The exterior Dirichlet problem for the generalized parabolic k-Hessian equations

広島大学・大学院先進理工系科学研究科　　滝本　和広[1]
Kazuhiro Takimoto
Graduate School of Advanced Science and Technology, Hiroshima University

1　はじめに

次の **k-Hessian 方程式**と呼ばれる偏微分方程式の**外部 Dirichlet 問題**

$$u_t = \mu\left(F_k(D^2u)^{\frac{1}{k}}\right) \quad \text{in } \left(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\right) \setminus \overline{D}, \tag{1.1}$$

$$u = \varphi \quad \text{on } \partial_p D \tag{1.2}$$

の可解性について考察する．ここで，$D \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ $(n \geq 2)$ は有界な凸集合，$u = u(x,t) : \left(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\right) \setminus D \to \mathbb{R}$ は未知関数であり，D^2u は空間変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に関する u の Hesse 行列を表す．また，n 次実対称行列 A に対して，$F_k(A)$ を

$$F_k(A) = S_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{1.3}$$

として定義する．ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ は Hesse 行列 u の固有値，S_k $(k = 1, \ldots, n)$ は **k 次基本対称関数**，即ち

$$S_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \tag{1.4}$$

とする．さらに，$\mu : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を関数とする．

外部 Dirichlet 問題に触れる前に，k-Hessian 方程式

$$F_k(D^2u) = 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

の全域解に関する結果を紹介しよう．$k = 1$ のとき，即ち Poisson 方程式 $\Delta u = 1$ in $\mathbb{R}^n$ のときは，$\mathbb{R}^n$ 上の**凸関数** u が $\Delta u = 1$ in $\mathbb{R}^n$ の解であるならば u は 2 次多項式である，ということが調和関数に対する Liouville の定理を用いて容易に示せる．次に，$k = n$ のとき，即ち，Monge-Ampère 方程式

$$\det D^2u = 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

に対する全域解に関する結果を述べる．

[1]本研究は JSPS 科研費 JP22K03386 の助成を受けたものである．

Theorem 1.1. $\mathbb{R}^n$ 上の凸関数 $u \in C^4(\mathbb{R}^n)$ が (1.6) の解であるならば，u は 2 次多項式である．

この定理は $n=2$ のとき Jörgens [12] により，$n \leq 5$ のとき Calabi [7] により，そして一般の $n \geq 2$ のとき Pogorelov [16] により証明されている．以後，このような全域解の特徴付けに関する定理を **「Bernstein 型定理」** と呼ぶことにする[2]．さらに，Caffarelli [4] は Theorem 1.1 が粘性解に対して成り立つことを示している．

この問題に関連して，Caffarelli, Li [5] は滑らかかつ有界な凸開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\det D^2 u = 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \tag{1.7}$$

の解について考察した．以下，正定値 n 次実対称行列全体を $\mathbb{S}_+^{n\times n}$，行列 X の転置行列を X^T で表すことにする．まず，任意の (1.7) の解に対して，ある $A \in \mathbb{S}_+^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\limsup_{|x|\to\infty} |x|^{n-2} \left| u(x) - \left(\frac{1}{2} x^T A x + b \cdot x + c \right) \right| < \infty \tag{1.8}$$

を満たすこと，即ち，u は空間遠方で「ほぼ」2 次多項式であることを Caffarelli, Li は示した．また，彼らは同じ論文 [5] において，外部 Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \det D^2 u = 1 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.9}$$

を考察し，次の結果を得た．

Theorem 1.2. $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかかつ有界な狭義凸開集合，$\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $A \in \mathbb{S}_+^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ とし，$\det A = 1$ であると仮定する．このとき，ある $c^* = c^*(n, \Omega, \|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})}, A, b)$ が存在して，任意の $c > c^*$ に対して，(1.9) の解 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ で (1.8) を満たすものがただ一つ存在する．

一般の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対する k-Hessian 方程式 (1.5) に対しては，Bao, Chen, Guan, Ji [1] が次の形の Bernstein 型定理を得た．

Theorem 1.3. [1] $1 \leq k \leq n$ とする．$u \in C^4(\mathbb{R}^n)$ が (1.5) の狭義凸な解であり，

$$\exists M_1, M_2 > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}^n,\ u(x) \geq M_1 |x|^2 - M_2 \tag{1.10}$$

を満たすならば，u は 2 次多項式である．

[2] 20 世紀初頭に証明された「$\mathbb{R}^2$ 上の関数のグラフで表せる極小曲面は平面（即ち，1 次関数）に限る」という Bernstein の定理 [3] に由来する．

ここで，$k=1$ および $k=n$ のときは (1.10) の仮定を外すことができるが，$2\le k\le n-1$ の場合に外すことができるか否かは未解決である．Theorem 1.3 に関連して，k-Hessian 方程式の外部問題については Bao, Li, Li [2] により次の結果が得られた．

Theorem 1.4. $n\ge 3$, $2\le k\le n$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ は滑らかかつ有界な狭義凸開集合，$\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$, $A\in\mathbb{S}^{n\times n}_+$, $b\in\mathbb{R}^n$ とし，$F_k(A)=1$ であると仮定する．このとき，ある $c^*=c^*(n,k,\Omega,\|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})},A,b)$ が存在して，任意の $c>c^*$ に対して，

$$\begin{cases} F_k(D^2u)=1 & \text{in } \mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}, \\ u=\varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.11}$$

の解 u で

$$\limsup_{|x|\to\infty}|x|^{2\alpha}\left|u(x)-\left(\frac{1}{2}x^TAx+b\cdot x+c\right)\right|<\infty \tag{1.12}$$

を満たすものがただ一つ存在する．ここで，$\alpha=\alpha(n,k,A)$ は $\alpha\in\big((k-2)/2,(n-2)/2\big]$ を満たす定数である．

この結果は Monge-Ampère 方程式（$k=n$）の場合の Theorem 1.2 の拡張になっており，$k=n$ のときは $\alpha=(n-2)/2$ となる．

Gutiérrez, Huang [11] は Monge-Ampère 方程式の放物型版である

$$-u_t\det D^2u=1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\times(-\infty,0] \tag{1.13}$$

に対する Bernstein 型定理を得た[3]．ここで，$u:\mathbb{R}^n\times(-\infty,0]$ が convex-monotone (resp. strictly convex-monotone) であるとは，$u(x,t)$ が x について凸関数（resp. 狭義凸関数）であり，かつ t について非増加関数（resp. 減少関数）であることをいう．

Theorem 1.5. $u\in C^{4,2}(\mathbb{R}^n\times(-\infty,0])$ が (1.10) の convex-monotone な解で

$$\exists m_1,m_2>0 \text{ s.t. } \forall(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(-\infty,0],\ -m_1\le u_t(x,t)\le -m_2 \tag{1.14}$$

を満たすならば，u はある $m<0$ と x の 2 次多項式 $p(x)$ を用いて $u(x,t)=-mt+p(x)$ と表される．

その後，Xiong, Bao [22] は $u_t=(\det D^2u)^{1/n}$ や $u_t=\log\det D^2u$ を含んだ一般の放物型 Monge-Ampère 方程式に対する Bernstein 型定理を得た．これらの放物型 Monge-Ampère 方程式に対する外部 Dirichlet 問題は [8, 9, 10] などで考察されている．

[3] (1.13) は Krylov [13] によって研究された方程式である．

我々は [14, 15] において，次の形の放物型 k-Hessian 方程式

$$u_t = \mu\left(F_k(D^2u)^{\frac{1}{k}}\right) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0], \tag{1.15}$$

（ただし，$\mu : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は関数）を考察し，(1.15) に対する Bernstein 型定理を得た．

Theorem 1.6. [15] $1 \le k \le n$, $\mu \in C^2(0,\infty)$ とし，$u \in C^{4,2}(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0])$ は (1.15) の strictly convex-monotone な解であり，さらに μ, u は次の (a), (b), (c) を満たすと仮定する．

(a) $\mu'(s) > 0$, $\mu''(s) \le 0$ $(\forall s \in (0,\infty))$.

(b) $\exists m_1, m_2 > 0$ s.t. $\lim_{s\to+0}\mu(s) < -m_1 \le -m_2 < \lim_{s\to\infty}\mu(s)$,
かつ $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$, $-m_1 \le u_t(x,t) \le -m_2$.

(c) $\exists M_1, M_2 > 0$ s.t. $u(x,0) \ge M_1|x|^2 - M_2$.

このとき，u はある $m < 0$ と x の 2 次多項式 $p(x)$ を用いて $u(x,t) = -mt + p(x)$ と表される．

Example 1.1. Theorem 1.6 の仮定を満たす μ の例として次が挙げられる．

(i) $\mu(s) = -1/s^k \longrightarrow -u_tF_k(D^2u) = 1$ in $\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$.

(ii) $\mu(s) = -1/s \longrightarrow -u_tF_k(D^2u)^{1/k} = 1$ in $\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$.

(iii)[4] $\mu(s) = s \longrightarrow -u_t + F_k(D^2u)^{1/k} = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$.
（さらに $k = 1$ ならば $u_t = \Delta u$ in $\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$）

(iv) $\mu(s) = k\log s \longrightarrow -u_t + \log F_k(D^2u) = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$.

本論文では，放物型 k-Hessian 方程式の外部 Dirichlet 問題 (1.1)-(1.2) の可解性について考察する．次の第 2 節では主結果を述べ，その証明を第 3 節および第 4 節で行う．最後に，第 5 節で今後の課題について述べる．

[4]実際には，適当な定数 $C > 0$ を用いて $\mu(s) = s - C$ として適用する．詳しくは [15] を参照されたい．

2 主結果

本節では，本論文の主結果である放物型 k-Hessian 方程式の外部 Dirichlet 問題 (1.1)-(1.2) の可解性に関する定理のステートメントを述べる．まずは，集合 $D \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ と関数 $\mu : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ に関する仮定を述べる．ここで，I_n を n 次単位行列とする．

- $D \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ は，次の 2 条件

  (A1) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\} \neq \emptyset$,

  (A2) $\exists c_0 > 0$ s.t. $\forall x \in \Omega$, $D^2 f(x) \geq c_0 I_n$

  を満たす $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ を用いて

  $$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0] \mid f(x) < t \leq 0\} \tag{2.1}$$

  と表すことができる有界な凸集合であると仮定する．

- $\mu \in C^1(0, \infty)$ は

  (B1) $\forall s \in (0, \infty)$, $\mu'(s) > 0$,

  (B2) $\exists m_1, m_2 > 0$ s.t. $\forall s \in (0, \infty)$, $\mu(s) \leq m_1 s + m_2$

  を満たすと仮定する．

我々は放物型 k-Hessian 方程式 (1.1)-(1.2) の外部問題の可解性に関して，次の結果を得た．

Theorem 2.1. [17] $n \geq 3$, $2 \leq k \leq n$, f は (A1), (A2) を満たすとし，D を (2.1) のようにおく．また，$\mu \in C^1(0, \infty)$ は (B1), (B2) を満たすとし，$\varphi \in C^2(\overline{D})$, $A \in \mathbb{S}_+^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ とする．さらに，$p = \mu(F_k(A)^{1/k})$ とおく．

このとき，ある $c^* = c^*(n, k, D, \mu, \|\varphi\|_{C^2(\overline{D})}, A, b)$ が存在して，任意の $c > c^*$ に対して，(1.1)-(1.2) の粘性解 $u \in C\big((\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]) \setminus D\big)$ で

$$\limsup_{|x|^2 - t \to \infty} \left(|x|^2 - t\right)^\alpha \left| u(x,t) - \left(pt + \frac{1}{2} x^T A x + b \cdot x + c\right) \right| < \infty \tag{2.2}$$

を満たすものがただ一つ存在する．ここで，$\alpha = \alpha(n, k, A)$ は $2 \leq k \leq n-1$ ならば $\alpha \in \big((k-2)/2, (n-2)/2\big]$ を満たす定数，$k = n$ ならば $\alpha = (n-2)/2$ である．

Example 2.1. Example 1.1 で挙げた μ はすべて Theorem 2.1 の仮定を満たす．

(i) $\mu(s) = -1/s^k \longrightarrow -u_t F_k(D^2 u) = 1$ in $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus \overline{D}$.

(ii) $\mu(s) = -1/s \longrightarrow -u_t F_k(D^2 u)^{1/k} = 1$ in $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus \overline{D}$.

(iii) $\mu(s) = s \longrightarrow -u_t + F_k(D^2u)^{1/k} = 0$ in $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus \overline{D}$.

（さらに $k = 1$ ならば $u_t = \Delta u$ in $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus \overline{D}$

(iv) $\mu(s) = k \log s \longrightarrow -u_t + \log F_k(D^2u) = 0$ in $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus \overline{D}$.

3　準備

まず，放物型 k-Hessian 方程式

$$u_t = \mu\left(F_k(D^2u)^{\frac{1}{k}}\right) \tag{3.1}$$

の粘性解について成り立つ性質を証明なしで述べる．なお，関数 u に対し u の上半連続包を u^* で表す.

Lemma 3.1. $\mu \in C^1(0,\infty)$ は (B1), (B2) を満たすとする．$D_1 \subset D_2 \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ を開集合とし，$u \in USC(D_2)$ は D_2 上で (3.1) の粘性劣解，$v \in USC(\overline{D_1})$ は D_1 上で (3.1) の粘性劣解であり，

$$u \le v \quad \text{in } D_1, \qquad u = v \quad \text{on } \partial D_1 \setminus \partial D_2 \tag{3.2}$$

が成り立つと仮定する．このとき，

$$w(x,t) = \begin{cases} v(x,t) & ((x,t) \in D_1) \\ u(x,t) & ((x,t) \in D_2 \setminus D_1) \end{cases} \tag{3.3}$$

で定義される $w \in USC(D_2)$ は D_2 上で (3.1) の粘性劣解である．

Lemma 3.2. $\mu \in C^1(0,\infty)$ は (B1), (B2) を満たすとする．$D_1 \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ を有界開集合とし，$u \in USC(\overline{D_1})$, $v \in LSC(\overline{D_1})$ はそれぞれ D_1 上で (3.1) の粘性劣解，粘性優解であると仮定する．このとき，

$$\sup_{D_1}(u - v) \le \sup_{\partial_p D_1}(u - v) \tag{3.4}$$

が成立する.

Lemma 3.3. $\mu \in C^1(0,\infty)$ は (B1), (B2) を満たすとする．$D_1 \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ を開集合とし，$\mathcal{A}$ を空でない D_1 上での (3.1) の粘性劣解の族とする．このとき

$$u(x,t) = \sup\{v(x,t) \mid v \in \mathcal{A}\} \quad ((x,t) \in D_1) \tag{3.5}$$

とおくと，もし $u^*(x,t) < \infty$ $((x,t) \in D_1)$ ならば u^* は D_1 上で (3.1) の粘性劣解である.

Lemma 3.4. $\mu \in C^1(0,\infty)$ は (B1), (B2) を満たすとする．$D_1 \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ を開集合，$\overline{u} \in LSC(\overline{D_1})$ を D_1 上で (3.1) の粘性優解とし，

$$\mathcal{S} = \{v \mid v \text{ は } D_1 \text{ 上で (3.1) の粘性劣解，かつ } v \le \overline{u} \text{ in } D_1\} \tag{3.6}$$

とする．このとき，もし $\mathcal{S} \neq \emptyset$ ならば,

$$u(x,t) = \sup\{v(x,t) \mid v \in \mathcal{S}\} \quad ((x,t) \in D_1) \tag{3.7}$$

とおくと，u は D_1 上で (3.1) の粘性解である．

次に，(1.1)-(1.2) の粘性劣解の構成に必要な補題を述べる．

Lemma 3.5. [23] $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty,0] \mid f(x) < t \le 0\}$ は Theorem 2.1 の仮定を満たす集合，$\varphi \in C^2(\overline{D})$, $A \in \mathbb{S}_+^{n\times n}$ とする．このとき，ある $c_0 = c_0(n, \|\varphi\|_{C^2(\overline{D})}, D, A)$ が存在して，任意の $\overline{c} > c_0$ と任意の $\xi \in \overline{\Omega}$ に対して次が成立する：

$\exists C = C(n, \|\varphi\|_{C^2(\overline{D})}, D, A, \overline{c})$, $\exists \overline{x} = \overline{x}(\xi)$
s.t. $|\overline{x}(\xi)| \le C$，かつ次で定義される $\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ 上の関数

$$\begin{aligned} w_\xi(x,t) = \varphi(\xi, f(\xi)) - \overline{c}(t - f(\xi)) &+ \frac{1}{2}(x-\overline{x})^T A (x-\overline{x}) \\ &- \frac{1}{2}(\xi-\overline{x})^T A(\xi - \overline{x}) \end{aligned}$$

は $w_\xi < \varphi$ on $\partial_p D \setminus \{(\xi, f(\xi))\}$ を満たす.

最後に，(1.1)-(1.2) の粘性優解の構成に必要な補題を証明つきで述べる．

Lemma 3.6. $\mu \in C^1(0,\infty)$ は (B1), (B2) を満たすとする．$D_1 \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ を開集合，$v \in LSC(D_1)$ を (1.1) の D_1 上の粘性劣解とする．このとき，v は

$$v_t = \frac{m_1 \binom{n}{k}^{\frac{1}{k}}}{n} \Delta v + m_2 \tag{3.8}$$

の D_1 上の粘性劣解である．

Proof. 任意のテスト関数 $h \in C^{2,1}(D_1)$ と任意の点 $(\overline{x}, \overline{t}) \in D$ を

$$h(\overline{x}, \overline{t}) = v(\overline{x}, \overline{t}), \qquad h \ge v \quad \text{in } D_1 \cap \{t \le \overline{t}\} \tag{3.9}$$

を満たすように取る．このとき，粘性劣解の定義，Newton-Maclaurin の不等式および (B2) により

$$
\begin{aligned}
h_t(\overline{x},\overline{t}) &\leq \mu\left(F_k(D^2 h(\overline{x},\overline{t}))^{\frac{1}{k}}\right) \\
&\leq \mu\left(\frac{\binom{n}{k}^{\frac{1}{k}}}{n} F_1(D^2 h(\overline{x},\overline{t}))\right) \\
&\leq m_1 \cdot \frac{\binom{n}{k}^{\frac{1}{k}}}{n} F_1(D^2 h(\overline{x},\overline{t})) + m_2 = \frac{m_1 \binom{n}{k}^{\frac{1}{k}}}{n} \Delta h(\overline{x},\overline{t}) + m_2 \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

が成立する．従って，v は (3.8) の D_1 上の粘性劣解である． □

4 Theorem 2.1 の証明

一般性を失うことなく，

- 平行移動することで，$0 \in \Omega$
- 座標を回転することで，$A = \mathrm{diam}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n > 0)$
- $u(x,t) - b \cdot x$ を考えることで，$b = 0$
- $u(x,t) - \max\{m_2, p+1\}t$ を考えることで，$m_2 = 0$ かつ $p \leq -1$

としてよい．また，以下では次の記号を用いる．

- $D_s = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0] \,\middle|\, pt + x^T Ax/2 - s < 0\right\}$.
- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し，$S_{k-1;i}(\lambda) = \partial S_k(\lambda)/\partial \lambda_i$.
- $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.（このとき，$S_k(a) = F_k(A)$）
- $g_k(a) = \max_{i=1,2,\ldots,n} a_i S_{k-1;i}(a)$

$g_k(a)$ は [2] で導入された記号である．また，$k = n$ ならば $a_i S_{k-1;i}(a) = S_k(a)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ であるから $g_k(a) = 1$ であり，$2 \leq k \leq n-1$ ならば $a_i S_{k-1;i}(a) < S_k(a)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ かつ $\sum_{i=1}^n a_i S_{k-1;i}(a) = kS_k(a)$ であるから $k/n \leq g_k(a) < 1$ であることに注意する．

(1.1)-(1.2) の解の一意性の証明を述べよう．$u, v \in C\big((\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]) \setminus D\big)$ が (1.1)-(1.2) の粘性解であり，

$$\limsup_{|x|^2 - t \to \infty} \left(|x|^2 - t\right)^{\alpha} \left| u(x,t) - \left(pt + \frac{1}{2} x^T A x + c\right) \right| < \infty, \tag{4.1}$$

$$\limsup_{|x|^2 - t \to \infty} \left(|x|^2 - t\right)^{\alpha} \left| v(x,t) - \left(pt + \frac{1}{2} x^T A x + c\right) \right| < \infty \tag{4.2}$$

を満たすと仮定すると，$\alpha > 0$ であるから，

$$|u(x,t) - v(x,t)| \to 0 \quad \text{as } |x|^2 - t \to \infty \tag{4.3}$$

が成立する．従って，任意に $\varepsilon > 0$ を取ると，ある s_0 が存在して，$s \geq s_0$ ならば $D \subset D_s$ かつ

$$u + \varepsilon \geq v \quad \text{in } \big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D_s \tag{4.4}$$

が成立する．$u + \varepsilon$ も (1.1) の粘性解であるから，Lemma 3.2 により $u + \varepsilon \geq v$ in $D_s \setminus D$ を得る．$s \geq s_0$ の任意性により $u + \varepsilon \geq v$ in $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D$ が成立する．$\varepsilon \to +0$ とすれば $u \geq v$ in $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D$ を得る．u と v の立場を逆にすれば $u \leq v$ in $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D$ を得るので，一意性は証明された．

(1.1)-(1.2) の解の存在の証明を述べよう．まずは境界条件 $w = \varphi$ on $\partial_p D$ を満たす (1.1) の粘性劣解 w の存在を示す．各 $\xi \in \overline{\Omega}$ に対して，Lemma 3.5 で得られる w_ξ は $w_\xi(\xi, f(\xi)) = \varphi(\xi, f(\xi))$ を満たし，もし $\bar{c} \geq -\mu\left(F_k(A)^{1/k}\right) = -p$ ならば，$(w_\xi)_t(x,t) = -\bar{c} \leq p = \mu\left(F_k(A)^{1/k}\right) = \mu\left(F_k(D^2 w_\xi(x,t))^{1/k}\right)$ $\big((x,t) \in \big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D\big)$ であるので w_ξ は (1.1) の粘性劣解であることを示すことができる．従って，$\bar{c} > \min\{c_0, -p\}$ となる $\bar{c}$ を一つ取り，

$$w(x,t) = \sup_{\xi \in \overline{\Omega}} w_\xi(x,t) \quad \big((x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \tag{4.5}$$

とおくと，Lemma 3.5 により $w(x,t) = \varphi(x,t)$ on $\partial_p D$ であり，また Lemma 3.3 により w は (1.1) の粘性劣解であることがわかる．また，w の構成法により w は $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D$ 上で局所 Lipschitz 連続である．

次に，$D_{s_1} \subset D \subset D_{s_2}$ となる $s_2 > s_1 > 0$ を取り，$s_3 = s_2 + 1$ とおく．また，$\beta = k/(2g_k(a))$ (> 1) とおく．$(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ に対して $h = pt + x^T A x/2 = pt + \sum_{i=1}^n a_i x_i^2/2$ と定める．$\rho > 0$ に対して

$$u_\rho(x,t) = U_\rho(h) = \int_{s_2}^{h} \left(1 + \rho r^{-\beta}\right)^{\frac{1}{k}} \, dr + \inf_{D_{s_2}} w \quad \big((x,t) \in \big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D_{s_1}\big) \tag{4.6}$$

とおく．すると，$D \subset D_{s_2}$ であるから

$$u_\rho(x,t) \leq \inf_{D_{s_2}} w \leq w(x,t) \quad \text{for } (x,t) \in \partial_p D \tag{4.7}$$

が成立する．また，ρ を大きく取れば

$$u_\rho(x,t) = \int_{s_2}^{s_2+1} (1+\rho r^{-\beta})^{\frac{1}{k}}\, dr + \inf_{D_{s_2}} w \geq w(x,t) \quad \text{for } (x,t) \in \partial_p D_{s_3} \tag{4.8}$$

が成立する．さらに，$U''_\rho(h) < 0$ $(h \geq s_1)$ に注意すると，$\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus \overline{D_{s_1}}$ 上で

$$\begin{aligned} F_k(D^2 u_\rho) &= (U'_\rho)^k S_k(a) + U''_\rho (U'_\rho)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} S_{k-1;i}(a) a_i^2 x_i^2 \\ &\geq S_k(a) \left[(U'_\rho)^k + 2g_k(a) h U''_\rho (U'_\rho)^{k-1} \right] = S_k(a) \end{aligned} \tag{4.9}$$

を得るので，(A1) と $p < 0$ により

$$\mu\left(F_k(D^2 u_\rho)^{\frac{1}{k}}\right) \geq \mu\left(S_k(a)^{\frac{1}{k}}\right) = pU'_\rho = (u_\rho)_t \tag{4.10}$$

が成立する．従って，

$$\underline{u}(x,t) = \begin{cases} \max\{w(x,t), u_\rho(x,t)\} & \big((x,t) \in D_{s_3} \setminus D_{s_1}\big) \\ u_\rho(x,t) & \big((x,t) \in \big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D_{s_3}\big) \end{cases} \tag{4.11}$$

とおくと，(4.8), (4.10) と Lemma 3.1, Lemma 3.2 により $\underline{u}$ は (1.1) の粘性劣解であり，また (4.7) により $\underline{u} = w = \varphi$ on $\partial_p D$ が成り立つ．さらに，(4.6) により

$$u_\rho(x,t) = pt + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \eta(\rho) + O\big((|x|^2 - t)^{-\alpha}\big) \quad \text{as } |x|^2 - t \to \infty \tag{4.12}$$

が成立することがわかる．ここで，

$$\eta(\rho) = \int_{s_2}^{\infty} \left[(1+\rho r^{-\beta})^{\frac{1}{k}} - 1\right] dr - s_2 + \inf_{D_{s_2}} w \tag{4.13}$$

であり，$\alpha = \beta - 1 \begin{cases} \in [(k-2)/2, (n-2)/2) & (2 \leq k \leq n-1) \\ = (n-2)/2 & (k = n) \end{cases}$ である（計算の詳細は省略）．η は $(0,\infty)$ 上で連続であり $\lim_{\rho\to\infty} \eta(\rho) = \infty$ であるので，ある c^* が存在して，$c > c^*$ ならば，うまく ρ を選ぶことにより

$$\underline{u}(x,t) = pt + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + c + O\big((|x|^2 - t)^{-\alpha}\big) \quad \text{as } |x|^2 - t \to \infty \tag{4.14}$$

が成立する．

最後に，$\underline{u} \leq \overline{u}$ in $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D$ を満たす (1.1) の粘性優解 $\overline{u}$ の存在を示す．

$$\overline{u}(x,t) = h + c = pt + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + c \quad \big((x,t) \in \big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D\big) \tag{4.15}$$

とおくと，$\overline{u}$ が (1.1) の粘性解であることは容易に示せる．必要ならば ρ, c^* を大きくすると，$c > c^*$ ならば

$$\overline{u} = s_1 + c \geq w \geq u_\rho \quad \text{on } \partial_p D_{s_1}, \tag{4.16}$$

$$\overline{u} = s_3 + c \geq w \quad \text{on } \partial_p D_{s_3} \tag{4.17}$$

とできる．このとき，$\displaystyle\lim_{|x|^2 - t \to \infty} (u_\rho(x,t) - \overline{u}(x,t)) = 0$ と (4.16), (4.17), Lemma 3.3 により

$$u_\rho \leq \overline{u} \quad \text{in } \big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D_{s_1}, \tag{4.18}$$

$$w \leq \overline{u} \quad \text{in } D_{s_3} \setminus D_{s_1} \tag{4.19}$$

を得る．従って，(4.11) により $\underline{u} \leq \overline{u}$ in $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D$ が成立する．

ここで，

$$\mathcal{S} = \{v \mid v \text{ は (1.1) の粘性劣解，かつ } v \leq \overline{u} \text{ in } \big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D\} \tag{4.20}$$

$$u(x,t) = \sup\{v(x,t) \mid v \in \mathcal{S}\} \quad \Big((x,t) \in \big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D\Big) \tag{4.21}$$

とおくと，$\underline{u} \in \mathcal{S}$ であるので $\mathcal{S} \neq \emptyset$ であり，Lemma 3.4 により u は (1.1) の粘性解である．この u が境界条件 (1.2) を満たすことを示せば証明が完結する．まず，$u \geq \underline{u}$ in $\big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus D$ であるから，任意の $(\xi, f(\xi)) \in \partial_p D$ に対して

$$\liminf_{(x,t) \to (\xi, f(\xi))} u(x,t) \geq \lim_{(x,t) \to (\xi, f(\xi))} \underline{u}(x,t) = \varphi(\xi, f(\xi)) \tag{4.22}$$

が成立する．次に，任意に $v \in \mathcal{S}$ を取ると，Lemma 3.6 により v は

$$v_t = \frac{m_1 \binom{n}{k}^{\frac{1}{k}}}{n} \Delta v \quad \text{in } \big(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]\big) \setminus \overline{D} \tag{4.23}$$

の粘性劣解である．$\overline{v} \in C^{2,1}(D_{s_2} \setminus \overline{D}) \cap C(\overline{D_{s_2}} \setminus D)$ を次の熱方程式の Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \overline{v}_t = \frac{m_1 \binom{n}{k}^{\frac{1}{k}}}{n} \Delta \overline{v} & \text{in } D_{s_2} \setminus \overline{D} \\ \overline{v} = \varphi & \text{on } \partial_p D \\ \overline{v} = \displaystyle\sup_{\partial_p D_{s_2}} \overline{u} & \text{on } \partial_p D_{s_2} \end{cases}$$

を満たす関数とすると，Lemma 3.2（を $k = 1$, $\mu(s) = m_1 \binom{n}{k}^{\frac{1}{k}} s/n$ に対して適用すること）により $v \leq \overline{v}$ in $\overline{D_{s_2}} \setminus D$ である．故に，(4.21) により $u \leq \overline{v}$ in $\overline{D_{s_2}} \setminus D$ が得られる．従って，任意の $(\xi, f(\xi)) \in \partial_p D$ に対して

$$\limsup_{(x,t) \to (\xi, f(\xi))} u(x,t) \leq \lim_{(x,t) \to (\xi, f(\xi))} \overline{v}(x,t) = \varphi(\xi, f(\xi)) \tag{4.24}$$

が成立する．(4.22), (4.24) により u は境界条件 (1.2) を満たす．

5　今後の課題

k-Hessian 方程式，放物型 k-Hessian 方程式の外部 Dirichlet 問題に関する今後の課題をいくつか挙げて，本論文の締めとする．

(1) 外部 Dirichlet 問題の解の正則性

Monge-Ampère 方程式の解の正則性については多くの結果があり，Theorem 1.2 で述べた通り，外部 Dirichlet 問題 (1.9) の解には内部正則性があることが証明されているが，放物型 Monge-Ampère 方程式および $2 \le k \le n-1$ のときの k-Hessian 方程式，放物型 k-Hessian 方程式に対しては解の正則性に関する結果が得られていないと思われる．

(2) D の条件や空間（時空間）遠方での条件は緩和できるか？

k-Hessian 作用素 $F_k(D^2u)$ が楕円型となるのは凸関数より広いクラスである ***k*-convex な関数**である（[6, 18] などを参照）.「k-Hessian 方程式に対する Bernstein 型定理が k-convex な関数に対して成立するか？」という問題は重要な未解決問題であり，現在も多くの研究がなされている．k-Hessian 方程式，放物型 k-Hessian 方程式の外部 Dirichlet 問題の研究は Bernstein 型定理と大いに関係がああるので，Bernstein 型定理の研究が進むことで外部 Dirichlet 問題の研究が進展する可能性があり，どちらも大変興味深い．

参考文献

[1] J. Bao, J. Chen, B. Guan and M. Ji, *Liouville property and regularity of a Hessian quotient equation*, Amer. J. Math. **125** (2003), 301–316.

[2] J. Bao, H. Li and Y. Li, *On the exterior Dirichlet problem for Hessian equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 6183–6200.

[3] S. Bernstein, *Sur une théorème de géometrie et ses applications aux dérivées partielles du type elliptique*, Comm. Inst. Sci. Math. Mech. Univ. Kharkov **15** (1915-17), 38–45.

[4] L. Caffarelli, *Topics in PDEs: The Monge-Ampère equation*, Courant Institute, New York University, 1995.

[5] L. Caffarelli and Y.Y. Li, *An extension to a theorem of Jörgens, Calabi, and Pogorelov*, Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), 549–583.

[6] L. Caffarelli, L. Nirenberg and J. Spruck, *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III. Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. **155** (1985), 261–301.

[7] E. Calabi, *Improper affine hypersurfaces of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens*, Michigan Math. J. **5** (1958), 105–126.

[8] L. Dai, *Exterior problems of parabolic Monge-Ampère equations for $n = 2$*, Comput. Math. Appl. **67** (2014), 1497–1506.

[9] L. Dai, *Exterior problems for a parabolic Monge-Ampère equation*, Nonlinear Anal. **100** (2014), 99–110.

[10] L. Dai, *Exterior problems for more general parabolic Monge-Ampère equation in more general domain*, J. Math. Anal. Appl. **427** (2015), 1190–1204.

[11] C.E. Gutiérrez and Q. Huang, *A generalization of a theorem by Calabi to the parabolic Monge-Ampère equation*, Indiana Univ. Math. J. **47** (1998), 1459–1480.

[12] K. Jörgens, *Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$*, Math. Ann. **127** (1954), 130–134.

[13] N.V. Krylov, *Sequences of convex functions, and estimates of the maximum of the solution of a parabolic equation*, Siberian Math. J. **17** (1976), 226–236.

[14] S. Nakamori and K. Takimoto, *A Bernstein type theorem for parabolic k-Hessian equations*, Nonlinear Anal. **117** (2015), 211–220.

[15] S. Nakamori and K. Takimoto, *Entire solutions to generalized parabolic k-Hessian equations*, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **176** (2016), 173–190.

[16] A.V. Pogorelov, *On the improper convex affine hyperspheres*, Geometriae Dedicata, **1** (1972), 33–46.

[17] K. Takimoto, *The exterior Dirichlet problem for the generalized parabolic k-Hessian equations*, preprint.

[18] N.S. Trudinger, *On the Dirichlet problem for Hessian equations*, Acta Math. **175** (1995), 151–164.

[19] N.S. Trudinger and X.-J. Wang, *Hessian measures I*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **10** (1997), 225–239.

[20] N.S. Trudinger and X.-J. Wang, *Hessian measures II*, Ann. of Math. **150** (1999), 579–604.

[21] N.S. Trudinger and X.-J. Wang, *Hessian measures III*, J. Funct. Anal. **193** (2002), 1–23.

[22] J. Xiong and J. Bao, *On Jörgens, Calabi, and Pogorelov type theorem and isolated singularities of parabolic Monge-Ampère equations*, J. Differential Equations **250** (2011), 367–385.

[23] Z. Zhou and J. Bao, *On the exterior problem for parabolic k-Hessian equations*, Commun. Pure Appl. Anal. **21** (2022), 3407–3420.