_0^t\nabla_x e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t\nabla_y e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&-\frac{4}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big)\\
&\qquad\times\Big(\int_0^t\nabla_x e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t\nabla_y e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big)\cdot\nabla_x\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

(3.15) と (3.16) をあわせると $\widetilde{\eta_R(x)}\nabla\eta_R(x)=\nabla\eta_R(x)$ として t について $t\in(0,R^2)$ 上で積分すると

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|\int_0^t\nabla_x e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t\nabla_y e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\right|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)dt\\
&\quad\le C(\varepsilon)\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(t,x)-e^{(t-s)\Delta}f(t,y)ds\Big|^2|\nabla_x\eta_R(x)\eta_R(y)|^2dxdy\right)dt\\
&\qquad+\varepsilon\int_0^{R^2}\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big|\int_0^t\nabla_x e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t\nabla_y e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big|^2\widetilde{\eta_R}(x)\widetilde{\eta_R}(y)dxdydt\\
&\qquad\qquad+\left|\int_0^{R^2}II(t)dt\right|\\
&\quad\equiv J_1+J_2+J_3.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

$\widetilde{\eta_R}(x)$ を $B_R(x_0)$ の特性関数とおくと,

$$
\eta_R(x)=\widetilde{\eta_R}(x)\eta_R(x),\quad \nabla_x\eta_R(x)=\widetilde{\eta_R}(x)\nabla_x\eta_R(x),\quad \frac{1}{2^n}\|\widetilde{\eta_R}\|_1\le\|\eta_R\|_1\le\|\widetilde{\eta_R}\|_1=|B_R| \tag{3.18}
$$

を満たすものとして J_1 は $|\nabla\eta_R| \le \frac{C}{R}$ に注意して,

$$\begin{aligned}
J_1 \le& C\int_0^{R^2}\Big(\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big|^2|\nabla\eta_R(x)\eta_R(y)|^2dxdy\Big)\,dt\\
\le& C\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\\
&\qquad\times\Big(\int_s^{R^2}\big|\nabla_x\cdot e^{(t-s)\Delta}R_x|\nabla|^{-1}f(s,x)-\nabla_y\cdot e^{(t-s)\Delta}R_y|\nabla|^{-1}f(s,y)\big|^2dt\Big)dxdyds\\
\le& C\big\||\nabla|^{-1}f\big\|^2_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}.
\end{aligned}\tag{3.19}$$

ここで最後は命題 3.3 の評価を用いた. また J_2 は (3.17) 式の左辺に吸い込ませる.

他方, Riesz 作用素 $R_jf=\mathcal{F}^{-1}\big[\frac{\xi_j}{i|\xi|}\hat{f}\big]$ とおくと

$$f(t,x)=\nabla_x\cdot R_x|\nabla_x|^{-1}f(t,x)$$

だから

$$\begin{aligned}
II=&-\frac{2}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\int_0^t\nabla_xe^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds\cdot\Big(R_x|\nabla_x|^{-1}f(t,x)-R_y|\nabla_y|^{-1}f(t,y)\Big)\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&-\frac{2}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\int_0^t\nabla_ye^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\cdot\Big(R_y|\nabla_y|^{-1}f(t,y)-R_x|\nabla_x|^{-1}f(t,x)\Big)\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&-\frac{2}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big)\\
&\qquad\times\big(R_x|\nabla_x|^{-1}f(t,x)-R_y|\nabla_y|^{-1}f(t,y)\big)\cdot\nabla_x\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&+\frac{2}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big)\\
&\qquad\times\big(R_y|\nabla_y|^{-1}f(t,y)-R_x|\nabla_x|^{-1}f(t,x)\big)\eta_R(x)\cdot\nabla_y\eta_R(y)dxdy\\
\equiv& II_1+II_2.
\end{aligned}\tag{3.20}$$

ここで

$$\begin{aligned}
II_1=&-\frac{2}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^t\nabla_xe^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t\nabla_ye^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big)\\
&\times\Big(R_x|\nabla_x|^{-1}f(t,x)-R_y|\nabla_y|^{-1}f(t,y)\Big)\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy
\end{aligned}\tag{3.21}$$

$\widetilde{\eta_R}(x)$ を (3.18) を満たすものとしてまた後半 2 項も同様にして

$$\begin{aligned}
II_2=&-\frac{4}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big)\\
&\times\Big(R_x|\nabla_x|^{-1}f(t,x)-R_y|\nabla_y|^{-1}f(t,y)\Big)\cdot\nabla_x\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy.
\end{aligned}\tag{3.22}$$

従って (3.21) と (3.22) から (3.20) を時間で $t\in(0,R^2)$ 上で積分して

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_0^{R^2} II(t)dt\Big| \le \int_0^{R^2} \big(|II_1|+|II_2|\big)dt\\
\le&\varepsilon\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big|\int_0^t \nabla_x e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t \nabla_y e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)dt\\
&+4\varepsilon^{-1}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big|R_x|\nabla_x|^{-1}f(t,x)-R_y|\nabla_y|^{-1}f(t,y)\Big|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)dt\\
&+\int_0^{R^2}\frac{2}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big|^2\nabla_x\eta_R(x)\eta_R(y)dxdydt\\
&+\int_0^{R^2}\frac{2}{\|\eta_R\|_1^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big|R_x|\nabla_x|^{-1}f(t,x)-R_y|\nabla_y|^{-1}f(t,y)\Big|^2\widetilde{\eta_R}(x)\widetilde{\eta_R}(y)dxdydt\\
&-4\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{\|\eta_R\|_1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t\nabla_x e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds\eta_R(x)dx\right)\cdot\left(\frac{1}{\|\eta_R\|_1}\int_{\mathbb{R}^n}R_y|\nabla_y|^{-1}f(t,y)\eta_R(y)dy\right)dt\\
\equiv&\varepsilon(L.H.S)+4\varepsilon^{-1}L_2+L_3+L_4.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

他方 εL_1 は $\varepsilon>0$ を小さく選んで左辺に吸収させる.

$$
\begin{aligned}
4\varepsilon^{-1}L_2+L_4\le&C\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{\|\eta_R\|_1^2}\int_{B_{2R}(x_0)}\int_{B_{2R}(x_0)}\Big|R_x|\nabla_x|^{-1}f(t,x)-R_y|\nabla_y|^{-1}f(t,y)\Big|^2dxdy\right)dt\\
\le&C_\varepsilon\big\|R_x|\nabla_x|^{-1}f\big\|^2_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

L_3 は $|\nabla\eta_R|\le\frac{C}{R}$ に注意して,

$$
\begin{aligned}
L_3\le&\frac{1}{R^2}\int_0^{R^2}\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\\
&\qquad\Big(\int_s^{R^2}\big|e^{(t-s)\Delta}f(s,x)-e^{(t-s)\Delta}f(s,y)\big|^2dt\\
&\qquad\quad\times\int_r^{R^2}\big|e^{(t-r)\Delta}f(r,x)-e^{(t-r)\Delta}f(r,y)\big|^2dt\Big)^{1/2}dxdydrds\\
\le&C\left[\frac{1}{R}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\Big(\int_s^{R^2}\big|e^{(t-s)\Delta}f(s,x)-e^{(t-s)\Delta}f(s,y)\big|^2dt\Big)dxdy\right)^{1/2}ds\right]^2\\
\le&C\big\||\nabla|^{-1}f\big\|^2_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

(3.17), (3.19) 及び (3.23)-(3.25) から

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x_0,R>0}\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big|\int_0^t\nabla_x e^{(t-s)\Delta}f(s,x)ds-\int_0^t\nabla_y e^{(t-s)\Delta}f(s,y)ds\Big|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)dt\\
&\qquad\le C\big\||\nabla|^{-1}f\big\|^2_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}.
\end{aligned}
$$

を得る．特に

$$\left\|\nabla_x^2\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s)ds\right\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\le C\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}.$$

命題 3.1 とあわせて求める評価を得る． ❑

以下に拡張された最大正則性の評価を再録する．この評価は Navier-Stokes 側を解くのに重要なものとなる．

命題 3.5. $e^{t\Delta}$ を熱半群とする，外力項 $f\in\widetilde{L^1((0,T);BMO)}$ に対して

$$\left\|\nabla\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s)ds\right\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\le C_0\|f\|_{\widetilde{L^1(I;BMO)}},$$

が成り立つ．ここで C_0 は $T>0$ に依らない定数．

系 3.6. $e^{t\Delta}$ を熱半群とする．$1\le\theta\le 2$ に対して

$$\left\|\nabla\int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s)ds\right\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\le C_0\|f\|_{\widetilde{L^\theta(I;\dot{BMO}^{-1+\frac{2}{\theta}})}},$$

がなりたつ．ここで定数 C_0 は $T>0$ に依らない．

系 3.6 は定理 3.4 と命題 3.5 を補間すれば得られる．

3.2. **非斉次 Stokes 方程式に対する BMO 最大正則性.** 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の可解性に対してその線形化問題である非斉次 Stokes 方程式の初期値問題を考察することはその第一歩となる．

$$\begin{cases}\partial_t v-\Delta v+\nabla q=f, & t>0, x\in\mathbb{R}^n,\\ \quad\operatorname{div} v=0, & t>0, x\in\mathbb{R}^n,\\ \quad\quad v(0,x)=u_0(x), & t=0, x\in\mathbb{R}^n\end{cases}\tag{3.26}$$

以下では BMO における, Stokes 方程式の初期値問題の BMO における最大正則性を示す．(cf. Koch-Tataru [33]).

定理 3.7. $0<T\le\infty$ に対して時間区間 $I=(0,T)$ とおく．任意の外力 $f\in\widetilde{L^2(I;BMO(\mathbb{R}^n))}$ と初期データ $\nabla u_0\in BMO(\mathbb{R}^n)$ に対して *Stokes* 方程式の初期値問題 (3.26) の 解 (v,q) は以下の最大正則性評価を満たす*:*

$$\begin{aligned}\|\partial_t v\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}&+\|\Delta v\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}+\|\nabla q\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\\ &\le C_M\Big(\|\nabla u_0\|_{BMO}+\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\Big),\end{aligned}\tag{3.27}$$

ただし $C_M>0$ は $T>0$ に依存しない定数.

以下の系は 定理 3.7 から解に Riesz 作用素 $|\nabla|^s$ を作用させることにより得られる．

系 3.8. $0 < T \le \infty$ に対して時間区間 $I = (0, T)$ とおく．任意の外力 $f \in \widetilde{L^2(I; BMO(\mathbb{R}^n))}$ と初期データ $\nabla u_0 \in BMO(\mathbb{R}^n)$ に対して *Stokes* 方程式の初期値問題 (3.26) の 解 (v, q) は以下の最大正則性評価を満たす*:*

$$\begin{aligned}\|\partial_t v\|_{\widetilde{L^2(I;\dot{BMO}^{s-1})}} + \|v\|_{\widetilde{L^2(I;\dot{BMO}^{s+1})}} + \|\nabla q\|_{\widetilde{L^2(I;\dot{BMO}^{s-1})}}\\ \le C_M\big(\|u_0\|_{\dot{BMO}^s} + \|f\|_{\widetilde{L^2(I;\dot{BMO}^{s-1})}}\big),\end{aligned}$$

ただし $C_M > 0$ は $T > 0$ に依存しない定数*.*

定理 3.7 の証明. Stokes 方程式の解 u に対する Helmholtz 分解を施す．P をソレノイダル空間 (発散零空間) への射影作用素とする．このとき連立型 (3.26) を

$$\begin{cases}\partial_t v_0 - \Delta v_0 = Pf, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n,\\ \operatorname{div} v_0 = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n,\\ v_0(0, x) = Pu_0, & t = 0, x \in \mathbb{R}^n,\end{cases} \tag{3.28}$$

$$\begin{cases}\partial_t v_1 - \Delta v_1 = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n,\\ v_1(0, x) = (1 - P)u_0, & t = 0, x \in \mathbb{R}^n\end{cases} \tag{3.29}$$

及び

$$\begin{cases}\partial_t v_2 - \Delta v_2 + \nabla q = (1 - P)f, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n,\\ \operatorname{div} v_2 = -\operatorname{div} v_1, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n,\\ v_2(0, x) = 0, & t = 0, x \in \mathbb{R}^n\end{cases} \tag{3.30}$$

に分解する．そこで

$$v = v_0 + v_1 + v_2,$$

とおいて 問題 (3.28) と問題 (3.29) に対して定理 3.4 を適用すれば $1 \le p \le \infty$ に対して

$$\begin{aligned}\|\partial_t v_0\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}} + \|\Delta v_0\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}} \le& C_M\Big(\|Pu_0\|_{BMO} + \|Pf\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\Big)\\ \le& C_M\Big(\|\nabla u_0\|_{BMO} + \|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\Big),\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\|\partial_t v_1\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}} + \|\Delta v_1\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}} \le& C_M\|\nabla(1 - P)u_0\|_{BMO}\\ \le& C_M\|\nabla u_0\|_{BMO}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

ここで, ソレノイダル空間への射影作用素が Riesz 作用素で表されることと, 特異積分作用素の有界性である, 以下で述べる命題 5.1 を用いている．他方 方程式 (3.30) に対して発散を作用させて

$$\Delta q = \operatorname{div}(1 - P)f - \partial_t \operatorname{div} v_2 + \Delta \operatorname{div} v_2 = \operatorname{div} f + (\partial_t - \Delta)\operatorname{div} v_1,$$

となり,

$$\begin{aligned}\nabla q =& -\nabla(-\Delta)^{-1}\big(\operatorname{div} f - (\partial_t - \Delta)g + (\partial_t - \Delta)\operatorname{div} v_1\big)\\ =& -(-\Delta)^{-1}\nabla(\operatorname{div} f) - \nabla(-\Delta)^{-1}\partial_t \operatorname{div} v_1 + \nabla(\operatorname{div} v_1).\end{aligned}$$

最後に圧力勾配 ∇q に対して,

$$\begin{aligned}
&\|\nabla q\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\\
\le&\|\nabla((-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\, f)\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}+\|\nabla(-\Delta)^{-1}\partial_t\mathrm{div}\, v_1\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}+\|\nabla(\mathrm{div}\, v_1)\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\\
\le&\|\nabla((-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\, f)\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}+\|\partial_t v_1\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}+\|D^2 v_1\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\\
\le&C\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}+C\|\nabla u_0\|_{BMO}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

評価式 (3.31), (3.32), と (3.33) により $I=\mathbb{R}_+$ での評価 (3.27) を得る. $I=(0,T)$, $T<\infty$ の場合も同様にして示される. ❑

以上で得られた最大正則性は, 初期トレースに対しては最適であることが以下の評価からわかる.

命題 3.9 ([47]). 以下の各 *trace* 評価が成り立つ.

(1) $f\in\widetilde{\dot{W}^{1,2}}(I;VMO)\cap\widetilde{L^2(I;V\dot{M}O^2)}$ かつ $f(0)\equiv 0$ に対して f によらない定数 C があって

$$\|\nabla f\|_{BUC(I;VMO)}\le C\Big(\|\partial_t f\|_{\widetilde{L^2(I;VMO)}}+\|\Delta f\|_{\widetilde{L^2(I;VMO)}}\Big).$$

特にこの評価は最良である.

(2) $f(0)\equiv 0$ を満たす $f\in\widetilde{\dot{W}^{1,2}}(I;BMO)\cap\widetilde{L^2(I;B\dot{M}O^2)}$, に対して f によらない定数 C があって

$$\|\nabla f\|_{L^\infty(I;BMO)}\le C\Big(\|\partial_t f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}+\|\Delta f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}\Big).$$

4. John-Nirenberg 評価

任意の $1<p<\infty$ に対して $f\in BMO_p(\mathbb{R}^n;X)$ を

$$\|f\|_{BMO_p(X)}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,R>0}\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x)}\left\|f(y)-\bar{f}_{B_R(x)}\right\|_X^p dy\right)^{1/p}<\infty.$$

で定義する. 次の事実はよく知られている: このときある定数 $C_p>0$ があって

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}\le\|f\|_{BMO_p(\mathbb{R}^n)}\le C_p\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.1}$$

この事実を Chemin-Lerner 空間に拡張する:

<u>定義</u> $1\le p<\infty$ に対して $f\in\widetilde{L^2(I;BMO_p(\mathbb{R}^n))}$ であるとは

$$\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_p)}}\equiv\sup_{x_0\in\mathbb{R}^n,R>0}\left(\int_0^{R^2}\Big(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|f(t,x)-f(t,y)\right|^p dxdy\Big)^{2/p}dt\right)^{1/2}<\infty.$$

のとき.

命題 4.1 (John-Nirenberg [29])**.** 任意の $1 < p < \infty$ に対して $f \in \widetilde{L^2(I;BMO_p(\mathbb{R}^n))}$ を

$$\|f\|^2_{\widetilde{L^2(I;BMO_p)}} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n, R>0} \int_0^R \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} \left| f(t,x) - \overline{f(t)}_{B_R(x_0)} \right|^p dx \right)^{2/p} dt < \infty.$$

で定義する.

(1) $1 < p < \infty$ のとき

$$C_p{}^{-1} \|f\|_{BMO_p(\mathbb{R}^n;L^2)} \le \|f\|_{BMO_1(\mathbb{R}^n;L^2)} \le \|f\|_{BMO_p(\mathbb{R}^n;L^2)}. \tag{4.2}$$

ここで $C_p \simeq O(p)$ $(p \to \infty)$.

(2) $1 \le p \le 2$ のときある定数 $C_p > 0$ があって

$$C_p{}^{-1} \|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_p)}} \le \|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_1)}} \le \|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_p)}}. \tag{4.3}$$

(3) $2 < p$ のとき (4.3) 右側の不等式が成立する.

注意. $2 \le p$ のとき

$$\|f\|_{BMO_p(\mathbb{R}^n;L^2)} \le \|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_p)}}$$

である. また $1 \le p \le 2$ のときは

$$\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_p)}} \le \|f\|_{BMO_p(\mathbb{R}^n;L^2)}$$

であり特に

$$\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_2)}} \simeq \|f\|_{BMO_2(\mathbb{R}^n;L^2)}$$

だから (4.3) は (4.2) の証明の系として得られる.

命題 4.1 の証明. 右の不等式

$$\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_1)}} \le \|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_p)}}$$

は Hölder の不等式

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B_R|^2} \iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)} |f(t,x) - f(t,y)| dxdy \right)^2 \\
&\quad \le \left(\frac{1}{|B_R|^2} \iint_{B_R} |f(t,x) - f(t,y)|^p dxdy \right)^{2/p} \left(\frac{1}{|B_R|^2} \int_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)} dxdy \right)^{2/p'} \\
&\quad \le \left(\frac{1}{|B_R|^2} \iint_{B_R} |f(t,x) - f(t,y)|^p dxdy \right)^{2/p}
\end{aligned}$$

から両辺を $[0, R^2]$ 上で t について積分して x_0 と $R > 0$ で上限をとることにより直ちに従う. 左側の不等式は以下の John-Nirenberg の不等式が本質的である.

補題 4.2. (Extended John-Nirenberg's inequality) $f \in BMO$ かつ $\|f\|_{BMO_1(\mathbb{R}^n;L^2(I))} \le 1$ とする. 任意の立方体 Q^0 と $\lambda > 0$ に対してある f によらない定数 $\nu > 0$ *and* $C > 0$ があって

$$\mu\big(\{x \in Q^0; \|f(\cdot,x) - \bar{f}_{Q^0}\|_{L^2_I} > \lambda\}\big) \le Ce^{-\nu\lambda} \tag{4.4}$$

が成り立つ. 特に ある定数 $K > 0$ に依って任意の *cube* Q^0 上

$$\int_{Q^0} \Big(e^{\nu\|f(x)-\bar{f}_{Q^0}\|_{L^2_I}} - 1\Big)dx \le K|Q^0|. \tag{4.5}$$

補題 4.2 の証明. John-Nirenberg [29] にしたがった証明: $f \in BMO_1(\mathbb{R}^n; L^2(I))$ に対して一般性を失わず $\|f\|_{BMO_1(\mathbb{R}^n;L^2(I))} = 1$ と仮定する. 始めに適当な cube $\{Q^0_k\}_k$ を

$$\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q^0_k}\Big(\int_0^{R^2}|f(t,x) - \overline{f_{Q^0}}(t)|^2dt\Big)^{1/2}dt < \infty$$

となるように選ぶ. 次に各 Q^0 を固定してそれぞれを Calderon-Zygmund 分解する. どれでも同じなのでどれか一つについて考える: すなわち disjoint cube の列 $\{Q^m_{k_m}\}_{k_m}$ (m は cube の大きさと step 数を表し, k_m は同一サイズの cube の番号を意味する) がとれて $G_{m-1} = \bigcup_{k_m} Q^m_{k_m}$ かつ

- Good 領域 G_m に属す cube $Q^m_{k'_m}$ に対して ($|Q^m_{k'_m}| = |Q^m|$ と略す)

$$\frac{1}{|Q^m|}\int_{Q^m_{k'_m}}\Big(\int_0^{R^2}|f(t,x) - \overline{f_{Q^0}}(t)|^2dt\Big)^{1/2}dx \le 2, \qquad Q^m_{k'_m} \subset G_m, \tag{4.6}$$

  このとき $Q^m_{k'_m}$ をさらに分解して $G = \cap_m G_m$ を構成する.

- Bad 領域 B_m に属す cube $Q^m_{k_m}$ に対して

$$\frac{1}{|Q^m|}\int_{Q^m_{k_m}}\Big(\int_0^{R^2}|f(t,x) - \overline{f_{Q^0}}(t)|^2dt\Big)^{1/2}dx > 2, \qquad Q^m_{k_m} \subset B_m, \tag{4.7}$$

  このとき分解は停止して超立方体をそのまま維持する.

このとき

(1) (4.6) から Lebesgue の定理より $m \to \infty$ により $x \in G = \cap_m G_m$ a.e. に対して,

$$\Big(\int_0^{R^2}|f(t,x) - \overline{f_{Q^0}}(t)|^2dt\Big)^{1/2} \le 2,$$

(2) $x \in B = G^c$ に対してその一つ前の cube では Good 領域にいる, すなわちある $Q^m_{k_m} \subset B$ に対してある (最終的には残らない過渡的な cube) $Q^{m-1}_{k'_{m-1}} \subset G_{m-1}$ があって $Q^m_{k_m} \subset Q^{m-1}_{k'_{m-1}}$ かつ (4.6), (4.7) から

$$\begin{aligned}2|Q^m| &\le \int_{Q^m_{k_m}}\Big(\int_0^{R^2}|f(t,x) - \overline{f_{Q^0}}|^2dt\Big)^{1/2}dx \\ &\le \int_{Q^{m-1}_{k'_{m-1}}}\Big(\int_0^{R^2}|f(t,x) - \overline{f_{Q^0}}|^2dt\Big)^{1/2}dx \le 2|Q^{m-1}| = 2\cdot 2^n|Q^m|.\end{aligned} \tag{4.8}$$

(3) bad 領域の任意の cube $Q^m_{k_m}$ に対して (4.7) から

$$\begin{aligned}\sum_{m,k_m}|Q^m_{k_m}| \leq& \frac{1}{2}\sum_{m,k_m}\int_{Q^m_{k_m}}\left(\int_0^{R^2}|f(t,x)-\overline{f_{Q^0}}|^2dt\right)^{1/2}dx\\ \leq&\frac{1}{2}\int_{\bigcup_{m,k_m}Q^m_{k_m}}\left(\int_0^{R^2}|f(t,x)-\overline{f_{Q^0}}|^2dt\right)^{1/2}dx\\ \leq&\frac{1}{2}\int_{Q^0}\left(\int_0^{R^2}|f(t,x)-\overline{f_{Q^0}}|^2dt\right)^{1/2}dx.\end{aligned}\tag{4.9}$$

このとき John-Nirenberg にしたがって 十分大きな $\lambda>0$ に対して

$$\left\{x\in Q^0;\|f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}\|_{L^2_I}>\lambda\right\}\subset\bigcup_{k_m}\left\{x\in Q^m_{k_m};\|f(x)-\overline{f_{Q^m_{k_m}}}\|_{L^2_I}>\lambda-2\cdot 2^n\right\}\tag{4.10}$$

が成り立つことがわかる. 実際 (4.8) から

$$\frac{1}{|Q^m_{k_m}|}\int_{Q^m_{k_m}}\left(\int_0^{R^2}|f(t,x)-\overline{f_{Q^0}}|^2dt\right)^{1/2}dx\leq 2\cdot 2^n\tag{4.11}$$

なので (4.11) と Minkovski の不等式から

$$\left(\int_0^{R^2}\overline{|(f-\overline{f_{Q^0}})_{Q^m_{k_m}}(t)|^2}dt\right)^{1/2}\leq 2\cdot 2^n$$

である. 従って $x\in\left\{x\in Q^0;\|f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}\|_{L^2_I}>\lambda\right\}$ ならば

$$\begin{aligned}&\|f(x)-\overline{f_{Q^m}}\|_{L^2_I}+\|\overline{f_{Q^m}}-\overline{f_{Q^0}}\|_{L^2_I}\geq\|f(x)-\overline{f_{Q^0}}\|_{L^2_I}>\lambda\\ &\|f(x)-\overline{f_{Q^m}}\|_{L^2_I}>\lambda-2\cdot 2^n.\end{aligned}$$

よって (4.10) が従う. ここで John-Nirenberg にしたがって函数 $F(\lambda)$ を

$$F(\lambda)\equiv\sup_{g,Q}\frac{\mu\big(\{x\in Q;\|g(x)\|_{L^2_I}>\lambda\}\big)}{\int_Q\left(\int_0^{R^2}|g(t,x)|^2dt\right)^{1/2}dx}$$

と定義すると

$$
\begin{aligned}
&\mu\Big(\big\{x\in Q^0;\|f(\cdot,x)-\overline{f}_{Q^0}\|_{L^2_I}>\lambda\big\}\Big)\\
&\qquad\le\sum_m\sum_{k_m}\mu\Big(\big\{x\in Q^m_{k_m};\|f(x)-f_{Q^m_{k_m}}\|_{L^2_I}>\lambda-2\cdot 2^n\big\}\Big)\\
&\qquad\le\sum_m\sum_{k_m}F\big(\lambda-2\cdot 2^n\big)\int_{Q^m_{k_m}}\Big(\int_0^{R^2}|f(t,x)-\overline{f_{Q^m_{k_m}}}|^2dt\Big)^{1/2}dx\\
&\qquad\le\sum_m\sum_{k_m}F\big(\lambda-2\cdot 2^n\big)|Q^m_{k_m}|\left(\int_0^{R^2}\Big(\frac{1}{|Q^m|}\int_{Q^m_{k_m}}|f(t,x)-\overline{f_{Q^m_{k_m}}}|dx\Big)^2dt\right)^{1/2}\\
&\qquad\ (\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_1)}}\le 1\text{ を仮定したから})\\
&\qquad\le\sum_m\sum_{k_m}F\big(\lambda-2\cdot 2^n\big)|Q^m_{k_m}|\\
&\qquad=F\big(\lambda-2\cdot 2^n\big)\sum_m\sum_{k_m}|Q^m_{k_m}|\\
&\qquad=F\big(\lambda-2\cdot 2^n\big)\frac{1}{2}\int_{Q^0}\Big(\int_0^{R^2}|f(t,x)-\overline{f_{Q^0}}|^2dt\Big)^{1/2}dx.
\end{aligned}
$$

ここで (4.9) を用いた．これから

$$F\big(\lambda\big)\le\frac{1}{2}F\big(\lambda-2\cdot 2^n\big)$$

が導かれるので, あとは [29] と同様の議論で証明可能.

　このあとは, $\alpha_n=2^{-n}$ とおいて例えば A を適当にとることにより

$$F(\lambda)\le A2^{-\alpha_n\lambda}$$

と置けたとすると

$$F(\lambda+2\cdot 2^n)\le\frac{1}{4}F(\lambda)\le A2^{-\alpha_n(\lambda+2\cdot 2^n)},\quad 2^{n+1}\le\lambda<2\cdot 2^{n+1}.$$

以下, $m>>1$, $m\in\mathbb{N}$ として $\lambda\in[2^{n+1}m,2^{n+1}(m+1))$ とすれば

$$F(\lambda)\le A2^{-\alpha_n\lambda},\quad 2^{n+1}m\le\lambda<2^{n+1}(m+1)$$

と見なせる．m を動かすことにより十分大きな $\lambda>>1$ に対して一様に

$$
\begin{aligned}
\mu\Big(\big\{x\in Q_0;\|f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}\|_{L^2_I}>\lambda\big\}\Big)&\le F(\lambda)\left(\int_0^{R^2}\Big(\int_{Q^0}|f(t,x)-\overline{f_{Q^0}}|dx\Big)^2dt\right)\\
&\le Ae^{-\alpha'_n\lambda}\left(\int_0^{R^2}\Big(\int_{Q^0}|f(t,x)-\overline{f_{Q^0}}|dx\Big)^2dt\right)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

(ただし $\alpha_n=2^{-n}\log 2$) を得る．評価 (4.5) は (4.4) から直ちに従う．実際 $\nu<\nu_n$ に対して任意の $1<p<\infty$ と $f\in\widetilde{L^2(I;BMO_1)}$ に対して $\tilde{f}=\|f\|^{-1}_{\widetilde{L^2(I;BMO_1)}}f$ として $\lambda^p\le\frac{[p]!}{\nu^p}\big(e^{\nu\lambda}-1\big)\simeq$

$C_p^p\big(e^{\nu\lambda}-1\big)$ だから $1<p\le 2$ に対して (4.12) により

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q^0|}\int_{Q^0}\Big(e^{\nu\|f(\cdot,x)-\bar f_{Q^0}\|_{L^2_I}}-1\Big)dx\\
=&\frac{1}{|Q^0|}\int_{Q^0}\Big(\int_0^{\|f(\cdot,x)-\bar f_{Q^0}\|_{L^2_I}}\frac{d}{d\lambda}e^{\nu\lambda}d\lambda\Big)dx\\
=&\frac{1}{|Q^0|}\int_{Q^0}\int_0^\infty \chi_{\left\{x\in Q^0;\|f(\cdot,x)-\bar f_{Q^0}\|_{L^2_I}>\lambda\right\}}(t,x)\nu e^{\nu\lambda}d\lambda dx\\
=&\frac{1}{|Q^0|}\int_0^\infty\Big(\int_{\left\{x\in Q^0;\left\|f(\cdot,x)-\bar f_{Q^0}\right\|_{L^2_I}>\lambda\right\}}dx\Big)\nu e^{\nu\lambda}d\lambda\\
=&\frac{1}{|Q^0|}\int_0^\infty\mu\Big(\left\{x\in Q^0;\left\|f(\cdot,x)-\bar f_{Q^0}\right\|_{L^2_I}>\lambda\right\}\Big)\nu e^{\nu\lambda}d\lambda\\
\le&\frac{1}{|Q^0|}\int_0^\infty \nu A e^{-(\nu_n-\nu)\lambda}d\lambda\le\frac{\nu A}{\nu_n-\nu}.
\end{aligned}
$$

❏

補題 4.2 を認めれば命題 4.1 は以下のようにして従う.

命題 4.1 の証明. 任意の $1<p<\infty$ と $f\in BMO_1(\mathbb{R}^n;L^2(I))$ に対して

$$
\tilde f=\|f\|^{-1}_{BMO_1(\mathbb{R}^n;L^2(I))}f,\qquad \|f\|_{BMO_1(\mathbb{R}^n;L^2(I))}=1
$$

を仮定したとき,

$$
\lambda^p\le\frac{[p]!}{\nu^p}\big(e^{\nu\lambda}-1\big)\simeq C_p^p\big(e^{\nu\lambda}-1\big)
$$

だから, 補題 4.2 を認め,

$$
\frac{1}{|Q^0|}\int_{Q^0}\Big(e^{\nu\|f(x)-\bar f_{Q^0}\|_{L^2_I}}-1\Big)dx\le K
$$

であるから, とりわけ不等式

$$
\|f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}\|^m_{L^2(I)}\le\nu^{-m}m!\exp\big(\nu\|f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}\|_{L^2(I)}\big)
$$

から $m\in\mathbb{N}$, $m-1<p\le m$ に対して

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q^0|}\int_{Q^0}\|f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}\|^p_{L^2(I)}dx\right)^{1/p}\le&2\nu^{-\frac{m}{p}}m^{\frac{m}{p}}\left(\frac{1}{|Q^0|}\int_{Q^0}\exp\big(\nu\|f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}\|_{L^2(I)}\big)dx\right)^{1/p}\\
\le&2\nu^{-\frac{m}{p}}m^{\frac{m}{p}}K^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

が従う. 一般に $\|f\|_{BMO_1(\mathbb{R}^n;L^2(I))}\neq 1$ ならば (4) にしたがって,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q^0|}\int_{Q_R}\|f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}\|^p_{L^2(I)}dx\right)^{1/p}\le&C\nu^{-1}K^{1/p}p\sup_{R>0,x_0}\frac{1}{|Q^0|}\int_{Q^0}\|f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}\|_{L^2(I)}dx\\
=&C_p\big\|f\big\|_{BMO_1(\mathbb{R}^n;L^2(I)}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

ここで $C_p \simeq O(p)$ $p \to \infty$. 特に (4.13) により $1 \le p < 2$ であれば

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|Q^0|}\int_{Q^0} \|f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}\|_{L^2_I}^p dx\Big)^{1/p}\\
\le &\left(\frac{1}{|Q^0|}\int_{Q^0} \Big(\int_0^{R^2} |f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}|^2 dt\Big)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{1/p}\\
\le &\left(\frac{1}{|Q^0|}\int_0^{R^2} \Big(\int_{Q^0} |f(\cdot,x)-\overline{f_{Q^0}}|^2 dx\Big) dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_2)}}
\end{aligned}
$$

これから (4.13) とあわせて $1 \le p \le 2$ に対して

$$\|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_p)}} \le C_p \|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO_1)}}$$

が成り立つ. ここで $C_p \simeq p$. ❑

命題 4.1 の証明終わり ❑

5. 特異積分作用素の有界性について

この節では前節で導入した Chemin-Lerner 型の空間における Riesz 作用素 (特異積分作用素) の有界性を Peetre の BMO における有界性の証明を Peetre [51] に従い示す.

Definition. Let $R_k f \equiv \mathcal{F}^{-1}[\frac{\xi_k}{i|\xi|}\widehat{f}]$ for $f \in \mathcal{S}$.

命題 5.1 (特異積分作用素の有界性)**.** *R_k を Riesz 変換とする. ある定数 $C > 0$ が存在して*

$$\|R_k f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}} \le C \|f\|_{\widetilde{L^2(I;BMO)}}$$

命題 5.1 の証明. 一般的に次の作用素に対する有界性を証明する. 以下で特異積分作用素

$$Tf \equiv \text{ p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} a(x-y) f(y) dy$$

にたいしてその正則化を

$$T_j f \equiv \int_{\mathbb{R}^n} a(x-y)\eta_j(x-y) f(y) dy$$

とおく. ここで $\{\eta_j(x)\}_j$ は Littlewood-Paley の 2 進単位分解, i.e., supp $\eta_j(x) \subset B_{2^j}(0)\backslash B_{2^{j-1}}(0)$, $\eta_j(x) = \eta_j(|x|)$ かつ $x \ne 0$ で $1 \equiv \sum_j \eta_j(x)$ とする. $a(x)$ は Calderon-Zygmund 型積分核であって

(1) $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n/\{0\})$.

(2) 任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して $a_j(x) = a(x)\eta_j(x)$ のとき $\int_{\mathbb{R}^n} a_j(y) dy = 0$.

(3) $a(\lambda x) = \lambda^{-n} a(x)$ $(\lambda > 0)$

の各条件を満たすものとする.

任意の点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ と半径 $R > 0$ を固定して $x \in B_R(x_0)$ とする.

$\langle$ Step 1 $\rangle$. $2^j \le R$ のとき, すなわち $j \le \ell \equiv \log R/\log 2$ のとき, $|x-y| < 2^j < R$ より $|y-x_0| \le |x-y| + |x-x_0| \le 2^j + R \le 2R$ が成り立つので, ball の特性関数 $\chi_{B_R(x_0)}(y)$ にたい

して平均値の定理を a_j に用いて,

$$
\begin{aligned}
T_j f(x) &= \int_{B_{2^j}(x_0)} a_j(x-y)\big(f(t,y)-\sigma(t)\big)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x-y)\chi_{B_{2R}(x_0)}(y)\big(f(t,y)-\sigma(t)\big)dy.
\end{aligned}
$$

特異積分作用素の $L^2(\mathbb{R}^n)$ での有界性を用いれば,

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|\sum_{j\le\ell}T_j[f](t,x)|^2dxdt\right)^{1/2} \\
\le&\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{\mathbb{R}^n}\Big|\sum_{j\le\ell}T_j\chi_{B_{2R}(x_0)}[f(t,x)-\sigma(t)]\Big|^2dxdt\right)^{1/2} \\
\le&C\left(\int_0^{(2R)^2}\frac{1}{|B_{2R}|}\int_{B_{2R}(x_0)}\Big|f(t,y)-\sigma(t)\Big|^2dydt\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|\overline{\sum_{j\le\ell}T_j[f(t,x)]_{B_R}}|^2dxdt\right)^{1/2} \\
\le&\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\Big|\sum_{j\le\ell}T_j\chi_{B_{2R}(x_0)}[f(t,x)-\sigma(t)]\Big|^2dxdt\right)^{1/2} \\
\le&C\left(\int_0^{(2R)^2}\frac{1}{|B_{2R}|}\int_{B_{2R}(x_0)}\Big|f(t,y)-\sigma(t)\Big|^2dydt\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 両者を合わせて,

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|\sum_{j\le\ell}T_j[f(t,x)]-\overline{\sum_{j\le\ell}T_j[f(t,x)]}|^2dxdt\right)^{1/2} \\
\le&2\left(\int_0^{(2R)^2}\frac{1}{|B_{2R}|}\int_{B_{2R}(x_0)}\Big|f(t,x)-\sigma(t)\Big|^2dxdt\right)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

$\langle$ Step 2 $\rangle$. 他方 $R<2^j$ のとき, すなわち, $\log R/\log 2\equiv\ell<j$ のとき, a_j はなめらかなので

$$
\begin{aligned}
\big|\nabla T_j(f(t)-\sigma(t))\big| &\le \int_{|x-y|\le 2^j}|\nabla_x a_j(x-y)\big(f(t,y)-\sigma(t)|dy \\
&\le\left(\int_{|x-y|\le2^j}|\nabla a_j(x-y)|^{p'}dy\right)^{1/p'}\left(\int_{|x-y|\le2^j}|f(t,y)-\sigma(t)|^pdy\right)^{1/p} \\
&\le C2^{-j(\frac{n}{p}-1)}\left(\int_{|x-y|\le2^j}|f(t,y)-\sigma(t)|^pdy\right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

このとき $|x-x_0|<R\le 2^j$ と $|x-y|\le 2^j$ から $|y-x_0|\le 2^{j+1}$ が従い,

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|T_j[f](t,x)-T_j[f](t,x_0)|^2dxdt\right)^{1/2}\\
\le&\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\Big|(x-x_0)\cdot\nabla T_j[f](t,x)\Big|^2dxdt\right)^{1/2}\\
\le&\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\Big|(x-x_0)\cdot\nabla T_j[f-\sigma(t)](t,x)\Big|^2dxdt\right)^{1/2} \qquad (5.2)\\
\le&C\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\big(R^{\frac{n}{2}}\cdot R\cdot 2^{-j(\frac{n}{2}+1)}\big)^2\left(\int_{|y-x_0|<2^{j+1}}\Big|f(t,y)-\sigma(t)\Big|^2dx\right)^{2\cdot 1/2}dt\right)^{1/2}\\
&(R\text{ が 1 つ余計に出るのは }|x-x_0|\text{ があるから})\\
\le&CR\left(\int_0^{R^2}2^{-j(n+2)}\left(\int_{|y-x_0|<2^{j+1}}\Big|f(t,y)-\sigma(t)\Big|^2dx\right)^{2\cdot 1/2}dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

したがって $R<2^j$ なる j にたいして (5.2) を ℓ について加えて

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\Big|\sum_{\ell<j}\big(T_j[f](t,x)-T_j[f](t,x_0)\big)\Big|^2dxdt\right)^{1/2}\\
\le&CR\sum_{\ell<j}2^{-j}\left(\int_0^{2^{2(j+1)}}\frac{1}{|B_{2^{j+1}}|}\int_{|y-x_0|<2^{j+1}}\Big|f(t,y)-\sigma(t)\Big|^2dxdt\right)^{1/2} \qquad (5.3)\\
\le&CR2^{-\ell+1}\sup_j\left(\int_0^{2^{2(j+1)}}\frac{1}{|B_{2^{j+1}}|}\int_{|y-x_0|<2^{j+1}}\Big|f(t,y)-\sigma(t)\Big|^2dxdt\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

ここで $R2^{-\ell}\le 2$ に留意する. 評価 (5.1) と (5.3) において $x_0\in\mathbb{R}^n$ と $R>0$ について上限を取り, さらに 命題 2.7 に従って $\sigma(t)$ について最適化すれば求める作用素 T に対する有界性を得ることができる.

□

6. Appendix

6.1. Koch-Tataru 評価の別証明 (最大正則性の初期 trace 評価). 命題 3.1 の証明. なめらかな cut off 函数

$$
\eta_R(x)=\begin{cases}1, & |x-x_0|<R,\\ 0, & |x-x_0|>2R\end{cases}
$$

に対して補題 2.3 を用いて

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|B_R|^2}\frac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy \qquad (6.1)\\
&\quad=\frac{2}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right)\left(\partial_t e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\partial_t e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right)\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&\quad=\frac{2}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right)\left(\nu\Delta_x e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\nu\Delta_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right)\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&\quad=\frac{2\nu}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right)\nabla_x\cdot\left(\nabla_x e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\nabla_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right)\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&\qquad-\frac{2\nu}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right)\nabla_y\cdot\left(\nabla_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)-\nabla_x e^{\nu t\Delta}u_0(x)\right)\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&\qquad(\text{それぞれの項を部分積分すると})\\
&\quad=-\frac{2\nu}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|\nabla_x e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\nabla_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&\qquad-\frac{4\nu}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right)\\
&\qquad\qquad\times\left(\nabla_x e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\nabla_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right)\cdot\nabla_x\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\\
&\quad\equiv-J_1+J_2.
\end{aligned}
$$

(6.1) 両辺を $t\in(0,R^2)$ で積分する．このとき 上記 第二項を $J_2(t)$ とおくと，この項は他方 $x\in$ supp $\nabla\eta_R(x-x_0)$, $y\in$ supp $\eta_R(x-x_0)$ として

$$\frac{|x-y|}{R}\le 2$$

かつ $x\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$|\nabla\eta_R(x-x_0)|\le\frac{C}{R}$$

だから

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^t J_2(t)dt\right|=&\left|\int_0^t\frac{4\nu}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left(e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right)\right.\\
&\qquad\left.\times\left(\nabla_x e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\nabla_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right)\cdot\nabla_x\eta_R(x)\eta_R(y)dxdydt\right|\\
\le&4\nu\int_0^t\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2\left|\nabla_x\eta_R(x)\eta_R(y)\right|^2dxdy\right)^{1/2}\\
&\quad\times\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left|\nabla e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\nabla_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right)^{1/2}dt\\
\le&4\nu\sup_{t\in(0,R^2)}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2dxdy\right)^{1/2}\\
&\quad\times\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{R^2|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|\nabla e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\nabla_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2dxdy\right)^{1/2}dt\\
\le&C_\varepsilon\nu\sup_{t\in(0,R^2)}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2dxdy\right)
\end{aligned}
$$

$$+\varepsilon\nu\Big(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|\nabla e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\nabla_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2dxdydt\Big)$$
$$\equiv J_2^1+\varepsilon\int_0^{R^2}\tilde{J}_1dt.$$

このとき

$$\begin{aligned}J_2^1=&C_\varepsilon\nu\sup_{t\in(0,R^2)}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2dxdy\right)\\=&C_\varepsilon\nu\sup_{t\in(0,R^2)}\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{BMO}^2\le C_\varepsilon\nu\|u_0\|_{BMO}^2.\end{aligned}$$

最後の評価は Fefferman-Stein [19] の $\mathcal{H}^1$-BMO-duality の定理と, 熱核を $\mathcal{H}^1$-norm における試験函数と見なすことにより

$$\left|(e^{\nu t\Delta}u_0,\phi)\right|=(u_0,e^{\nu t\Delta}\phi)\le C\|u_0\|_{BMO}\|e^{\nu t\Delta}\phi\|_{\mathcal{H}^1}\le C\|u_0\|_{BMO}\|\phi\|_{\mathcal{H}^1}$$
$$\sup_{\phi\in\mathcal{H}^1}\frac{\left|(e^{\nu t\Delta}u_0,\phi)\right|}{\|\phi\|_{\mathcal{H}^1}}\le C\|u_0\|_{BMO}$$

から従う. 従って

$$\sup_{x_0}\sup_{R>0}J_2^1=C\nu\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{BMO}^2\le C\nu\|u_0\|_{BMO}^2 \tag{6.2}$$

が成り立つ.

$$2\nu\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|\nabla_x e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\nabla_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2dxdy\right)dt \tag{6.3}$$
$$\begin{aligned}=&-\left[\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2\eta_R(x)\eta_R(y)dxdy\right]_{t=0}^{R^2}\\&+C_\varepsilon\nu\sup_{t\in(0,R^2)}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2dxdy\right)\\&\quad+\varepsilon\nu\Big(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|\nabla e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\nabla_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2dxdydt\Big)\\\le&\sup_{x_0,R>0}\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}|u_0(x)-u_0(y)|^2dxdy\\&+C_\varepsilon\nu\sup_{t\in(0,R^2)}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|e^{\nu t\Delta}u_0(x)-e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2dxdy\right)\\&\quad+\varepsilon\nu\Big(\int_0^{R^2}\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}\left|\nabla e^{\nu t\Delta}u_0(x)-\nabla_y e^{\nu t\Delta}u_0(y)\right|^2dxdydt\Big).\end{aligned}$$

つまり熱核の BMO-bound (6.2) があれば

$$\sup_{x_0,R>0}\nu\int_0^{R^2}\left(\frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}|\nabla e^{\nu t\Delta}u_0-\nabla e^{\nu t\Delta}u_0|^2dxdy\right)dt\le C\|u_0\|_{BMO}^2 \tag{6.4}$$

が従う. さらにこの評価の証明はそのまま Koch-Tataru 評価 (3.2) の別証明を与えることになる.

□

上の評価式 (6.4) 左辺は Chmin-Larner 形の norm となっていて

$$\begin{aligned}\Big\|\|\nabla e^{\nu s\Delta}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\Big\|_{BMO}^2 =& \sup_{x_0,R>0}\int_0^\infty \frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}|\nabla e^{\nu s\Delta}u_0-\nabla e^{\nu s\Delta}u_0|^2dxdydt\\ \le&\frac{1}{2}\|u_0\|_{BMO}^2\end{aligned}$$

と見なすことができる. 同様に等号 (6.1) から (6.3) とは逆の不等式を考えると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_0\|_{BMO}^2\le& \sup_{x_0,R>0}\int_0^\infty \frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}|\nabla e^{\nu t\Delta}u_0-\nabla e^{\nu t\Delta}u_0|^2dxdydt\\ &+\sup_{x_0,R>0}\int_0^\infty\left|\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\nabla_x e^{\nu t\Delta}u_0dx\right|^2dt\\ \le& C\sup_{x_0,R>0}\int_0^\infty\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}|\nabla e^{\nu t\Delta}u_0|^2dxdt\\ &(\text{または})\\ \le& C\sup_{x_0,R>0}\int_0^\infty \frac{1}{|B_R|^2}\iint_{B_R(x_0)\times B_R(x_0)}|\nabla_x e^{\nu t\Delta_x}u_0(x)-\nabla_y e^{\nu t\Delta_y}u_0(y)|^2dxdydt\end{aligned}$$

を得ることができる. 従って右辺は u_0 の BMO-norm と同値な表現となる.

References

[1] Amann, H., *Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Vol I Abstract Linear Theory*, Monographs in Math. Vol **89**, Birkhäuser Verlag, Basel·Boston·Berlin, 1995.

[2] Auscher, P., Frey, D., *On well-posedness of parabolic equations Navier-Stokes type with BMO^{-1} data*, J. Inst. Math. Jussieu, **16** (2017), 947-985.

[3] Benedek, A., Calderón, A. P., Panzone, R., *Convolution operators on Banach space valued functions*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **48** (1962), 356–365.

[4] Bergh, J., Löfström, J., *Interpolation Spaces; an introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[5] Biler, P., *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, III*, Colloq. Math., **68** (1995), 229–239.

[6] Biler, P., Nadzieja, T., *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interactions of particles I*, Colloq. Math., **66** (1994), 319-334.

[7] Bourgain, J., Pavlović, N., *Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D,* J. Funct. Anal., **255** (2008), 2233-2247.

[8] Cannone, M., *Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes,* Diderot Editeur, Arts et Sciences Paris-New York-Amsterdam, 1995.

[9] Cannone, M., Planchon, F., *Self-similar solutions for Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, Comm. P.D.E., **21** (1996), 179–193.

[10] Chemin, J.-Y., Lerner, N., *Flot de champ de vecteurs non lipschitziens et équations de Naveir-Stokes*, J. Differential Equations, **121** (1995), 314-328.

[11] Childress, S., Percus, J.K., *Nonlinear aspect of chemotaxis*, Math. Biosciences, **56** (1981), 271-273.

[12] Danchin, R., *Density-dependent incompressible viscous fluids in critical spaces*, Proc. Roy Soc. Edinburgh **133A** (2003), 1311-1334.

[13] Danchin, R., *On the uniqueness in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations*, Nonlinear Diff. Equations Appl., **12** (2005), 111-128.

[14] Danchin, R., *Well-posedness in critical spaces for barotropic viscous fluids with truly not constant density*, Comm. Partial Differential Equations, **32** (2007), 1373-1397.

[15] Da Prato, G., Grisvard, P., *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationelles*, J. Math. Pure Appl. **54** (1975), 305-387.

[16] Denk, R., Hieber, M., Prüss, J., *Optimal L_p-L_q estimate for parabolic boundary value with inhomogeneous data*, preprint.

[17] De Simon, L., *Un'applicazione della teoria degli integrali singolri allo studio delle equazioni differenziali astratta del primo ordine*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **34** (1964), 157-162.
[18] Dore, G., Venni, A., *On the closedness of the sum of two closed operators*, Math. Z., **196** (1987), 189-201.
[19] Fefferman, C., Stein, E. M., *H^p spaces of several variables.* Acta Math. **129** (1972), 137–193.
[20] Frazier, M., Jawerth, B., *A discreate transform and decomposition of distribution spaces*, J. Funct. Anal. **93** (1990), 34-170.
[21] Fujita, H., Kato, T., *On Navier-Stokes initial value problem 1* , Arch. Rat. Mech. Anal. **46** (1964), 269-315.
[22] Giga, Y., Miyakawa, T., *Navier-Stokes flow in r^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces,* Comm. P. D. E., **14** (1989), 577-618.
[23] Giga, Y., Saal, J., *L^1 maximal regularity for the Laplacian and applications*, Discrete Conti. Dyn. Syst. **I** (2011), 495-504.
[24] Hieber, M., Prüss, J., *Heat kernels and maximal L^p-L^q estimates for parabolic evolution equations*, Comm. P.D.E., **22** (1997), 1674-1669.
[25] Iwabuchi, T., *Maximal regularity for parabolic equation in the modulation spaces*, private communication.
[26] Iwabuchi, T., Nakamura, M., *Small solutions for nonlinear heat equations, the Navier-Stokes equations, and Keller-Segel system in Besov and Triebel-Lizorkin spaces*, Adv. Differential Equations **7-8** (2013), 687-736.
[27] Iwabuchi, T., Takada, R., *Global well-posedness and ill-posedness for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force in function spaces of Besov type*, J. Funct. Anal. **267** (2014), 1321-1337.
[28] Jäger, W., Luckhaus, S., *On explosions of solutions to a system of partial differential equations modeling chemotaxis*, Trans. Amer. Math. Soc., **329** (1992), 819-824.
[29] John, F., Nirenberg, L., *On Functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415-426.
[30] Kalton, N., Weis, L., *The H^∞-calculus and sums of closed operators*, Math. Ann., **321** (2001), 319–345.
[31] Keller, E. F., Segel, L. A., *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability,* J. Theor. Biol., **26** (1970), 399-415.
[32] Kato, T., *Strong L^p - solution of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions,* Math. Z., **187** (1984), 471-480.
[33] Koch, H., Tataru, D., *Well-posedness foir the Navier-Stokes equations,* Adv. Math., **154** (2001), 22-35.
[34] Kozono, H., Sugiyama, Y., Yahagi, Y. *Existence and uniqueness theorem on weak solutions to the parabolic-elliptic Keller-Segel system*, J. Differential Equations, **253** (2012), 2295-2313.
[35] Kozono, H., Yamazaki, M., *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), no. 5-6, 959-1014.
[36] Kurokiba, M., Ogawa, T., *Singular limit problem for Keller-Segel system and drift-diffusion system in scaling critical spaces*, J. Evol, Equations, **20** (2020) 421-457.
[37] Kurokiba, M., Ogawa, T., *Singular limit problem for the two-dimensional Keller-Segel system in scaling critical space*, J. Differential Equations **269** (2020) 8959-8997.
[38] Mock, M. S., *An initial value problem from semiconductor device theory*, SIAM, J. Math. **5** (1974), 597-612.
[39] Nagai, T., *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci.Appl., **5** (1995), 581-601.
[40] Nagai, T., *Blowup of non-radial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains*, J. Inequal. Appl., **6** (2001), 37-55.
[41] Nagai, T., Ogawa, T., *Global existence of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in* $\mathbb{R}^2$, Funkcial. Ekvac. **59**, No. 2 (2016), 67-112.
[42] Nagai, T., Senba, T., Yoshida, K., *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funkcial. Ekvac. **40** (1997), no. 3, 411–433.
[43] Ogawa, T., *Singular limit problem to the Keller-Segel system in critical spaces and related medical problems — An Application of Maximal Regularity—*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2020. to appear.
[44] Ogawa, T., Shimizu, S., *The drift-diffusion system in the two dimensional critical Hardy space*, J. Functional Anal. **255** (2008), 1107-1138.
[45] Ogawa, T., Shimizu, S., *End-point maximal regularity and wellposedness of the two dimensional Keller-Segel system in a critical Besov space*, Math. Z., **264** (2010), 601-628.
[46] Ogawa, T., Shimizu, S., *End-point maximal L^1-regularity for the Cauchy problem to a parabolic equation with variable coefficients*, Math. Ann. **365** no.1 (2016), 661-705.
[47] Ogawa, T., Shimizu, S., *Maximal regularity for the Cauchy problem of the heat equation in BMO*, Math. Nachar. (2020) to appear.

[48] Ohyama, T., *Interior regularity of weak solutions of the time-dependent Navier-Stokes equation*, Proc. Japan Acad., **36** (1960), 273-277 .

[49] Patlak, C. S., *Random walk with persistence and external bias*, Bull. Math. Biophys., **15** (1953), 311-338.

[50] Planchon, F., *Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces to the infompressible Navier-Stokes equations in* $\mathbf{R}^3$, Ann. Inst. Henri Poincare, Anal. Non Lineaire, **13** (1996), 319-336.

[51] Peetre, J., *On convolution operators leaving* $L^{p,\lambda}$ *invariant*, Ann. Mat. Pura Appl. **72** (1966), 295-304.

[52] Peetre, J., *On spaces of Triebel-Lizorkin type,* Arch. Mat. **11** (1975), 123-130.

[53] Rubio de Francia, J. L., *Martingale and integral transforms of Banach space valued functions*, In: J. Bastero, M. San Miguel, eds., *Probability and Banach Spaces*, pp.195-222, Lecture Notes in vol. **1221**, Springer Verlag, Berlin, 1986.

[54] Stein, E., *Harmonic Analysis*, Prinston Univ. Press, Prinston, New Jersey 1990.

[55] Triebel, H., *Theory of Function Spaces,* Birkhäuser, Basel, 1983.

[56] Wang, B., *Ill-posedness for the Navier-Stokes equations in critical Besov spaces* $\dot{B}^{-1}_{\infty,q}$, Adv. Math., **268** (2015), 350-372.

[57] Wei, D., *Global well-posedness and blow-up for the 2-D Patlak-Keller-Segel equation*, J. Funct. Anal. **274** (2018), 388–401.

[58] Weis, L., *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal* L_p*-regularity*, Math. Ann., **319** (2001), 735–758.

[59] Yoneda, T., *Ill-posedness of the 3D Navier-Stokes equations in a generalized Besov space near* BMO^{-1}, J. Funct. Anal., **258** (2010), 3376-3387.