準2面体群をシロー群にもつ有限群の主ブロックの splendid 森田同値

千葉大学 先進科学センター　越谷　重夫 (こしたに　しげお）

Shigeo Koshitani

Center for Frontier Science, Chiba University, Japan

§1. 序文: ドノバン (Donovan) 予想とプーチ (Puig) 予想

いきなりではあるが, 素数 p を止めておく. 有限群のモジュラー表現論における未解決問題の一つに,「与えられた p-群 P を固定したとき, 不足群に P を持つ（ある）有限群の p-ブロックは森田同値を除いて有限個しか存在しないのだろうか？」というものがある. Peter Donovan による Donovan 予想である. ドノバン自身が書いたものは存在しないが, 1979 年アメリカ合衆国 Santa Cruz 研究集会（アメリカ数学会 Summer Institut, 故 D. Gorenstein が「有限単純群の分類は完成した！」と少々勇み足的に発表した研究集会として有名) での J.L.Alperin が問題 (M) として発表したものです. 因みに, この M は森田紀一 (1915–1995) を意味するのではなく, たまたま原稿の内容順で M になったに過ぎない. まだ未解決である.

若干横道にそれるが, 関連した予想として「二つの p-ブロック A, B が環として森田同値であったら, A, B の不足群は同型か？」というモジュラー版同型問題があった. 恐らく多くの研究者はこの予想が正しいのでは, と感じていたと思う（筆者を含め）. ところが, つい最近 2022 年発表の論文でロシア出身の若手研究者（専門は整数表現） Leo Margolis を含む 3 人共著の論文 [2] で, これが否定された. 彼ら 3 人は, 何と非常に小さい位数の群 $|P| = 2^8 = 256$ で反例を見つけたのである. 代数ソフト GAP を使ってはいるが, 今まで我々は何をしてきたのか, と感じざるを得ない. とにかく, この反例発見のニュースは, 私にとっては, かなり大きい衝撃である.

(これらを言い訳にして?) 今回の話題は, 最初に述べた予想, Donovan 予想より強い予想「与えられた p-群 P を固定したとき, 不足群に P を持つ（ある）有限群の p-ブロックは Puig(=splendid Morita = source algebra isomorphism) 同値を除いて有限個しか存在しないのだろうか?」の部分解答（もちろん肯定的なもの）についてである. 従って, 主役の splendid 森田同値が何なのであるかをきちんと定義しないといけない. ただ少しサボって, 素数 p を勝手に取ってきて, そして更に勝手な有限 p-群 P を固定する. 有限群 G, H の 2 つのブロック　A, B が splendid 森田同値（= Puig 同値）とは, 「P は, A, B は共通の不足群 A になっていて, その上 A, B の source algebra $\mathfrak{A}$ と B の source algebra $\mathfrak{B}$ が互いに interior kP-algebra として同型であること」である. A の source algebra とは, A と森田同値で更に P の作用を生かしたままで最小（極小）のものである. $P = 1$ つまり, 群論（P の作用）を忘れて, 環論的だけの意味で考えると, source algebra とは森田同値にでてくる, いわゆる, basic algebra (basic ring) に対応している. ここで, 最初に P は A, B 共通の不足群, と仮定したが, 実はこれは splendid Morita 同値の条件を見かけ上少し弱めて「結果的に A, B の不足群は同じになってしまう」という L.Puig の大きな結果があることを一つ注意しておく ([7, §7] を参照). 言い忘れていたが, 2 番目の予想は Puig の有限性予想, と呼ばれている [8, (38.5)Conjecture].

§2. 主結果

主定理 (越谷-Lassueur-Sambale [5]). **P が位数 2^n （ただし $n \geq 4$) の準二面体 2-群 SD_{2^n} であるとき, P をシロー 2-部分群に持つ 2 つの勝手な有限群 G に対して, kG の主ブロック $B := B_0(kG)$ は splendid 森田同値を除いて次の 6 種類に限る. その上, グループが違えば, 絶対に splendid 森田同値にはならない.**

(1) P
(2) $\mathrm{SL}_2^{\pm}(p^f)$ ただし $4(p^f+1)_2 = 2^n$
(3) $\mathrm{SU}_2^{\pm}(p^f)$ ただし $4(p^f-1)_2 = 2^n$
(4) $\mathrm{PGL}_2^{*}(p^{2f})$ ただし $2(p^{2f}-1)_2 = 2^n$
(5) $\mathrm{PSL}_3(p^f)$ ただし $4(p^f+1)_2 = 2^n$

(6) $\mathrm{PSU}_3(p^f)$ ただし $4(p^f-1)_2=2^n$

ここで, p は奇数素数, f は自然数. その上それらの splendid 森田同値 は, Scott 加群 $\mathrm{Sc}(G\times G', \Delta P)$ で実現される. ここで G' は G と同じグループに入っている勝手な有限群. また, $\mathrm{SL}_2^{\pm 1}(q) := \{A \in \mathrm{GL}_2(q) \mid \det(A) = \pm 1\}, \mathrm{SU}_2^{\pm 1}(q) := \{A \in \mathrm{GU}_2(q) \mid \det(A) = \pm 1\}$ と定義する. そして, $q=p^{2f}$ (ただし p は奇数素数) のとき, 以下を満たす H が丁度 3 個存在する. $\mathrm{PSL}_2(q) < H < \mathrm{P\Gamma L}_2(q), \quad |H : \mathrm{PSL}_2(q)| = 2.$ まず 1 つは, $\mathrm{PGL}_2(q)$, でその次のものは, $\mathrm{PSL}_2(q) \rtimes \langle F\rangle$ に含まれる. ここで F は元の個数が q である有限体 $\mathbb{F}_q$ の（所謂）フロベニウス自己同型. そして最後の 3 つ目が $\mathrm{PGL}_2^*(q)$. また, 少し古い記号の使い方では, $\mathrm{GU}_2(q) := \mathrm{GU}(2,q^2)$, $\mathrm{PSU}_2(q) := \mathrm{PSU}(2,q^2)$ と書いていた.

注意. この結果は, [3, 4] の続編であることは間違いないのだが, 実は, 決定的に違う点が一つある. シロー 2-部分群が二面体群または一般四元数群である有限群 G に対して, $G/O_{2'}(G)$ の構造は古くから決定されていた [D. Gorenstein and J.H. Walter, J. Algebra **2** (1965)]. これの自然な拡張で, シロー 2-部分群が準二面体群の場合にも, 同じような定理を証明しよう, と考えるのは, 至極真っ当, 自然なことである. だがこの場合には, [D. Gorenstein and J.H. Walter, J. Algebra **2** (1965)] に相当する定理を少なくとも筆者は知らなかった（有限群のモジュラー表現論多くがそうであった）. 実は, 2019 年 5 月ベルギー・Spa で開かれた研究集会での食事の際, たまたま隣にいた Burkhard Külshammer に, このことについて訊かれた. その 2 週間後に Benjamin Sambale から連絡があり, [1] での証明を少し詳しく読めば, [Gorenstein-Walter (1965)] に相当する定理が「準二面体群」に対しても成り立つことがわかる, と教えてもらった. そこで, Caroline Lassueur に更に Sambale も加え, 3 人でこの仕事に取り組み, 結果としてできたものが, 今回のものである. **「教訓: 会食は大事!」**.

§3. 謝辞 今回の研究集会の世話人 飛田明彦教授（埼玉大学）には大変世話になりました. ここに感謝の意を表します. また, 研究集会後の話ではあるが, 2022 年 10 月 5 日に 92 才で亡くなった太刀川弘幸先生（1973 年からの恩師）にこの拙文を捧げたいと思います. 1974 年夏休

み中, 森田紀一先生の論文 [K. Morita, On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals. Science Report of Tokyo Bunrika Daigaku **4** (1951), 177-194] の私の発表を一週間かけてほぼ毎日助言してもらったことを懐かしく思い出されます（地下鉄丸の内線茗荷谷駅あたりの今は存在しない大学で）.

https://www.math.uni-bielefeld.de/∼ringel/lectures/tachi/tachikawa/

References

[1] J.L. Alperin, R. Brauer and D. Gorenstein. Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups, Trans. Amer. Math. Soc. **151** (1970), 1–261.

[2] D. García, L. Margolis and Á. del Río. Non-isomorphic 2-groups with isomorphic modular group algebras. J. reine angew. Math. **783** (2022), 269–274.

[3] S. Koshitani and C. Lassueur. Splendid Morita equivalences for principal 2-blocks with dihedral defect groups. Math. Z. **294** (2020), 639–666.

[4] S. Koshitani and C. Lassueur. Splendid Morita equivalences for principal 2-blocks with generalised quaternion defect groups. J .Algebra **558** (2021), 523–533.

[5] S. Koshitani, C. Lassueur and B. Sambale. Splendid Morita equivalences for principal blocks with semidihedral defect groups. Proc. Amer. Math. Soc. **150** (2022), 41—53.

[6] S. Koshitani and İpek Tuvay. Brauer indecomposability of Scott modules with semidihedral vertex. Proc. Edinburgh Math. Soc. **64** (2021), 174—182.

[7] L. Puig. On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks. Birkhäuser, Progress in Math. Vol.178 (1999).

[8] J. Thévenaz. G-Algebras and Modular Representation Theory. Clarendon Press, Oxford, 1995.