3 次の非線形方程式系の標準化における注意

大阪大学・大学院基礎工学研究科 * 眞崎 聡

Satoshi Masaki

Division of Mathematical Science, Department of Systems Innovation,

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

§1. 序

ここでは, 次の抽象的な 3 次の非線形方程式系を考える:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = \lambda_1|u_1|^2u_1 + \lambda_2|u_1|^2u_2 + \lambda_3u_1^2\overline{u_2} + \lambda_4u_1|u_2|^2 + \lambda_5\overline{u_1}u_2^2 + \lambda_6|u_2|^2u_2, \\ \mathcal{L}u_2 = \lambda_7|u_1|^2u_1 + \lambda_8|u_1|^2u_2 + \lambda_9u_1^2\overline{u_2} + \lambda_{10}u_1|u_2|^2 + \lambda_{11}\overline{u_1}u_2^2 + \lambda_{12}|u_2|^2u_2 \end{cases} \tag{1}$$

ただし, u_j は複素数値の未知関数であり, $\mathcal{L}$ は実線形作用素である. 抽象的な枠組みで考えるものの, 念頭にあるのは $\mathcal{L} = i\frac{d}{dt}$ をとった場合の常微分方程式系 (ODE 系) および $\mathcal{L} = i\partial_t + \Delta$ ととった場合の非線形シュレディンガー方程式系 (NLS 系) である. 複素数値の未知関数を考えるのはこのためである. 右辺の非線形項の形はゲージ不変と呼ばれる性質をみたすものである. 前者の ODE 系は, 非線形シュレディンガー方程式系や非線形クライン・ゴルドン方程式系の時間大域挙動の解析で重要ば役割をもつことが知られている.

ここでは [2,4,5] で導入された (1) の分類・標準化の議論において中心的な役割を果たす (1) の行列-ベクトル表示について考察する. なお, [5] では行列-核表示と呼ばれているがこれは全く同じものである. [4] で導入されたシステムの行列表示も同じものであり, [4] における行列表示を複素数値未知変数に拡張したものに相当する. 以下は以下のように構成されている. 1 節でこの表示とその性質を紹介したのち, 2 節ではその導出を振り返るとともに, 類似の別表示が存在することを示す.

* 〒560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3

1.1　標準化とその方法

方程式系 (1) は変数変換

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad M \in GL_2(\mathbb{R}) \tag{2}$$

で閉じている．つまり, (u_1, u_2) が (1) を解くとき, このようにして定めた (w_1, w_2) も (1) を解く．ただし, その係数は M に応じて変化する．これにより, 与えられた方程式系をより "簡単" な方程式系に帰着することが考えられる．例えば,

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = |u_1|^2 u_1 + (2u_1|u_2|^2 + \overline{u_1}u_2^2), \\ \mathcal{L}u_2 = (2|u_1|^2 u_2 + u_1^2\overline{u_2}) + |u_2|^2 u_2 \end{cases}$$

という方程式系に対して

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

という変数変換を適用すると, 新しい変数が解く方程式系は

$$\begin{cases} \mathcal{L}w_1 = |w_1|^2 w_1, \\ \mathcal{L}w_2 = |w_2|^2 w_2 \end{cases}$$

となる．

数学的には次のように定式化できる．二つの方程式系が変数変換で互いに移りあうとき, これらは本質的に同じものとみなせる．こうして方程式系の間に同値関係が定義される．方程式系を係数を組にした $\mathbb{R}^{12}$ のベクトルと自然に同一視することで, この同値関係は $\mathbb{R}^{12}$ に入っているものとみなせる．この同値関係を $\sim$ 表すとき, 知りたいのは次の 3 つである．

1. 集合 $\mathbb{R}^{12}/\sim$ の構造を調べる;
2. $\mathbb{R}^{12}/\sim$ に属する各同値類に対して, 適切な代表元を一つずつ選ぶ;
3. 与えられた方程式系に対して, それがどの同値類に属するかを調べ, 代表元にどのようにして変換されるかを明らかにする．

1 は方程式系の分類であり, 2 は方程式系の標準形の特定である．そして, 3 が方程式系の標準化に相当する．標準化の手続きを与えることは, 応用の面において特に有用である．

1.2 ハミルトン構造に着目した分類方法

方程式系の分類・標準化については古くから研究がなされている．(例えば, [2] の参考文献を参照.) それらの多くは, $\mathcal{L} = \frac{d}{dt}$ と選んだ, 平面上の ODE 系に対するものである．

ここでは $\mathcal{L} = i\partial_t + \Delta_{\mathbb{R}^d}$ と選んだ際のハミルトン構造に着目した分類を考察する．なお, $\mathcal{L}$ の選び方は $\mathbb{R}^{12}/\sim$ の構造と関係ないことに注意する．しかし, ベースにある flow の性質が変わることにより, 少し見え方が異なる．具体的には, 不変量の役割について新しい理解を与えることができる．

1.3 (1) の行列-ベクトル表示

我々の手法において重要な役割を果たすのが, 方程式系の新しい表示方法である．$\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{12} \in \mathbb{R}^{12}$ に対して

$$C := \begin{bmatrix} \lambda_2 - \lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_8 - \lambda_9 & -\lambda_7 \\ \lambda_5 & -\lambda_3 + \lambda_{11} & -\lambda_9 \\ \lambda_6 & -\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_{12} & -\lambda_{10} + \lambda_{11} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \tag{3}$$

$$V := \begin{bmatrix} \lambda_8 - 2\lambda_9 \\ \frac{1}{2}(-\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_{10} + 2\lambda_{11}) \\ \lambda_4 - 2\lambda_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

と定める．写像 $\Lambda \mapsto (C, V)$ は全単射になっており, 逆写像は次のように与えらえる: $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, $V = (v_k)_{1 \leqslant k \leqslant 3}$ に対して

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = \mathcal{C}_1(u_1, u_2) + \mathcal{V}(u_1, u_2)u_1, \\ \mathcal{L}u_2 = \mathcal{C}_2(u_1, u_2) + \mathcal{V}(u_1, u_2)u_2 \end{cases} \tag{5}$$

と定める．ただし

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(u_1, u_2) :=\ & -(c_{12} + c_{23})|u_1|^2 u_1 + c_{11}(2|u_1|^2 u_2 + u_1^2 \overline{u_2}) \\ & + c_{21}(2u_1|u_2|^2 + \overline{u_1} u_2^2) + c_{31}|u_2|^2 u_2 - (\operatorname{tr} C)\operatorname{Re}(\overline{u_1} u_2) u_1, \\ \mathcal{C}_2(u_1, u_2) :=\ & -c_{13}|u_1|^2 u_1 - c_{23}(2|u_1|^2 u_2 + u_1^2 \overline{u_2}) \\ & - c_{33}(2u_1|u_2|^2 + \overline{u_1} u_2^2) + (c_{21} + c_{32})|u_2|^2 u_2 + (\operatorname{tr} C)\operatorname{Re}(\overline{u_1} u_2) u_2 \end{aligned} \tag{6}$$

および

$$\mathcal{V}(u_1, u_2) := v_1|u_1|^2 + 2v_2 \operatorname{Re}(\overline{u_1} u_2) + v_3|u_2|^2 = \begin{bmatrix} \overline{u_1} & \overline{u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

と与えられる．

1.4 行列表示と方程式系 (1) のハミルトン構造の関係

この表示には二つの良い点がある．一つは, 方程式系 (1) のもつハミルトン構造をよく記述する点である．また, 他のいくつかのタイプの保存則もよく記述する．

1.4.1 複素 ODE 系の 2 次保存量

初めに, 複素 ODE 系の 2 次保存量に関する結果を紹介する．

定理 1.1 ([5, Proposition A.6])**.** *$I \subset \mathbb{R}$ を区間とし, $(u_1, u_2) \in C^1(I; \mathbb{C}^2)$ を (1) で $\mathcal{L} = i\frac{d}{dt}$ と選んだ ODE 系の I 上の解とする．このとき, ${}^{\mathrm{t}}(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ に対して*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}|u_1|^2 & 2\,\mathrm{Re}(\overline{u_1}u_2) & |u_2|^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = 2\,\mathrm{Im}(\overline{u_1}u_2)\begin{bmatrix}|u_1|^2 & 2\,\mathrm{Re}(\overline{u_1}u_2) & |u_2|^2\end{bmatrix} C \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

が成立する．特に ${}^{\mathrm{t}}(a, b, c) \in \ker C$ ならば

$$a|u_1|^2 + 2b\,\mathrm{Re}(\overline{u_1}u_2) + c|u_2|^2$$

は時間に関する保存量になる．さらに, $3 - \mathrm{rank}\, C$ は上の形の保存量で互いに本質的に異なるものの個数を表す．

この結果から, $\mathcal{L} = i\frac{d}{dt}$ と選んだ ODE 系においては C の部分が本質的であることが示唆される．実際に, この ODE 系の場合には, ゲージ変換によって V の部分をゼロとしたものに変換できる．

1.4.2 NLS 系の質量型保存則およびエネルギー型保存則

次に NLS 系の保存則についての結果を紹介する．NLS 系に対する L^2 解, H^1 解という概念を定義なしに用いる．これらについて詳しくは [1] を参照されたい．

質量型の保存則については, 先ほどの複素 ODE 系に対するものに似た結果が得られる:

定理 1.2 ([5, Proposition A.7])**.** *$I \subset \mathbb{R}$ を区間とし, $(u_1, u_2) \in (C(I; L^2(\mathbb{R})) \cap L^4(I; L^\infty(\mathbb{R})))^2$ は (1) で $\mathcal{L} = i\partial_t + \partial_x^2$ と選んだ NLS 系の I 上の L^2 解とする．この*

とき

$$\partial_t \begin{bmatrix} \|u_1\|_{L^2}^2 & 2\,\mathrm{Re}(u_1,u_2)_{L^2} & \|u_2\|_{L^2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} 2\,\mathrm{Im}(\overline{u_1}u_2) \begin{bmatrix} |u_1|^2 & 2\,\mathrm{Re}(\overline{u_1}u_2) & |u_2|^2 \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} dx$$

が成立する[*1]．特に，${}^{\mathrm{t}}(a,b,c) \in \ker C$ ならば

$$a\,\|u_1\|_{L^2}^2 + 2b\,\mathrm{Re}(u_1,u_2)_{L^2} + c\,\|u_2\|_{L^2}^2$$

は時間に関する保存量になる．さらに，$3 - \mathrm{rank}\, C$ は上の形の保存量で互いに本質的に異なるものの個数を表す．

次にエネルギー型の保存則について見てみよう．ここでは

$$a\,\|\partial_x u_1\|_{L^2}^2 + 2b\,\mathrm{Re}(\partial_x u_1, \partial_x u_2)_{L^2} + c\,\|\partial_x u_2\|_{L^2}^2 + (4\text{ 次の積分項}). \tag{8}$$

という形の保存量を探す．質量型の保存則には行列部分 C しか影響を与えないものの，エネルギー型の保存則にはベクトル部分 V の影響も見られる．

定理 1.3 ([5, Proposition A.8])**.** $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし，$(u_1,u_2) \in (C(I;H^1(\mathbb{R})) \cap L^8(I;W^{1,4}(\mathbb{R})))^2$ を (1) で $\mathcal{L} = i\partial_t + \partial_x^2$ と選んだ *NLS* 系の I 上の H^1 解とする．(8) の形の保存量が存在するための必要十分条件は

$$C \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0, \qquad \begin{bmatrix} \mathrm{tr}\, C - 2v_2 & 2v_1 & 0 \\ -v_3 & \mathrm{tr}\, C & v_1 \\ 0 & -2v_3 & \mathrm{tr}\, C + 2v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

となることである．ここで，v_j はベクトル部分 V の第 j 成分を表す．さらに，この条件が満たされている場合，(8) の形の保存量における *4* 次の積分項の部分は

$$\int_{\mathbb{R}} \Big[(a\lambda_1 + b\lambda_7)|u_1|^4 + 4(a\lambda_3 + b\lambda_9)|u_1|^2\,\mathrm{Re}(\overline{u_1}u_2) + 2(a\lambda_4 + b\lambda_{10})|u_1|^2|u_2|^2$$
$$+ 2(a\lambda_5 + b\lambda_{11})\,\mathrm{Re}(\overline{u_1}^2 u_2^2) + 4(b\lambda_5 + c\lambda_{11})|u_2|^2\,\mathrm{Re}(\overline{u_1}u_2) + (b\lambda_6 + c\lambda_{12})|u_2|^4 \Big] dx.$$

と与えられる．

[*1] 正確には，この両辺を I に含まれる区間において時間で積分した式が成立する．

(8) の形の保存量が存在するとき, NLS 系はこの保存量をハミルトニアンとするハミルトン流になっている.

注意 1.4. [4] ではクラインゴルドン方程式系が考察されている. この方程式系は実数値であり係数の縮約がおこり $\mathbb{R}^8$ と同型になる. この縮約は「$\operatorname{tr} C = 0$ かつ $V = 0$」と理解することができる ([2, Section 1.5] を参照). この方程式系におけるエネルギー保存則の成立条件 (ハミルトン構造の存在条件) は 定理**??**において「$\operatorname{tr} C = 0$ かつ $V = 0$」ととったものになる. つまり. 定理 1.1 や定理 1.2 のように C のみの言葉で簡潔に述べることができる.

1.5 行列-ベクトル表示と変数変換

行列-ベクトル表示のもう一つの良い点は, 変数変換の影響を行列操作として明示する点である.

定理 1.5 ([5, Theorem A.5])**.** (C, V) は未知変数 (u_1, u_2) が解く (1) の行列-ベクトル表示とする. 新しい変数 (v_1, v_2) を

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}).$$

によって定義し, この変数が解く (1) の行列-ベクトル表示を (C', V') とする. このとき,

$$C' = \frac{1}{\det M} D(M) C D(M)^{-1} \tag{9}$$

および

$$V' = \frac{1}{\det M} D(M) V \tag{10}$$

が成立する. ここで,

$$D(M) := \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} d^2 & -2cd & c^2 \\ -bd & ad+bc & -ac \\ b^2 & -2ab & a^2 \end{bmatrix} \in SL_3(\mathbb{R}),$$

$$D(M)^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} a^2 & 2ac & c^2 \\ ab & ad+bc & cd \\ b^2 & 2bd & d^2 \end{bmatrix} \in SL_3(\mathbb{R}).$$

である. 特に $\operatorname{rank} C' = \operatorname{rank} C$, $\operatorname{tr} C' = (\det M)^{-1} \operatorname{tr} C$ が成立する.

2 行列-ベクトル表示の導出

この節では, 行列-ベクトル表示がどのようにして得られるかについてまとめる. 上でも述べた通り, この表示のポイントは, 保存則をよく記述する点と変数変換を行列操作として理解できる点の二つを両立しているところにある. 実は, Λ と (C,V) の対応として, (3)-(7) が定める対応以外のものも存在することが分かる. より詳しく述べると, $\Lambda \mapsto C$ の対応は (3) と同一のものとなるような全単射 $\mathbb{R}^{12} \to M_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ が他にも構成できる (定義 2.2 を参照). それらに対しては定理 1.1, 1.2, 1.5 も同様に成立する. しかし, 定理 1.3 については成立しない.

実は, 変数変換を行列操作として書きあらわすような (1) の行列表示は (C,V) の形の他にもいくつか存在する. 例えば, 係数を単純に縦に並べたベクトル

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \\ \lambda_{10} \\ \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{bmatrix}$$

も一種の “行列表現” である. 変数変換 (2) で定めた新しい変数が解く方程式系の係数を $\Lambda' = (\lambda'_j)_{1 \leqslant j \leqslant 12}$ とすると写像 $\Lambda \mapsto \Lambda'$ は線形であるので, 上の形の列ベクトルに左からある 12×12 行列をかける操作として表せる. なお, この 12×12 行列も

$$\begin{aligned} \lambda'_1 = \frac{1}{(ad-bc)^3}\big[&-ad^3\lambda_1 + cd(2ad-bc)\lambda_2 + cd(2bc-ad)\lambda_3 - bc^3\lambda_4 \\ &+ c^2(2bc-3ad)\lambda_5 + ac^3\lambda_6 - bd^3\lambda_7 + ad^3\lambda_8 \\ &+ d^2(3bc-2ad)\lambda_9 + cd(ad-2bc)\lambda_{10} + cd(bc-2ad)\lambda_{11} + bc^3\lambda_{12}\big] \end{aligned}$$

などから具体的に計算可能である. 2.5 節ではこれ以外の例を二つ紹介する.

2.1　行列部分の導出

(3) の定める行列部分 C の導出は定理 1.1 による．$(u_1(t), u_2(t))$ は微分可能とする．まず,

$$\begin{bmatrix}|u_1|^2 & 2\operatorname{Re}(\overline{u_1}u_2) & |u_2|^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{u_1} & \overline{u_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

と 2 次形式に書くことにより,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}|u_1|^2 & 2\operatorname{Re}(\overline{u_1}u_2) & |u_2|^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} = 2\operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix}\overline{u_1} & \overline{u_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\frac{d}{dt}u_1\\ i\frac{d}{dt}u_2\end{bmatrix}\right)$$

が得られる．したがって $(u_1(t), u_2(t))$ が (1) で $\mathcal{L} = i\frac{d}{dt}$ と選んだ ODE 系の解であるならば, この右辺は

$$2\operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix}\overline{u_1} & \overline{u_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1(u_1, u_2)\\ F_2(u_1, u_2)\end{bmatrix}\right)$$

となる. ここで, (F_1, F_2) は (1) の非線形項である．行列部分 C はこの量を計算することによって得られる. 具体的な計算により,

$$\begin{aligned}2\operatorname{Im}(\overline{u_1}F_1(u_1, u_2)) &= 2(\lambda_2 - \lambda_3)|u_1|^2\operatorname{Im}(\overline{u_1}u_2) + 2\lambda_5\operatorname{Im}(\overline{u_1}^2u_2^2) + 2\lambda_6|u_2|^2\operatorname{Im}(\overline{u_1}u_2)\\ &= 2\operatorname{Im}(\overline{u_1}u_2)\begin{bmatrix}|u_1|^2 & 2\operatorname{Re}(\overline{u_1}u_2) & |u_2|^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_2 - \lambda_3\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

が得られる．同様に

$$2\operatorname{Im}(\overline{u_1}F_2(u_1, u_2)) = 2\operatorname{Im}(\overline{u_1}u_2)\begin{bmatrix}|u_1|^2 & 2\operatorname{Re}(\overline{u_1}u_2) & |u_2|^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_8 - \lambda_9\\ \lambda_{11}\\ \lambda_{12}\end{bmatrix},$$

$$2\operatorname{Im}(\overline{u_2}F_1(u_1, u_2)) = 2\operatorname{Im}(\overline{u_1}u_2)\begin{bmatrix}|u_1|^2 & 2\operatorname{Re}(\overline{u_1}u_2) & |u_2|^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\lambda_1\\ -\lambda_3\\ -\lambda_4 + \lambda_5\end{bmatrix}$$

$$2\operatorname{Im}(\overline{u_2}F_2(u_1, u_2)) = 2\operatorname{Im}(\overline{u_1}u_2)\begin{bmatrix}|u_1|^2 & 2\operatorname{Re}(\overline{u_1}u_2) & |u_2|^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\lambda_7\\ -\lambda_9\\ -\lambda_{10} + \lambda_{11}\end{bmatrix}$$

が得られる．これらを組み合わせることで行列部分 C が現れ, 定理 1.1 が従う.

2.1.1 変数変換が C に与える影響について

等式 (9) を示す．本筋とは少し離れるので概略だけ述べる．

Proof. まず, D が群準同型であることを確かめる．つまり,

$$D(M_2M_1) = D(M_2)D(M_1)$$

の成立を確かめる．これは具体的な計算で確かめられる．この性質により (9) が一般の M で成立することを特定の M での成立へと帰着できる．ここでは,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \quad (r \neq 0), \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

の 3 種類を考えれば十分である．一般の $M \in GL_2(\mathbb{R})$ がこの 3 種類の行列で生成されるのがその理由である．これらはそれぞれ第 2 変数を定数倍する変換, 二つの変数を入れ替える変換, 第 1 変数に第 2 変数を加える変換に対応する．この 3 種類の場合に (9) を直接確かめることにより証明ができる． □

2.2 ベクトル部分の導出

我々は行列部分 C を特定した．この状況のもとで次にベクトル部分の形を特定する．つまり (4) で与えられる写像 $\mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^3$ がどのように構成されるかを調べる．

2.2.1 写像 $\Lambda \mapsto C$ の核

初めに, (3) によって定義される写像

$$\mathcal{M} : \mathbb{R}^{12} \ni \Lambda \mapsto C \in M_3(\mathbb{R})$$

の核を調べよう．まず, 定義から簡単に確かめられるように, この写像は線形である．したがって $M_3(\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}^9$ と同型であることに注意すると, この写像 $\mathcal{M}$ は 3 次元の核を持つことがわかる．$C = 0$ を成分の言葉で書くと

$$\begin{aligned} &\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_9 = 0, &\qquad &\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_{11} = \lambda_{10}, \\ &\lambda_1 = \lambda_8, & &\lambda_4 = \lambda_{12} \end{aligned}$$

となる．したがって, $\{\mathbf{e}_j\}_{1 \leqslant j \leqslant 12} \subset \mathbb{R}^{12}$ を $\mathbb{R}^{12}$ の標準基底として

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_8, \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_{10} + \mathbf{e}_{11}, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_{12}$$

と定めると, これらのベクトルが写像 $\mathcal{M}$ の核を張ることが分かる. すなわち

$$\ker\mathcal{M} = \mathrm{Span}\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3\}$$

である.

2.2.2 写像 $\Lambda \mapsto V$ に求められる条件

行列-ベクトル表示は, 行列 C に, $\mathcal{M}$ の核の部分の情報をつけ加えることにより得られる. これから構成したい写像

$$\mathcal{N} : \mathbb{R}^{12} \ni \Lambda \mapsto V \in \mathbb{R}^3$$

に求められる性質をまとめると以下のようになる.

1. V は $\ker\mathcal{M}$ と同型;
2. $\mathcal{N}$ は線形;
3. $\Phi := \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ と定めた $\Phi : \Lambda \to M_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ は全単射である.
4. $\mathcal{N}$ および上で定めた Φ は変数変換と交換可能である.

より具体的に述べる. 1 の同型は対応

$$\mathbb{R}^3 \ni V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \leftrightarrow v_1\mathbf{k}_1 + v_2\mathbf{k}_2 + v_3\mathbf{k}_3 \in \ker\mathcal{M}$$

により得られる. また 2 の性質よりこの係数部分 v_j がある線形写像によって定まる. したがって, 1, 2 をまとめると, $\mathcal{N}$ はあるベクトル $\mathbf{n}_j \in \mathbb{R}^{12}$ $(j = 1, 2, 3)$ を用いて

$$\mathbb{R}^{12} \ni \Lambda \mapsto {}^{\mathrm{t}}\!\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} \Lambda \in \mathbb{R}^3$$

と与えられることがわかる. つまり,

$$\mathbb{R}^{12} \ni \Lambda \mapsto (\mathbf{n}_1 \cdot \Lambda)\mathbf{k}_1 + (\mathbf{n}_2 \cdot \Lambda)\mathbf{k}_2 + (\mathbf{n}_3 \cdot \Lambda)\mathbf{k}_3 \in \ker\mathcal{M}$$

という形の対応を与えているのである. ここで $\cdot$ は $\mathbb{R}^{12}$ の内積である. あとは, このベクトル $\mathbf{n}_j$ を, 性質 3, 4 が満たされるように選べばよい.

2.2.3　性質 3 について

性質 3 が成立するための $\mathbf{n}_j$ についての条件を導出しよう．行列 $C = (c_{ij})_{i,j}$ の成分を

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \\ c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{bmatrix}$$

と並べて $\mathbb{R}^9$ と同一視するとき, 写像 $\mathcal{M}$ は

$$\mathbb{R}^{12} \ni \Lambda \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Lambda \in \mathbb{R}^9$$

とかける．右辺に現れる行列の第 k 行が ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{m_k}$ であるとして $\mathbf{m}_j \in \mathbb{R}^{12}$ $(1 \leqslant j \leqslant 9)$ を定める．このとき, 写像 Φ は左から

$$P := {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 & \mathbf{m}_3 & \mathbf{m}_4 & \mathbf{m}_5 & \mathbf{m}_6 & \mathbf{m}_7 & \mathbf{m}_8 & \mathbf{m}_9 & \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} \in M_{12}(\mathbb{R})$$

をかける写像として理解される．したがって, 条件 3 からこの行列 $P \in M_{12}(\mathbb{R})$ が正則であることが必要である．

2.2.4　変数変換が V に与える影響について

次に, V に対して (10) が成立することをみよう．これは性質 4 を確かめる際に重要となる．

Proof. $V = (v_j)_{1 \leqslant j \leqslant 3}$ に対応する元

$$v_1\mathbf{k}_1 + v_2\mathbf{k}_2 + v_3\mathbf{k}_3 \in \ker \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{12}$$

を (1) の形に戻すと

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = \mathcal{V}(u_1, u_2)u_1, \\ \mathcal{L}u_2 = \mathcal{V}(u_1, u_2)u_2 \end{cases}$$

となることに注意する．ここで, $\mathcal{V}(u, v)$ は (7) で与えられる 2 次形式である．この方程式系において変数変換 (2) を実際に施せば, (10) が成立することが確かめられる．これは具体的計算でも確かめられるが, 次のようにしても確かめられる．いったん $\mathcal{V}$ の部分を未知変数と無関係な関数とみなす．このとき, 方程式系は独立した二つの線形方程式になっているので, どのような M を選んでも

$$\begin{cases} \mathcal{L}w_1 = \mathcal{V}(u_1, u_2)w_1, \\ \mathcal{L}w_2 = \mathcal{V}(u_1, u_2)w_2 \end{cases}$$

となることが容易にわかる．あとは, $\mathcal{V}$ の部分を新しい変数 (w_1, w_2) で書き直せばよい．ここで

$$\begin{bmatrix} \overline{u_1} & \overline{u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{w_1} & \overline{w_2} \end{bmatrix} \left({}^{\mathrm{t}}M^{-1} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} M^{-1} \right) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

が成立するので, $V' = (v'_j)_{1 \leqslant j \leqslant 3}$ は等式

$$\begin{bmatrix} v'_1 & v'_2 \\ v'_2 & v'_3 \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{t}}M^{-1} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} M^{-1}$$

によって計算が可能である． この右辺を直接計算することにより (10) が確かめられる． □

2.2.5 $\mathbf{n}_j$ の決定

命題 2.1. $\theta \in \mathbb{R}$ をパラメータとして, $\mathbf{n}_j$ は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\theta & 3\theta-2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{n}_2 &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 0 & \theta-\frac{1}{2} & 1-\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta-\frac{1}{2} & 1-\theta & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{n}_3 &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-\theta & 3\theta-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Proof. $\mathbf{n}_j$ の第 k 成分を n_{jk} と表す ($1 \leqslant j \leqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant 12$)[*2]．まず, 性質 4 から

$$\begin{aligned}
k \notin \{1, 8, 9\} &\Rightarrow n_{1k} = 0, \\
k \notin \{2, 3, 10, 11\} &\Rightarrow n_{2k} = 0, \\
k \notin \{4, 5, 12\} &\Rightarrow n_{3k} = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

[*2] $k \geqslant 10$ のときにも単純に数字を 3 つ並べる．$j < 10$ であるから組 (j, k) は一意に指定される．

が従うことを示す.

(11) の証明. $n_{12}=0$ を背理法で示す. $n_{12}\neq 0$ と仮定する. $\Lambda=\mathbf{e}_2$ に対応する方程式系

$$\begin{cases}\mathcal{L}u_1=|u_1|^2u_2,\\ \mathcal{L}u_2=0\end{cases}$$

を考える. このとき, V の第 1 係数は $P\Lambda$ の第 10 成分をみて $v_1=n_{12}$ となることに注意する. この方程式系に

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & r\end{bmatrix}$$

による変数変換を施す. (9) および (10) より, 行列-ベクトル表現における行列部分とベクトル部分はそれぞれ独立に変換されることがわかる. 特に, (10) から

$$v_1'=v_1=n_{12}$$

であることがわかる. 一方, 方程式系を変数変換を適用すると

$$\begin{cases}\mathcal{L}w_1=r^{-1}|w_1|^2w_2,\\ \mathcal{L}w_2=0\end{cases}$$

となる. つまり $\Lambda'=r^{-1}\mathbf{e}_2$. このとき, v_1' は 1 $P\Lambda'$ の第 10 成分である $r^{-1}n_{12}$ と等しい. ところが, 性質 4 によって二つの計算方法による結果は一致するはずであるので, $r\neq 1$ のときには矛盾が得られる. したがって, $n_{12}=0$ である.

他の場合も同様に扱える. (11) で除外されている k は上の証明において二つの方法で計算した係数の r のべきが一致するためこの議論が働かない場合に相当する. $n_{2k}=0$ を示すには V の第 2 成分を, $n_{3k}=0$ を示すには V の第 3 成分をそれぞれ調べればよい. □

次に, 性質 4 から

$$\eta_{11}=\eta_{312},\qquad \eta_{18}=\eta_{34},\qquad \eta_{19}=\eta_{35},\qquad \eta_{22}=\eta_{210},\qquad \eta_{23}=\eta_{211} \tag{12}$$

が従うことを示す.

(12) の証明. 最初の等式のみを示す. $\Lambda=\mathbf{e}_1$ に対応する方程式系を考える. このとき, v_1 の係数は $P\Lambda$ の第 10 成分をみて η_{11} となることがわかる. (10) を用いると変数を入れ替える変数変換を行うと

$$v_3'=n_{11}$$

が分かる．一方, Λ に対応する方程式系に対して変数の入れ替えを行うと方程式系は $\Lambda' = \mathbf{e}_{12}$ となる．これから v_3' の係数は $P\Lambda'$ の第 12 成分をみて

$$v_3' = n_{312}$$

を得る．性質 4 によりこれら二つの計算結果は一致しなければならない． □

以上の準備のもと, $\mathbf{n}_j$ を決定する．$\Lambda = \sum_{j=1,2,3,4,8,10,11,12} \mathbf{e}_j$ に対応する方程式系を考える．式で書くと,

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = (|u_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{u_1}u_2) + |u_2|^2)u_1, \\ \mathcal{L}u_2 = (|u_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{u_1}u_2) + |u_2|^2)u_2 \end{cases}$$

である．この場合には, 当然 $v_1 = v_2 = v_3 = 1$ となるはずである．(11) および (12) と組み合わせることにより, この条件は

$$n_{11} + n_{18} = 1, \qquad n_{22} + n_{23} = \tfrac{1}{2} \tag{13}$$

となる．

$\Lambda = \mathbf{e}_1$ に対応する方程式系を考えるこのとき, $v_1 = n_{11}$, $v_2 = v_3 = 0$ を得る．この方程式系に

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ととった変数変換 (2) を適用する．このとき, (10) から

$$v_1' = n_{11}, \quad v_2' = -n_{11}, \quad v_3' = n_{11}$$

となる．一方, 直接方程式系に変数変換を適用すると

$$\begin{cases} \mathcal{L}w_1 = |w_1|^2 w_1 - (2|w_1|^2 w_2 + w_1^2\overline{w_2}) + (2|w_2|^2 w_1 + w_2^2\overline{w_1}) - |w_2|^2 w_2, \\ \mathcal{L}w_2 = 0 \end{cases}$$

この式と (12) から

$$v_1' = n_{11}, \quad v_2' = -2n_{22} - n_{23}, \quad v_3' = 2n_{18} + n_{19}$$

を得る．二つの計算方法による結果が一致することから

$$n_{11} = 2n_{22} + n_{23} = 2n_{18} + n_{19} \tag{14}$$

が必要であることが分かる．同様の議論を $\Lambda = \mathbf{e}_3$ に対応する方程式系に対して行うことにより, 関係式

$$n_{23} = n_{18} \tag{15}$$

が得られる．ただし, (12) を用いている．

(13), (14), (15) を組み合わせると係数がすべて決定できる．$n_{11} = \theta$ とおく．(13), (15) より $n_{23} = n_{18} = 1 - \theta$. これらを (14) に代入することで $n_{19} = 3\theta - 2$, $n_{22} = \theta - \frac{1}{2}$ が得られる．直接計算により θ の値によらず $\det P \neq 0$ であることがわかる． $\square$

2.3 行列-ベクトル表示 (3)-(4) の導出

命題 2.1 において $\theta = 0$ と選んだものが (3)-(4) にあたる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{n}_2 &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{n}_3 &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

となるので, 写像 $\mathcal{N}$ は (4) で与えらえるものになる．$(C, V) \mapsto \Lambda$ が (5)-(7) で与えらえることを確かめておこう．P の行・列を見やすい順番に入れ替えると, 写像 $\Lambda \mapsto (C, V)$ は以下のようにかける．

$$
\begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{31} \\ c_{12} \\ v_1 \\ c_{23} \\ c_{32} \\ v_3 \\ c_{21} \\ c_{11} \\ c_{22} \\ c_{33} \\ v_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda_7 \\ \lambda_6 \\ \lambda_1 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \\ \lambda_{12} \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_{10} \\ \lambda_{11} \end{bmatrix}
$$

係数行列は

$$
\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}
$$

とブロック状に分かれており, この逆行列は容易に求められる:

$$
\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.
$$

したがって,

$$
\begin{bmatrix} \lambda_7 \\ \lambda_6 \\ \lambda_1 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \\ \lambda_{12} \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_{10} \\ \lambda_{11} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{31} \\ c_{12} \\ v_1 \\ c_{23} \\ c_{32} \\ v_3 \\ c_{21} \\ c_{11} \\ c_{22} \\ c_{33} \\ v_2 \end{bmatrix}
$$

これは (5)-(7) に他ならない.

2.4 異なる行列-ベクトル表示

命題 2.1 で述べたように, (3)-(4) とは異なる表示を構成できる. ここでは, $\theta = 1$ と選んだ表示を紹介する. 一般の場合も同様に考えることができる. あるいは, (3)-(4) の定める写像とここで与えられる写像の一次結合として理解できる.

$\theta = 1$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{n}_2 &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{n}_3 &= {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

となる. このとき, 写像 $\Lambda \mapsto (C, V)$ は以下のようにかける.

$$
\begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{31} \\ c_{12} \\ v_1 \\ c_{23} \\ c_{32} \\ v_3 \\ c_{21} \\ c_{11} \\ c_{22} \\ c_{33} \\ v_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda_7 \\ \lambda_6 \\ \lambda_1 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \\ \lambda_{12} \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_{10} \\ \lambda_{11} \end{bmatrix}.
$$

これもブロック状になっており, 逆行列は容易に計算できる:

$$
\begin{bmatrix} \lambda_7 \\ \lambda_6 \\ \lambda_1 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \\ \lambda_{12} \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_{10} \\ \lambda_{11} \end{bmatrix} . = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{31} \\ c_{12} \\ v_1 \\ c_{23} \\ c_{32} \\ v_3 \\ c_{21} \\ c_{11} \\ c_{22} \\ c_{33} \\ v_2 \end{bmatrix} .
$$

これらをまとめると, 次の通りになる.

定義 2.2. 与えられた $\Lambda \in \mathbb{R}^{12}$ に対して, 行列部分 C は (3) と同じ決め方によって定め, 新しいベクトル部分 V' は

$$
V' := \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_9 \\ \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_{10}) \\ \lambda_5 + \lambda_{12} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{16}
$$

と定める. $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, $V' = (v'_k)_{1 \leqslant k \leqslant 3}$ が与えられたとき, 元のシステムは

$$
\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = \mathcal{C}'_1(u_1, u_2) + \mathcal{V}'(u_1, u_2)u_1, \\ \mathcal{L}u_2 = \mathcal{C}'_2(u_1, u_2) + \mathcal{V}'(u_1, u_2)u_2 \end{cases} \tag{17}
$$

と定める. ただし

$$
\begin{aligned} \mathcal{C}'_1(u_1, u_2) :=& \; c_{23}|u_1|^2 u_1 + c_{11}|u_1|^2 u_2 - c_{32} u_1 |u_2|^2 + c_{21}\overline{u_1} u_2^2 + c_{31}|u_2|^2 u_2 \\ & - c_{22} \operatorname{Re}(\overline{u_1} u_2) u_1, \\ \mathcal{C}'_2(u_1, u_2) :=& \; - c_{13}|u_1|^2 u_1 + c_{12}|u_1|^2 u_2 - c_{23} u_1^2 \overline{u_2} - c_{33} u_1 |u_2|^2 - c_{21}|u_2|^2 u_2 \\ & + c_{22} \operatorname{Re}(\overline{u_1} u_2) u_2 \end{aligned} \tag{18}
$$

および

$$
\mathcal{V}'(u_1, u_2) := v'_1 |u_1|^2 + 2 v'_2 \operatorname{Re}(\overline{u_1} u_2) + v'_3 |u_2|^2 \tag{19}
$$

と与えられる.

構成から明らかなように, 定理 1.1, 1.2, 1.5 はこの表示をとった場合にも同様に成立する. しかし, 定理 1.3 は成立しない. $\theta = 0$ と選んだ場合の表示方法の一つの特長は, 実数値方程式系への縮約が見やすい点である ([2, Section 1.5] を参照). この表示にどのような特長や性質があるかは, まだ調べられていない.

2.5 方程式系の他の表示の例

今まで考察したものと異なる表示を紹介する．これは, 複素数の範囲での変数変換に対応した表示を探した結果見つけたものである．(3) の定める写像は複素数の範囲での変数変換には対応していないことに注意する．つまり, 定理 1.5 のような変数変換の明示は $M \in GL_2(\mathbb{C})$ の元に対しては成立しない．他方, これから紹介するものは, 方程式系の係数 λ_j が複素数でよく, 変数変換も複素の範囲でよい．これらの表示においても, 行列の階数などは不変量になっているが, それらの量の持つ意味については, 詳しく調べていない．

2.5.1 行列組による表示

定義 2.3. $\Lambda \in \mathbb{C}^{12}$ に対して複素数値行列の組 (X, Y) を

$$X := \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_8 & \lambda_2 + \lambda_{11} \\ \lambda_3 + \lambda_{10} & \lambda_4 + \lambda_{12} \end{bmatrix}, \qquad Y := \begin{bmatrix} \lambda_5 & -\lambda_2 + \lambda_{11} & \lambda_1 - \lambda_8 & \lambda_7 \\ \lambda_6 & -\lambda_4 + \lambda_{12} & \lambda_3 - \lambda_{10} & \lambda_9 \end{bmatrix}$$

と定める．$\Lambda \mapsto (X, Y)$ は全単射であり, 逆写像は

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = \frac{x_{11}+y_{13}}{2}|u_1|^2 u_1 + \frac{x_{12}-y_{12}}{2}|u_1|^2 u_2 + \frac{x_{21}+y_{23}}{2} u_1^2 \overline{u_2} \\ \qquad\qquad + \frac{x_{22}-y_{22}}{2} u_1 |u_2|^2 + y_{11}\overline{u_1}u_2^2 + y_{21}|u_2|^2 u_2, \\ \mathcal{L}u_2 = y_{14}|u_1|^2 u_1 + \frac{x_{11}-y_{13}}{2}|u_1|^2 u_2 + y_{24} u_1^2 \overline{u_2} \\ \qquad\qquad + \frac{x_{21}-y_{23}}{2} u_1 |u_2|^2 + \frac{x_{12}+y_{12}}{2}\overline{u_1}u_2^2 + \frac{x_{22}+y_{22}}{2}|u_2|^2 u_2 \end{cases}$$

と与えられる．

$Y = 0$ であることと方程式が

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = (\lambda_1|u_1|^2 + \lambda_2\overline{u_1}u_2 + \lambda_3 u_1\overline{u_2} + \lambda_4|u_2|^2)u_1, \\ \mathcal{L}u_2 = (\lambda_1|u_1|^2 + \lambda_2\overline{u_1}u_2 + \lambda_3 u_1\overline{u_2} + \lambda_4|u_2|^2)u_2 \end{cases}$$

の形であることとが対応する．括弧内を複素数値ポテンシャルとみなせば, この形は複素数の範囲での変数変換について閉じていることがわかる．方程式系を (X, Y) の組で表現することは, 大雑把に述べると, 方程式系をこのような形の部分 X とそうでない部分 Y に分けているものと理解できる．

命題 2.4. (X, Y) は未知変数 (u_1, u_2) の解く方程式系 (1) に対応する行列の組とする．複素数の範囲での変数変換

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

により (v_1, v_2) を定める．(v_1, v_2) の解く方程式系 (1) に対応する組を (X', Y') とすると，

$$X' = {}^{\mathrm{t}}\overline{M}^{-1} X M^{-1}, \quad Y' = {}^{\mathrm{t}}\overline{M}^{-1} Y D_R$$

が成立．ただし，

$$D_R = D_R(M) := \frac{1}{(\det M)^2} \begin{bmatrix} p^3 & 3p^2 r & 3pr^2 & r^3 \\ p^2 q & p(ps + 2qr) & r(2ps + qr) & r^2 s \\ pq^2 & q(2ps + qr) & s(ps + 2qr) & rs^2 \\ q^3 & 3q^2 s & 3qs^2 & s^3 \end{bmatrix} \in GL_4(\mathbb{C}).$$

Proof. D_R が $D_R(M_1 M_2) = D_R(M_2) D_R(M_1)$ を満たすこととを確かめる．あとは X', Y' の表示について, M が (複素変数の) 対角行列のとき, 変数の入れ替えに対応する行列のとき, 2 行を 1 行に加える行列のときにそれぞれ確かめればよい． □

2.5.2　4×3 行列による表示

定義 2.5. $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ はパラメータとする．4×3 行列 Z_κ を

$$Z_\kappa = \begin{pmatrix} \lambda_7 & \kappa\lambda_8 & \lambda_{11} \\ \lambda_9 & \kappa\lambda_{10} & \lambda_{12} \\ \lambda_1 & \kappa\lambda_2 & \lambda_5 \\ \lambda_3 & \kappa\lambda_4 & \lambda_6 \end{pmatrix}$$

と定める．それぞれの係数 λ_k はちょうど一度ずつ現れているので, Z_κ はシステム (1) と自然に同一視できる．

命題 2.6. Z_κ は未知変数 (u_1, u_2) の解く方程式系 (1) に対応する行列とする．複素数の範囲での変数変換

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

により (v_1, v_2) を定める．(v_1, v_2) の解く方程式系 (1) に対応する行列を Z'_κ とすると，

$$Z'_\kappa = \frac{1}{|\det M|} \tilde{D}_L Z_\kappa \tilde{D}_R,$$

が成立．ただし，

$$\tilde{D}_L = \tilde{D}_L(M) := \frac{1}{|\det M|}\begin{pmatrix} |s|^2 & -\overline{r}s & r\overline{s} & -|r|^2 \\ -\overline{q}s & \overline{p}s & -\overline{q}r & \overline{p}r \\ q\overline{s} & -q\overline{r} & p\overline{s} & -p\overline{r} \\ -|q|^2 & \overline{p}q & p\overline{q} & |p|^2 \end{pmatrix} \in SL_4(\mathbb{C}),$$

$$\tilde{D}_R = \tilde{D}_R(M;\kappa) := \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} s^2 & -2\kappa qs & q^2 \\ -\frac{1}{\kappa}rs & ps+qr & -\frac{1}{\kappa}pq \\ r^2 & -2\kappa pr & p^2 \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{C}).$$

Proof. $\tilde{D}_L$ と $\tilde{D}_R$ がそれぞれ $\tilde{D}_L(M_1M_2) = \tilde{D}_L(M_1)\tilde{D}_L(M_2)$ および $\tilde{D}_R(M_1M_2) = \tilde{D}_R(M_2)\tilde{D}_R(M_1)$ を満たすこととを確かめる．あとは Z'_κ の表示について, M が (複素変数の) 対角行列のとき, 変数の入れ替えに対応する行列のとき, 2 行を 1 行に加える行列のときにそれぞれ確かめればよい． □

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 JP21H00991, JP21H00993 の支援を受けたものである．本研究は, 京都大学数理解析研究所の共同利用・共同研究拠点事業の支援を受けたものである．

参考文献

[1] Thierry Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 10, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR2002047

[2] Satoshi Masaki, *Classification of a class of systems of cubic ordinary differential equations*, J. Differential Equations **344** (2023), 471–508, DOI 10.1016/j.jde.2022.11.001. MR4510789

[3] ———, *On scalar-type standing-wave solutions to systems of nonlinear Schrodinger equations*, available as arXiv:2212.00754.

[4] Satoshi Masaki, Jun-ichi Segata, and Kota Uriya, *On asymptotic behavior of solutions to cubic nonlinear Klein-Gordon systems in one space dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B **9** (2022), 517–563, DOI 10.1090/btran/116. MR4439505

[5] ———, *Asymptotic behavior in time of solution to system of cubic nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, to appear in Springer Proc. Math. Stat., available as arXiv:2112.06427.