Knörr 格子とテンサー積について

名古屋市立大学　河田成人

Shigeto Kawata
Nagoya City University

G は有限群とし，$(K,\ \mathcal{O},\ k)$ を p-モジュラー系（p は素数）とする．すなわち，K は乗法付値 ν を備えた標数 0 の完備離散付値体であり、$\mathcal{O}$ は極大イデアル $\pi\mathcal{O}$ をもつ ν の付値環で，$k = \mathcal{O}/\pi O$ は標数 p の $\mathcal{O}$ の剰余体とする．ここでは，k は代数的閉体と仮定し，R で $\mathcal{O}$ または k を表すものとする．RG-格子（RG-表現加群）といえば，R-加群として自由な有限生成右 RG-加群を意味する．有限群の表現論にまつわる基本的な用語等については [NT] を参照する．

ここでは，Knörr 格子のテンサー積について，almost split sequence との関わりを通して考察したい．

1　準備

群環 RG 上の表現加群の短完全列

$$\mathscr{A} : 0 \longrightarrow N \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \longrightarrow 0$$

が *almost split sequence* であるとは，次の 3 条件を満たすときをいう：

(1) L と N は直既約である．

(2) $\mathscr{A}$ は分裂列ではない．

(3) 任意の分裂全射でない準同型写像 $g : X \to L$ に対し
ある準同型写像 $h : X \to M$ が存在して $g = f \circ h$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dotted, "h"'] \\ M \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & L \end{tikzcd}$$

射影的でない直既約 RG-表現加群 L で終わる almost split sequence は一意的に存在する（[AR], [RS]）が, それを

$$\mathscr{A}(L) : 0 \longrightarrow \tau L \longrightarrow m(L) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

と書く．Auslander-Reiten translation τ について，$R = \mathcal{O}$ のときは $\tau = \Omega$（Heller operator）であり，$R = k$ のときは $\tau = \Omega^2$ であることが知られている．

自明な RG-加群 R_G の almost split sequence $\mathscr{A}(R_G)$：

$$0 \longrightarrow \tau R_G \longrightarrow m(R_G) \longrightarrow R_G \longrightarrow 0$$

と直既約 RG-表現加群 L のテンサー積 $L \otimes \mathscr{A}(R_G)$:

$$0 \longrightarrow L \otimes \tau R_G \longrightarrow L \otimes m(R_G) \longrightarrow L \otimes R_G = L \longrightarrow 0$$

について，Auslander-Carlson と Benson-Carlson は次の定理を示した．

定理 1.1([AC, Theorem 3.6], [BC, Proposition 2.15]).　$L \otimes \mathscr{A}(R_G)$ について次が成り立つ．

(1) L の階数が p で割り切れれば，$L \otimes \mathscr{A}(R_G)$ は分裂する．

(2) L の階数が p で割り切れないとする．$L \otimes \tau R_G \cong \tau L \oplus I$（$I$ はある入射加群）のとき，$L \otimes \mathscr{A}(R_G)$ は次のように $\mathscr{A}(L)$ と分裂列の直和の形となる：

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathscr{A}(L) : 0 & \longrightarrow & \tau L & \longrightarrow & m(L) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\
 & & \oplus & & \oplus & & & & \\
\text{分裂列：} & & I & = & I & & & &
\end{array}$$

さらに，次の定理も示されている．

定理 1.2([AC, Corollary 4.7], [BC, Theorem 2.1]).　直既約な RG-表現加群 L, X について

$$R_G \mid L \otimes X^* \iff p \nmid \mathrm{rank}_R L \text{ かつ } X \cong L.$$

この場合，$L \otimes L^*$ の直既約分解において R_G は重複度 1 で現れる．

この報告では，Scott RG-表現加群の almost split sequence と RG-表現加群のテンサー積について考察し、その結果を応用して Knörr 格子のテンサー積と Scott 表現加群との関係について言及したい．特に，上述した定理に関連して，L が Knörr 格子の場合を考えていく．

2 Scott 加群の Almost split sequence とテンサー積

Q を G の p-部分群とする．$k_Q\uparrow^G := k_Q \otimes_{kQ} kG$（置換加群）の直規約分解における直既約因子 $\overline{S}(Q)$ で，「k_G が $\overline{S}(Q)$ の $\mathrm{Soc}(\overline{S}(Q))$ の直既約因子として現れる」ものが一意的に存在する．この $\overline{S}(Q)$ を Q をヴァーテックスに持つ Scott kG-加群と呼ぶ．

k 上の置換加群の直和因子は，$\mathcal{O}$ 上の置換加群の直和因子に一意的に持ち上げ可能である．特に $\mathcal{O}_Q\uparrow^G$ の直既約因子で $\overline{S}(Q)$ の持ち上げとなっているものを $S(Q)$ と書き Q をヴァーテックスに持つ Scott $\mathcal{O}G$-加群と呼ぶ：

$$S(Q)/\pi S(Q) \cong \overline{S}(Q)$$

P が Sylow p-部分群のときには，$\overline{S}(P) = k_G$，$S(P) = \mathcal{O}_G$（自明な加群）である．

$\mathsf{Sc}(Q)$ で，Q をヴァーテックスに持つ Scott RG-表現加群を表すことにする．

$$\mathsf{Sc}(Q) = \begin{cases} S(Q) & (R = \mathcal{O}) \\ \overline{S}(Q) & (R = k) \end{cases}$$

注意 2.1. 直既約 RG-表現加群 V が Q-射影的であるとき，V は $\mathsf{Sc}(Q) \otimes V$ の直既約因子として現れる．

証明 まず，Q が G の正規部分群の場合を考える．$\mathsf{Sc}(Q)$ に Q は自明に作用するので，短完全列 $0 \to \Omega R_G \to \mathsf{Sc}(Q) \to R_G \to 0$ を Q に制限すれば分裂する．特に，$0 \to \Omega R_G \otimes V \to \mathsf{Sc}(Q) \otimes V \to R_G \otimes V = V \to 0$ は Q に制限すれば分裂する．一般の場合は，Green 対応を考えれば良い． □

Benson-Carlson は Scott 加群とテンサー積に関して次の命題を示した．

命題 2.2([BC, Proposition 2.4]). 直既約な RG-表現加群 L のヴァーテックスが Q であり，L の Q-source の階数が p で割り切れないとする．このとき，$\mathsf{Sc}(Q)$ が $L \otimes L^*$ の直既約因子として現れる．

$\mathsf{Sc}(Q)$ の almost split sequence $\mathscr{A}(\mathsf{Sc}(Q))$ と RG-表現加群 V のテンサー積 $V \otimes \mathscr{A}(\mathsf{Sc}(Q))$:

$$0 \longrightarrow V \otimes \tau\mathsf{Sc}(Q) \longrightarrow V \otimes m(\mathsf{Sc}(Q)) \longrightarrow V \otimes \mathsf{Sc}(Q) \longrightarrow 0$$

について考える．注意 2.1 から最終項 $V \otimes \mathsf{Sc}(Q)$ の直既約分解において V が直既約因子として現れるが，次が成り立つ．

命題 2.3. Q は G の正規 p-部分郡であるとする．RG-表現加群 V が Q-射影的であれば

$$V \otimes \mathscr{A}(\mathsf{Sc}(Q)) = \mathscr{E}(V) \oplus \text{分裂列}.$$

ここで，$\mathscr{E}(V)$ は次のような形の（τV から始まり V で終わる）短完全列である：

$$0 \longrightarrow \tau V \longrightarrow {}^{\exists}V' \longrightarrow V \longrightarrow 0 \quad (V' \text{ はある } RG\text{-表現加群}).$$

この節の残りで，命題 2.3 の証明をする．まずモジュラー表現（$R = k$）の場合を考える．Q が正規部分群なので，Q をヴァーテックスに持つ Scott kG-加群 $\overline{S}(Q)$ は $k(G/Q)$-加群として k_G の射影被覆である．そのため，$\overline{S}(Q)$ の head と $\Omega\overline{S}(Q)$ の socle は共に k_G である．$\overline{s} : \overline{S}(Q) \to \overline{S}(Q)/\mathrm{Rad}(\overline{S}(Q)) = k_G$ を自然な全射とし，$\overline{j} : k_G = \mathrm{Soc}(\Omega\overline{S}(Q)) \to \Omega\overline{S}(Q)$ を埋込とする．$\phi = \overline{j} \circ \overline{s} \in \mathrm{Hom}_{kG}(\overline{S}(Q), \Omega\overline{S}(Q))$ とおくと次が成り立つ．

補題 2.4. ϕ は almost projective であり，$\mathscr{A}(\overline{S}(Q))$ は射影被覆 $P_{\Omega\overline{S}(Q)} \to \Omega\overline{S}(Q)$ と ϕ の pull-back として構成される：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{A}(\overline{S}(Q)) : 0 & \longrightarrow & \Omega^2\overline{S}(Q) & \longrightarrow & m(\overline{S}(Q)) & \longrightarrow & \overline{S}(Q) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\| & & \Big\downarrow \text{pull-back} & & \Big\downarrow \phi & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^2\overline{S}(Q) & \longrightarrow & P_{\Omega\overline{S}(Q)} & \longrightarrow & \Omega\overline{S}(Q) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

証明 ϕ が射影的でないことを示す：実際，Q は G の正規 p-部分群なので, $\overline{S}(Q){\downarrow_Q}$ (resp. $\Omega\overline{S}(Q){\downarrow_Q}$) は いくつかの k_Q(resp. Ωk_Q) の直和である．よって kQ-準同型写像 $\phi|_Q : \overline{S}(Q){\downarrow_Q} \to \Omega\overline{S}(Q){\downarrow_Q}$ は射影的ではなく, 従って ϕ は射影的ではない.

μ を $\overline{S}(Q)$ の任意の kG-自己準同型写像で同型ではないとしよう．$\mathrm{Im}\ \mu \subseteq \mathrm{Rad}(\overline{S}(Q)) = \mathrm{Ker}\ \phi$ なので $\phi \circ \mu$ は 0-写像となる．このことは ϕ が almost projective であることを意味する. $\square$

注意 2.5. M を Q-射影的 kG-加群とする．Q は G の正規 p-部分群なので $\overline{S}(Q){\downarrow_Q}$ はいくつかの k_Q の直和であり, kQ-準同型写像 $\overline{s}|_Q : \overline{S}(Q){\downarrow_Q} \to k_Q$ は分裂する．したがって kG-準同型写像 $\mathrm{id}_M \otimes \overline{s} : M \otimes \overline{S}(Q) \to M \otimes k_G$ は分裂して，次を得る：

$$\mathrm{id}_M \otimes \phi : \ M \otimes \overline{S}(Q) \overset{\mathrm{id}_M \otimes \overline{s}}{\longrightarrow} M \otimes k_G = M \overset{\mathrm{id}_M \otimes \overline{j}}{\longrightarrow} M \otimes \Omega\overline{S}(Q).$$

短完全列 $M \otimes \mathscr{A}(\overline{S}(Q))$ は $M \otimes P_{\Omega\overline{S}(Q)} \to M \otimes \Omega\overline{S}(Q)$ と $\mathrm{id}_M \otimes \phi$ による pull-back として構成されるので，$M \otimes \mathscr{A}(\overline{S}(Q))$ は「M で終わるような短完全列 $0 \to M'' \to M' \to M \to 0$（ここで M', M'' はある kG-加群)」と「ある分裂列」との直和であると分かる．

また，Q が正規部分群なので，$\overline{S}(Q)$ の socle と $\Omega^{-1}\overline{S}(Q)$ の head は共に k_G である．$\bar{t}: \Omega^{-1}\overline{S}(Q) \to \Omega^{-1}\overline{S}(Q)/\mathrm{Rad}(\Omega^{-1}\overline{S}(Q)) = k_G$ を自然な全射とし，$\bar{i}: k_G = \mathrm{Soc}(\overline{S}(Q)) \to \overline{S}(Q)$ を埋込とする．$\varphi = \bar{i} \circ \bar{t} \in \mathrm{Hom}_{kG}(\Omega^{-1}\overline{S}(Q), \overline{S}(Q))$ とおくと次が成り立つ．

補題 2.6. φ は almost projective であり，$\mathscr{A}(\Omega^{-1}\overline{S}(Q))$ は $\overline{S}(Q)$ の射影被覆 $P_{\overline{S}(Q)}$ と φ の pull-back として構成される．

注意 2.7. W を Q-射影的な kG-とする，$\bar{i}|_Q : k_Q \to \overline{S}(Q){\downarrow_Q}$ が分裂するので，kG-準同型写像 $\mathrm{id}_W \otimes \bar{i} : W \otimes k_G \to W \otimes \overline{S}(Q)$ は分裂する．よって $\mathrm{id}_W \otimes \varphi : W \otimes \Omega^{-1}\overline{S}(Q) \to W \otimes \overline{S}(Q)$ の像は $W \otimes \overline{S}(Q)$ の直和因子 $W \otimes k_G$ に一致する．今，$W \otimes \mathscr{A}(\Omega^{-1}\overline{S}(Q))$ は $W \otimes P_{\overline{S}(Q)} \to W \otimes \overline{S}(Q)$ と $\mathrm{id}_W \otimes \varphi$ の pull-back として構成されるので，$W \otimes \mathscr{A}(\Omega^{-1}\overline{S}(Q))$ は「ΩW で始まるような短完全列 $0 \to \Omega W \to W' \to W'' \to 0$（ここで W', W'' はある kG-加群)」と「ある分裂列」の直和と分かる．

注意 2.8. (1) 短完全列 $\mathscr{E} : 0 \to A \xrightarrow{f} B \to C \to 0$ と直和分解 $A = A_1 \oplus A_2$ について，次の条件 (i) と (ii) は同値である．

(i) A_2 は $\mathscr{E}$ から "split" する：すなわち，$B = B_1 \oplus B_2$（$A_2 \cong B_2$）と直和分解されて

$$\mathscr{E} := (0 \to A_1 \to B_1 \to C \to 0) \oplus (0 \to A_2 \to B_2 \to 0 \to 0).$$

(ii) ある $\varphi : B \to A_2$ が存在して $\varphi \circ f|_{A_2} = \mathrm{id}_{A_2}$ かつ $f(A_1) \subset \mathrm{Ker}\ \varphi$.

(2) 短完全列 $\mathscr{E} : 0 \to A \to B \xrightarrow{g} C \to 0$ と直和分解 $C = C_1 \oplus C_2$ について，次の条件 (iii) と (iv) は同値である．

(iii) C_2 は $\mathscr{E}$ から "split" する：すなわち，$B = B_1 \oplus B_2$（$B_2 \cong C_2$）と直和分解されて

$$\mathscr{E} := (0 \to A \to B_1 \to C_1 \to 0) \oplus (0 \to 0 \to B_2 \to C_2 \to 0).$$

(iv) ある $\psi : C_2 \to B$ が存在して $g \circ \psi = \mathrm{id}_{C_2}$.

(3) $\mathscr{E} : 0 \to A \to B \to C \to 0$ と直和分解 $A = A_1 \oplus A_2$, $C = C_1 \oplus C_2$ について，A_2 が $\mathscr{E}$ から split し，一方で C_2 が $\mathscr{E}$ から split するとする．このとき，A_2 と C_2 は $\mathscr{E}$ から同時に split する．

証明 (1) (ii)$\Longrightarrow$(i) $B_1 = \mathrm{Ker}\ \varphi$, $B_2 = f(A_{2)}$ とおけば良い．

(2) (iv)$\Longrightarrow$(iii) $B_1 = g^{-1}(C_1)$, $B_2 = \mathrm{Im}\ \psi$ とおけば良い．

(3) まず A_2 を split out してから，$\psi : C_2 \to B \to B/A_2$ を考えれば良い． □

注意 2.5, 2.7 および 2.8 から次が言える：

補題 2.9. Q は G の正規 p-部分群であるとする．もし kG-加群 M が Q-射影的であれば，$M \otimes \mathscr{A}(\overline{S}(Q))$ は分裂列と次のような（$\Omega^2 M$ から始まり M で終わるような）短完全列 $0 \to \Omega^2 M \to M' \to M \to 0$ （ここで M' はある kG-加群）との直和である．

次に，整数表現（$R = \mathcal{O}$）の場合を考える．Q が G の正規部分群であるという仮定を続ける．Q は $S(Q)$ に自明に作用していることに注意する。$S(Q)$ は $\mathcal{O}(G/Q)$-表現加群とみなしたときには $\mathcal{O}_G$ の射影被覆 $s : S(Q) \to \mathcal{O}_G$ であり $\mathcal{O}$-入射包絡 $i : \mathcal{O}_G \to S(Q)$ でもある．$\rho = i \circ \pi^{-1}|Q|\mathrm{id}_{\mathcal{O}_G} \circ s \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(S(Q))$ とおくと，次が成り立つ.

補題 2.10([K1, Lemma 2.3]).　ρ は almost projective である. 特に, almost split sequence $\mathscr{A}(S(Q))$ は射影被覆 $P_{S(Q)} \to S(Q)$ と ρ の pull-back として構成される:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{A}(S(Q)) : 0 & \longrightarrow & \Omega S(Q) & \longrightarrow & m(S(Q)) & \longrightarrow & S(Q) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow \text{pull-back} & & \downarrow \rho & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega S(Q) & \longrightarrow & P_{S(Q)} & \longrightarrow & S(Q) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

L を Q-射影的な $\mathcal{O}G$-表現加群とする. 制限 $S(Q){\downarrow_Q}$ は $\mathcal{O}_Q$ のいくつかの直和であり（Q が自明に作用しており）制限された $\mathcal{O}Q$-準同型写像 $s|_Q : S(Q){\downarrow_Q} \to \mathcal{O}_Q$ は $\mathcal{O}Q$-分裂全射なので, $\mathrm{id}_L \otimes s :\ L \otimes S(Q) \to L \otimes \mathcal{O}_G = L$ は $\mathcal{O}G$-分裂全射であると分かる. また, 制限された $\mathcal{O}Q$-準同型写像 $i|_Q : \mathcal{O}_Q \to S(Q){\downarrow_Q}$ は $\mathcal{O}Q$-分裂単射であるので, $\mathrm{id}_L \otimes i :\ L \otimes \mathcal{O}_G \to L \otimes S(Q)$ は $\mathcal{O}G$-分裂単射である. 従って, $\mathrm{id}_L \otimes \rho$ は次のように分解される：

$$\mathrm{id}_L \otimes \rho :\ L \otimes S(Q) \xrightarrow{\mathrm{id}_L \otimes s} L \otimes \mathcal{O}_G = L \xrightarrow{\pi^{-1}|Q|\mathrm{id}_L} L = L \otimes \mathcal{O}_G \xrightarrow{\mathrm{id}_L \otimes i} L \otimes S(Q).$$

$L \otimes \mathscr{A}(S(Q))$ は $L \otimes P_{S(Q)} \to L \otimes S(Q)$ と $\mathrm{id}_L \otimes \rho$ の a pull-back として構成されるので, 次の主張が成り立つ.

補題 2.11.　Q は G の正規 p-部分群であるとし，$\mathcal{O}G$-表現加群 L は Q-射影的であるとする．このとき，$L \otimes \mathscr{A}(S(Q))$ は分裂列と短完全列 $\mathscr{E}$ との直和となる：ここで $\mathscr{E}$ は，射影

被覆 $P_L \to L$ と $\pi^{-1}|Q|\mathrm{id}_L$ の pull-back L' として構成された短完全列である:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathscr{E}: 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \text{pull-back}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{-1}|Q|\mathrm{id}_L} & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & P_L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

命題 2.3 の証明　補題 2.9 と 2.11 から主張が従う. □

３　Almost split sequences とテンサー積

この節では，命題 2.3 の結果を踏まえて，少し一般的に次のような設定を考えてみたい.

直既約 RG-表現加群 $U,\ V,\ W$ と $\mathscr{A}(U):\ 0 \longrightarrow \tau U \longrightarrow m(U) \xrightarrow{\sigma} U \longrightarrow 0$ が次の条件 $(\star)$ を満たすとする：

$$(\star) \quad V \otimes \mathscr{A}(U) = \mathscr{E}(W) \oplus \text{分裂列}.$$

ただし $\mathscr{E}(W)$ は次のような形の（τW から始まり W で終わる）短完全列である：

$$0 \longrightarrow \tau W \longrightarrow {}^{\exists}W' \longrightarrow W \longrightarrow 0 \quad (V' \text{ はある } RG\text{-表現加群}).$$

上記の設定のもとで、次の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{RG}(W,\ V \otimes m(U)) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_V \otimes \sigma)_*} & \mathrm{Hom}_{RG}(W,\ V \otimes U) \\
\| & & \| \\
\mathrm{Hom}_{RG}(W \otimes V^*,\ m(U)) & \xrightarrow{\sigma_*} & \mathrm{Hom}_{RG}(W \otimes V^*,\ U)
\end{array}$$

にまつわる Auslander-Carlson の議論 [AC, Sections 3 and 4] を活用すれば，次の命題が成り立つことが分かる.

命題 3.1([K2, Proposition 2.4]).　$U,\ V,\ W$ は直既約 RG-表現加群で，上の条件 $(\star)$ を満たすとする．このとき次は同値となる.

(i) $\mathscr{E}(W) = \mathscr{A}(W)$.

(ii) $W \otimes V^*$ の直既約分解において，U が重複度 1 で現れる.

$Q\ (\neq \{1_G\})$ を G の p-subgroup とし，$N = N_G(Q)$ とおく．f を (G, Q, N) に関する Green 対応とする.

補題 3.2. 直既約 RG-表現加群 $U,\ V,\ W$ は Q をヴァーテックスにもつとする．また，これらの Green 対応子 $fU,\ fV,\ fW$ が上の条件 $(\star)$ を満たすとする．すなわち $fV\otimes\mathscr{A}(fU)$ は分裂列列と次の形の短完全列との直和となっているとする：

$$\mathscr{E}: 0\to \tau fW\to B\to fW\to 0 \quad (B\text{ はある }RN\text{-表現加群}).$$

このとき，次の (i), (ii) は同値である．

(i) $\mathscr{E}=\mathscr{A}(fW)$.

(ii) $V\otimes\mathscr{A}(U)=\mathscr{A}(W)\oplus$ (a split sequence).

証明 Green 対応から次の直和分解

$$V{\downarrow_N}=fV\oplus\Big(\bigoplus_i Y_i\Big)\quad(\text{各 }Y_i\text{ は }(Q^{y_i}\cap N)\text{-射影的}\ (y_i\in G\setminus N))$$

を得るが，$\mathscr{A}(fU){\downarrow_{Q^{y_i}\cap N}}$ は分裂するので $Y_i\otimes\mathscr{A}(fU)$ は分裂列であることに注意する．

(i)$\Longrightarrow$(ii)：各 $Y_i\otimes\mathscr{A}(fU)$ は分裂するので，$(V{\downarrow_N}\otimes\mathscr{A}(fU)){\uparrow^G}$ は $\mathscr{A}(W)$ と分裂列の直和となる．$\mathscr{A}(fU){\uparrow^G}$ は $\mathscr{A}(U)$ と分裂列の直和であるので，$(V{\downarrow_N}\otimes\mathscr{A}(fU)){\uparrow^G}\cong V\otimes\mathscr{A}(fU){\uparrow^G}$ に注意すれば (ii) が成り立つことが分かる．

(ii)$\Longrightarrow$(i)：$(V\otimes\mathscr{A}(U)){\downarrow_N}$ は $\mathscr{A}(fW)$ とある Q-split 短完全列 $\mathscr{S}$ との直和となる一方で，$\mathscr{A}(U){\downarrow_N}$ は $\mathscr{A}(fU)$ とある Q-split sequence の直和となることが知られているので，$V{\downarrow_N}\otimes\mathscr{A}(U){\downarrow_N}$ は $\mathscr{E}$ とある Q-split 短完全列 $\mathscr{T}$ との直和として書ける．$V\otimes\mathscr{A}(U)$ の N への制限を 2 通りの方法で考えることで，$\mathscr{A}(fW)\oplus\mathscr{S}=\mathscr{E}\oplus\mathscr{T}$ を得る．ここでまず $\mathscr{E}$ は分裂しないことを主張しておく: 実際，仮に $\mathscr{E}$ が分裂すると仮定してみると $(\mathscr{E}\oplus\mathscr{T}){\downarrow_Q}$ は分裂することになるが，しかし $\mathscr{A}(fW){\downarrow_Q}$ は分裂しないので矛盾である．さて，$V{\downarrow_N}\otimes U{\downarrow_N}$ は $(V\otimes\mathscr{A}(U)){\downarrow_N}$ $(=\mathscr{E}\oplus\mathscr{T})$ の最終項であるので

$$V{\downarrow_N}\otimes U{\downarrow_N}=Y\oplus T$$

と直和分解できる．ただし，$\mathscr{E}$ は Y $(\cong fW)$ で終わり，$\mathscr{T}$ は T で終わるとする．一方で

$$V{\downarrow_N}\otimes U{\downarrow_N}=Z\oplus S$$

と直和分解することもできる．ここで，$\mathscr{A}(fW)$ は Z $(\cong fW)$ で終わり，$\mathscr{S}$ は S で終わるとする．今，$\psi: fW\to Y$ を同型ではない任意の RN-自己準同型写像とする．$\varphi: fW\xrightarrow{\psi}Y\hookrightarrow Y\oplus T\cong Z\oplus S$ を考えて, $\varphi_1: fW\to Z$ と $\varphi_2: fW\to S$ は $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ を満たすものとする．φ_1 は同型ではないので, φ_1 は $\mathscr{A}(fW)$ の中間項を経由する．fW は Q-射影的であり $\mathscr{S}$ は Q-射影的なので, φ_2 は $\mathscr{S}$ の中間項を経由する．ゆえに ψ は $\mathscr{E}$ の中間項 B を経由するので $\mathscr{E}=\mathscr{A}(fW)$ と分かる． □

さらに，Auslander-Carlson の議論 [AC, Proposition 2.4] を利用すれば次の事実を得る．

命題 3.4([K2, Proposition 2.5]).　$U,\ V,\ W$ は直既約 RG-表現加群で次が成り立つとする：

$$V \otimes \mathscr{A}(U) = \mathscr{A}(W) \oplus \text{分裂列}.$$

このとき，直既約 RG-加群 X について

$$U \mid X \otimes V^* \iff X \cong W.$$

命題 3.1 において $U = \mathsf{Sc}(Q),\ V = W$ とおくと，次が言える．

命題 3.5.　命題 2.3 において，さらに次が同値となる：

(i) $\mathscr{E}(V)$ は almost split sequence である．

(ii) $V \otimes V^*$ の直既約分解において $\mathsf{Sc}(Q)$ が重複度 1 で現れる．

４　Knörr 格子（Virtually irreducible $\mathcal{O}G$-表現加群）とテンサー積

$\mathcal{O}G$-表現加群 L に対して，$\mathrm{tr} : \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(L) \to \mathcal{O}$ をトレース写像とし

$$A = \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(L), \quad A_0 = \{f \in A \mid \mathrm{tr}\ f = 0\}$$

とおく．Knörr は $\mathcal{O}G$-表現加群において，“virtually irreducible” という概念を提唱した [Kn].

定義（Knörr）　$\mathcal{O}G$-表現加群 L が *virtually irreducible*（*Knörr* 格子）とは

$$A = \mathcal{O} \cdot \mathrm{id}_L \oplus A_0 \quad \text{かつ} \quad J(A) = \pi\mathcal{O} \cdot \mathrm{id}_L \oplus A_0$$

であるときをいう．

例　次の $\mathcal{O}G$-表現加群は Knörr 格子である．

・irreducible $\mathcal{O}G$-表現加群

・rank が p で割り切れないような直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群

・高さ 0 の直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群

また，Carlson-Jones は “exponential property” という概念を導入した [CJ]．$\mathcal{O}G$-表現加群 L に対し，$\pi^a \cdot \mathrm{id}_L$ が射影的となる最小の整数 a を L の *exponent* と呼ぶ．(ちなみに，任意の $\mathcal{O}G$-表現加群 L に対し，$|G| \cdot \mathrm{id}_L$ は射影的である．) また，$\mathcal{O}G$-表現加群 L が直既

約であれば Soc $(\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(L)/\{\text{projective}\})$ は simple であることが知られており，その生成元であるような $\mathcal{O}G$-自己準同型写像 ρ を *almost projective* という．なお，L の almost split sequence $\mathscr{A}(L)$ は，L の projective cover $P_L \to L$ と almost projective ρ の pull back として構成される：

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathscr{A}(L): 0 & \longrightarrow & \tau L & \longrightarrow & m(L) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{almost proj } \rho} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & P_L & \xrightarrow[\text{proj cover}]{} & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

定義（Carlson-Jones） 直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L の exponent が a であるとする．$\pi^{a-1}\cdot\mathrm{id}_L$ が almost projective であるとき，L は *exponential property* を持つという．

命題 4.1([CJ, Remarks 4.5]). 直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L に対し，次は同値である．

(i) L は Knörr 格子である。

(ii) L は exponential property を持つ．

直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L が Q をヴァーテックスに持つとき，L は $S(Q)\otimes L$ の直既約因子として現れた（注意 2.1）．$\mathscr{A}(S(Q))$ と L のテンサー積 $L\otimes\mathscr{A}(S(Q))$：

$$0 \longrightarrow L\otimes\tau S(Q) \longrightarrow L\otimes m(S(Q)) \longrightarrow L\otimes S(Q) \longrightarrow 0$$

について，次の定理が成り立つ．

定理 4.2. 直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L は Q $(\neq 1)$ をヴァーテックスに持ち，L の Q-source の階数は p で割り切れないとする．このとき，次は同値である．

(i) L は Knörr 格子である．

(ii) $L\otimes\mathscr{A}(S(Q)) = \mathscr{A}(L)\oplus$ 分裂列．

証明 Q が G の正規部分群の場合

$$\rho: S(Q) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_G \overset{\pi^{-1}|Q|\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{O}_G}}{\longrightarrow} \mathcal{O}_G \rightarrowtail S(Q)$$

が almost projective であって

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathscr{A}(S(Q)): 0 & \longrightarrow & \tau S(Q) & \longrightarrow & m(S(Q)) & \longrightarrow & S(Q) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho\text{: almost proj}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega S(Q) & \longrightarrow & P_{S(Q)} & \xrightarrow[\text{proj cover}]{} & S(Q) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

従って $L \otimes \mathscr{A}(S(Q))$ は分裂列と次の短完全列の直和となる：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \tau L & \longrightarrow & \text{pull-back} & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{-1}|Q|\cdot \mathrm{id}_L} & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & P_L & \xrightarrow[\text{proj cover}]{} & L & \longrightarrow & 0.
\end{array}
$$

このことから定理の主張が従う．

一般の場合は Green 対応を考えれば良い． □

以上のことをまとめて，Knörr 格子の性質の一面を次のように見ることができる．

系 4.3. G の p-部分群 Q を vertex に持つ直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 L について，次の 3 条件は同値である．

(i) L は Knörr 格子で L の Q-source の階数は p で割り切れない．

(ii) $L \otimes \mathscr{A}(S(Q))$ は $\mathscr{A}(L)$ と分裂列の直和である．

(iii) $L \otimes L^*$ の直既約分解において $S(Q)$ が重複度 1 で現れる．

さらにこの場合，直既約 $\mathcal{O}G$-表現加群 X について

$$S(Q) \mid X \otimes L^* \iff X \cong L.$$

注意 4.4. 直既約な RG-表現加群 L のヴァーテックスが Q であり，L の Q-source の階数が p で割り切れないとする．このとき，Benson-Carlson の結果から $\mathsf{Sc}(Q)$ が $L \otimes L^*$ の直既約因子として現れる．重複度 2 以上で $\mathsf{Sc}(Q)$ が $L \otimes L^*$ の直既約因子として現れる例として，G が p-群で Q が正規部分群のとき $L = \mathsf{Sc}(Q) = R_Q{\uparrow}^G$ について，$\mathsf{Sc}(Q) \otimes \mathsf{Sc}(Q)^*$ は $|G:Q|$ 個の $\mathsf{Sc}(Q)$ の直和となる．

参考文献

[A] Auslander, M.: *Functors and morphisms determined by objects*, in "Proceedings of conference on Repreentation Theory, Phiradelphia 1976," pp. 1–244, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 37, Marcel Dekker, New York, 1978.

[AC] Auslander, M. and Carlson, J.F.: *Almost-split sequences and group rings*, J. Algebra **103**(1986), 122-140.

[AR] Auslander, M. and Reiten, I.: *Representation theory of artin algebras III: Almost split sequences*, Comm. Algebra **3**(1975), 239–284.

[BC] Benson, D. J.and Carlson, J.F.: *Nilpotent elements in the Green ring*, J. Algebra **104**(1986), 329-350.

[CJ] Carlson, J. F. and Jones, A.: *An exponential property of lattices over group rings*, J. London Math. Soc. **39**(1989), 467–479.

[K1] Kawata, S.: *On relative projectivity of lattices in Auslander-Reiten components for group rings*, Comm. Algebra **48**(2020) 2461–2466.

[K2] Kawata, S.: *On tensor products and almost split sequences for Scott lattices over group rings*, J. Algebra **599**(2022), 122-132.

[Kn] Knörr, R.: *Virtually irreducible lattices*, Proc. London Math. Soc. **59**(1989), 99–132.

[NT] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.

[RS] Roggenkamp, K. W.and Schmidt, J.: *Almost split sequences for integral group rings and orders*, Comm. Algebra **4**(1976), 893–917.