# Brauer-friendly 加群と slash 関手の性質について

東京理科大学大学院・理学研究科　渡辺 将一
Nobukatsu Watanabe
Department of Mathematics,
Tokyo University of Science

## 1　イントロダクション

本稿では [12] の研究内容を基にしている．そのため各補題の証明などの詳細に関しては [12] を参照してください．

本稿では次の設定を用いる．$p$ を素数として，$(K, \mathcal{O}, k)$ を $k$ が代数的閉体である $p$-modular system とする (ここで，$\mathcal{O} = k$ の場合も含める)．このとき，自然な全射 $\mathcal{O}G \twoheadrightarrow kG$ の $x \in \mathcal{O}G$ の像を $\overline{x}$ により表す．また，べき等元の持ち上げ可能定理により，各原始べき等元 $i \in kG$ に対して，$\mathcal{O}G$ のある原始べき等元 $x$ で $\bar{x} = i$ を満たすものが存在するので，この原始べき等元 $x$ を記号 $\hat{-}$ を用いて $\hat{i} = x$ のように表すとする．以下，任意の環上の加群は特に断らない限り $\mathcal{O}$ 上自由で有限生成な左加群とする．

次に本研究の背景を説明する．有限群のモジュラー表現論における一つの大きな指針を標語的に「与えられた有限群の標数 $p > 0$ の体上の表現は，その $p$-局所部分群の表現により統制されているのではないか？」ということが出来る．ここで，$p$-局所部分群とは $p$-部分群の正規化群や中心化群のことをいう．この局所-大域原理の定式化された予想の一つとして次の Broué 予想がある．

**予想** (Broué 予想)**.** $G$ を有限群，$b$ を不足群 $P$ をもつ $\mathcal{O}G$ のブロック，$c$ を $b$ の Brauer 対応子である $\mathcal{O}N_G(P)$ のブロックとする．もし $P$ が可換群ならば，$\mathcal{O}Gb$ と $\mathcal{O}N_G(P)c$ は導来同値である．

この Broué 予想は有限群のモジュラー表現論において最も興味のもたれている問題の一つであり，今までに多くの研究者によって様々な研究がなされてきた．予想が成り立つことが示されている多くの場合において，奥山哲郎氏により [11] において導入された奥山メソッドが用いられている．この奥山メソッドにより，Broué 予想の解決には森田型安定同値の構成が重要であることが示された．このことから，森田型安定同値の構成に関して主ブロックの場合と，一般のブロックの場合の概要をそれぞれ見ていく．

まず，主ブロックの場合を見ていく．$b$ を $\mathcal{O}G$ の主ブロックとする．この場合に M. Broué が Broué の貼り合わせの原理と呼ばれる森田型安定同値の構成法を導入した．その中で重要な加群である Scott 加群を定義する．

**定義 1.1** (Scott 加群)**.** $G$ の部分群 $H$ に対して, $\mathrm{Ind}_H^G(\mathcal{O}_H)$ の直既約因子のうち $\mathcal{O}_G$ と同型な部分加群を持つものが唯一存在する．この加群を $G$ の $H$ に関する Scott $\mathcal{O}G$-加群と呼び, $S(G,H)$ と表す.

次が Broué の貼り合わせの原理である.

**定理 1.2** (Broué の貼り合わせの原理 [4, 6.3. Theorem])**.** $G$ と $H$ を $\mathcal{F}_P(G)=\mathcal{F}_P(H)$ を満たす共通の Sylow $p$-部分群 $P$ を持つ有限群, $b$ と $c$ をそれぞれ $\mathcal{O}G$ と $\mathcal{O}H$ の主ブロックとする．このとき, $P$ の各部分群 $Q$ に対して, $b_Q$ と $c_Q$ をそれぞれ $kC_G(Q)$ と $kC_H(Q)$ の主ブロックとする. $M=S(G\times H,\Delta P)$ とする．このとき, 以下の条件は同値である.

(i) $M$ とその双対加群 $M^*$ により $\mathcal{O}Gb$ と $\mathcal{O}Hc$ の間の森田型安定同値が誘導される.

(ii) 各 $1\neq Q\leq P$ に対して, $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(M)$ とその双対加群 $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(M^*)$ により $kC_G(Q)b_Q$ と $kC_H(Q)c_Q$ の間の森田同値が誘導される.

ここで, Br は後で定義される Brauer construction である.

Broué の貼り合わせの原理を適用するためには, Kessar-Kunugi-Mitsuhashi[8] において導入された次の Brauer 直既約性が重要な役割を果たす.

**定義 1.3** (Brauer 直既約性 [8])**.** $M$ を $\mathcal{O}G$-加群とする． $G$ の各 $p$-部分群 $Q$ に対して $\mathrm{Res}^{N_G(Q)/Q}_{QC_G(Q)/Q}(\mathrm{Br}_Q(M))$ が直既約または 0 となるとき, $M$ は Brauer 直既約であるという.

Scott 加群に対する Brauer 直既約性の同値条件は Ishioka-Kunugi[6, Theorem 1.3] により次の様に与えられた.

**定理 1.4** ([6, Theorem 1.3])**.** $G$ を有限群, $P$ を $G$ の $p$-部分群, $M=S(G,P)$ とする．$\mathcal{F}=\mathcal{F}_P(G)$ が saturated であると仮定する．このとき, 次の条件は同値である.

(i) $M$ は Brauer 直既約である.

(ii) $P$ の各 fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群 $Q$ に対して, $\mathrm{Res}^{N_G(Q)}_{QC_G(Q)}(S(N_G(Q),N_P(Q)))$ は直既約である.

もしこれらの条件が成り立つならば, $P$ の各 fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群 $Q$ に対して次の同型が成り立つ.

$$\mathrm{Br}_Q(M)\cong S(N_G(Q),N_P(Q)).$$

次に主ブロックの場合に見てきたことを一般のブロックの場合に見ていく．$b$ を $\mathcal{O}G$ のブロックとする．M. Linckelmann は Broué の貼り合わせの原理を一般のブロックに対して次の様に一般化した.

**定理 1.5** (Linckelmann の貼り合わせの原理 [9, Theorem 1.2])**.** $G$ と $H$ を有限群, $b$ と $c$ をそれぞれ $\mathcal{O}G$ と $\mathcal{O}H$ の共通の不足群 $P$ を持つブロック, $i\in(\mathcal{O}Gb)^{\Delta P}$ と $j\in(\mathcal{O}Hc)^{\Delta P}$ を almost source idempotent とする．各 $P$ の部分群 $Q$ に対して, $e_Q$ と $f_Q$ によりそれぞれ

$\mathrm{Br}_{\Delta Q}(i)e_Q \neq 0$ と $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(j)f_Q \neq 0$ を満たす $kC_G(Q)$ と $kC_H(Q)$ のブロックとする．また，$\hat{e}_Q$ と $\hat{f}_Q$ によりそれぞれ $e_Q$ と $f_Q$ の一意的な持ち上げを表すとする．$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(P,\hat{e}_P)}(G,b)$ とし，$\mathcal{F}_{(P,\hat{e}_P)}(G,b) = \mathcal{F}_{(P,\hat{f}_P)}(H,c)$ を仮定する．$V$ を vertex $P$ を持つ $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutation $\mathcal{O}P$-加群とし $\mathcal{O}\Delta P$-加群と見る．$M$ を $\mathcal{O}Gb$-$\mathcal{O}Hc$-両側加群

$$\mathcal{O}Gi \otimes_{\mathcal{O}P} \mathrm{Ind}_{\Delta P}^{P\times P}(V) \otimes_{\mathcal{O}P} j\mathcal{O}H$$

の直既約因子とする．$M$ は vertex $\Delta P$ を持つと仮定する．このとき，$P$ の各非自明な部分群 $Q$ に対して，$\mathrm{End}_k(M_Q) \cong \mathrm{Br}_{\Delta Q}(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\hat{e}_Q M \hat{f}_Q))$ を満たす $kC_G(Q)e_Q$-$kC_H(Q)f_Q$-加群 $M_Q$ が存在する．さらに，もし $P$ の各非自明な部分群 $Q$ に対して両側加群 $M_Q$ が $kC_G(Q)e_Q$ と $kC_H(Q)f_Q$ の間の森田同値を誘導するならば，$M$ とその双対加群 $M^*$ は $\mathcal{O}Gb$ と $\mathcal{O}Hc$ の間の森田型安定同値を誘導する．

Linckelmann の貼り合わせの原理に出てくる各 $M_Q$ は E. Biland が定義した Brauer-friendly 加群と呼ばれる (endo-)$p$-permutation 加群を一般化した加群である．また，E. Biland は Brauer 関手の一般化として slash 関手 $Sl$ というものを定義していて，Linckelmann の貼り合わせの原理に出てくる各 $M_Q$ はある $(\Delta Q, \hat{e}_Q \otimes \hat{f}_Q)$-slash 関手を用いて $Sl_{(\Delta Q, \hat{e}_Q \otimes \hat{f}_Q)}(M)$ と表すことが出来る．このことから，Brauer-friendly 加群に対しても Brauer 直既約性と同様に slash 直既約性が定義でき，さらに Broué の貼り合わせの原理において Brauer 直既約性が重要であったのと同じ様に，slash 直既約性は Linckelmann の貼り合わせの原理において重要な役割を果たす．そのため本稿の主結果では，Ishioka-Kunugi により与えられた Scott 加群に対する Brauer 直既約性の同値条件を Brauer-friendly 加群に対する slash 直既約性の同値条件へと一般化する．

## 2　記号と用語の導入

この節では，Brauer-friendly 加群や slash 関手の定義やそれらを定義するために必要な用語を定義する．以下，$G$ を有限群とする．

まず，$G$ に関する subpair $(P, b_P)$ とは，$G$ の $p$-部分群 $P$ と $\mathcal{O}C_G(P)$ のブロック $b_P$ のペアのことである．$b$ を $\mathcal{O}G$ のブロックとするとき，$G$ に関する subpair $(P, b_P)$ が $(G,b)$-subpair であるとは，$\bar{b}_P \mathrm{br}_P(b) \neq 0$ を満たすことをいう．ブロック $b_P$ は $C_G(P) \leq H \leq N_G(P, b_P)$ を満たす部分群 $H$ の群環 $\mathcal{O}H$ のブロックでもある．

$\mathcal{O}G$-加群 $M$ と $H \leq G$ に対して，$M^H$ により $H$ の元の作用により不変な $M$ の元全体を表す．また，トレース写像 $\mathrm{Tr}_H^G : M^H \to M^G$ を $\mathrm{Tr}_H^G(m) = \sum_{t \in G/H} tm$ により定める．以下，$\overline{N}_G(H) = N_G(H)/H$ とする．

**定義 2.1** (Brauer construction, Brauer morphism, Brauer 関手)**.** $P$ を $G$ の $p$-部分群，$M$ を $\mathcal{O}G$-加群とする． $\mathrm{Br}_P(M) = M^P/(\sum_{Q<P} \mathrm{Tr}_Q^P(M^Q) + J(\mathcal{O})M^P)$ により $k\overline{N}_G(P)$-加群である $M$ の $P$ による Brauer construction を定める． これにより定まる関手 $\mathrm{Br}_P : {}_{\mathcal{O}G}\mathbf{Mod} \to {}_{k\overline{N}_G(P)}\mathbf{Mod}; M \mapsto \mathrm{Br}_P(M)$ を Brauer 関手という．また，自然な全射

$\mathrm{br}_P : M^P \twoheadrightarrow \mathrm{Br}_P(M)$ を $M$ の $P$ による Brauer morphism という．さらに $(G,b)$-subpair $(P,b_P)$ に対して, $\mathrm{Br}_{(P,b_P)}(M)=\mathrm{Br}_P(b_PM)$ により $k\overline{N}_G(P,b_P)\bar{b}_P$-加群である $M$ の $(P,b_P)$ による Brauer construction を定める．これにより次の関手が定まる．

$$\mathrm{Br}_{(P,b_P)} : {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod} \to {}_{k\overline{N}_G(P,b_P)\bar{b}_P}\mathbf{Mod}.$$

$g\in G$ に対して, $c_g$ により $g$ による共役写像を表すとする．

**定義 2.2** (ブロックの fusion system)**.** $b$ を $\mathcal{O}G$ のブロック, $(P,b_P)$ を $(G,b)$-subpair とする．このとき, $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b)$ を次のような対象と射をもつ圏として定める．この $\mathcal{F}$ を $(G,b)$ の $(P,b_P)$ における fusion system という．

・対象：$P$ の部分群.

・射：$(Q,b_Q),(R,b_R)\le(P,b_P)$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q,R)=\{c_g : Q\to R \mid {}^{\exists}g\in G, {}^{g}(Q,b_Q)\le(R,b_R)\}.$$

次の vertex subpair と source triple は vertex と source をより精密にした概念である．

**定義 2.3** (vertex subpair, source triple, [2, Definition 2])**.** $M$ を直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群とする．

・$M$ の vertex subpair が $(P,b_P)$ であるとは, $(P,b_P)$ が $(G,b)$-subpair で, $P=_G \mathrm{vtx}(M)$ で, ある直既約 $\mathcal{O}P$-加群 $V$ により $M\mid b\mathcal{O}Gb_P\otimes_{\mathcal{O}P}V$ が成り立つことをいう．

・$V$ が $M$ の vertex subpair $(P,b_P)$ に関する source であるとは, $V$ が $M\mid b\mathcal{O}Gb_P\otimes_{\mathcal{O}P}V$ を満たす直既約 $\mathcal{O}P$-加群のことをいう．

・$(P,b_P,V)$ が $M$ の source triple であるとは, $V$ が $M$ の vertex subpair $(P,b_P)$ に関する source であるときをいう．

source triple に関する Green 対応を次のように考えることが出来る．

**定理 2.4** ([2, Lemma 1, Definition 2])**.** $(P,b_P)$ を $(G,b)$-subpair する．もし $M$ が source triple $(P,b_P,V)$ をもつ直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群ならば, $b_PM$ の $\mathcal{O}N_G(P,b_P)$-直既約因子 $f^b_{b_P}(M)$ で唯一 source triple $(P,b_P,V)$ をもつものが存在する．このとき, $f^b_{b_P}$ は source triple $(P,b_P,V)$ をもつ直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群の同型類全体から source triple $(P,b_P,V)$ をもつ直既約 $\mathcal{O}N_G(P,b_P)b_P$-加群の同型類全体への全単射を与える．この $f^b_{b_P}$ を source triple$(P,b_P)$ に関する Green 対応と呼ぶ.

Brauer-friendly 加群は次に定義する $\mathcal{F}$-stable endo-permutation 加群を source に持つ.

**定義 2.5** ($\mathcal{F}$-stable)**.** $b$ を $\mathcal{O}G$ のブロック, $(P,b_P)$ を $(G,b)$-subpair, $V$ を endo-permutation $\mathcal{O}P$-加群, $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b)$ とする．

・$V$ が $\mathcal{F}$-stable であるとは, 任意の $Q\le P$ と任意の $c_{g^{-1}}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q,P)$ に対して $\mathrm{Res}^P_Q(V)\oplus\mathrm{Res}^{{}^gP}_Q({}^gV)$ が endo-permutation $\mathcal{O}Q$ 加群であるときをいう．

・$(P,b_P,V)$ が fusion-stable endo-permutation source triple とは, $V$ が $\mathcal{F}$-stable かつ直既約 endo-permutation $\mathcal{O}P$-加群で vertex $P$ をもつときをいう．

**定義 2.6** (source triple に対する compatibility)**.** $(P_i, b_{P_i}, V_i)$ を $\mathcal{F}_{(P_i,b_i)}(G,b)$-stable endo-permutation source triple$(i = \{1,2\})$ とする.

・$(P_1, b_{P_1}, V_1)$ と $(P_2, b_{P_2}, V_2)$ が compatible であるとは, 任意の $(G,b)$-subpair $(Q, b_Q)$ と任意の $c_{g_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Br}(G,b)}((Q,b_Q),(P_i,b_{P_i}))$ に対して $\mathrm{Res}_{c_{g_1}}(V_1) \oplus \mathrm{Res}_{c_{g_2}}(V_2)$ が endo-permutation 加群であることである. ここで, $\mathrm{Br}(G,b)$ は Brauer 圏である.

次が Brauer-friendly 加群の定義である.

**定義 2.7** (Brauer-friendly 加群 [2, Definition 8])**.** $M$ を $\mathcal{O}Gb$-加群, $M$ の直既約分解 $M = \bigoplus_{1 \le i \le n} X_i$ において各 $X_i$ は source triple $(P_i, b_{P_i}, V_i)$ をもつとする.

・$M$ が Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群であるとは, $(P_i, b_{P_i}, V_i)$ が $\mathcal{F}_{(P_i,b_{P_i})}(G,b)$-stable endo-permutation source triple$(i = \{1,...,n\})$ で, $(P_i, b_{P_i}, V_i)$ と $(P_j, b_{P_j}, V_j)$ が compatible$({}^{\forall}i, j \in \{1,...,n\})$ であるときをいう.

**定義 2.8** (Brauer-friendly 加群に対する compatibility)**.** Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群 $L, M$ に対して, $L \oplus M$ が Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群となるとき, $L$ と $M$ は compatible であるという.

**定義 2.9** (slash 関手 [2, Definition 14])**.** $b$ を $\mathcal{O}G$ のブロック, $(P, b_P)$ を $(G,b)$-subpair, ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の部分圏, $(P, b_P)$ を $(G,b)$-subpair, $PC_G(P) \le H \le N_G(P, b_P)$, $\overline{H} = H/P$ とする. (加法) 関手 $Sl : {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \to {}_{k\overline{H}\overline{b}_P}\mathbf{Mod}$ が以下のデータによって定まっているとき, $Sl$ を $(P, b_P)$-slash 関手という.

- 各 $L, M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に対して, ある写像
$$Sl^{L,M} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}P}(L,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(Sl(L), Sl(M))$$
で次の条件を満たすものが存在する.
  - 各 $M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に対して, $Sl^{M,M}(1_{\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)}) = 1_{\mathrm{End}_k(Sl(M))}$;
  - 各 $L, M, N \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$, 各 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}P}(L,M)$, 各 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}P}(M,N)$ に対して, $Sl^{L,N}(g \circ f) = Sl^{M,N}(g) \circ Sl^{L,M}(f)$;
  - 各 $L, M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に対して, ある $k(C_G(P) \times C_G(P))\Delta H$-同型
$$f_{L,M} : \mathrm{Br}_{\Delta P}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(b_P L, b_P M))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(Sl(L), Sl(M))$$
で次の図式を可換にするものが存在する.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}P}(L,M) \arrow[rr, "Sl^{L,M}"] \arrow[dr, "\mathrm{br}^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L,M)}_{(\Delta P, b_P \otimes b_P)}"'] & & \mathrm{Hom}_k(Sl(L), Sl(M)) \\
& \mathrm{Br}_{\Delta P}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(b_P L, b_P M))) \arrow[ur, "f_{L,M}"'] &
\end{tikzcd}$$

Slash 関手はどんな圏に対しても存在する訳ではなく, 次のような Brauer-friendly 圏に対しては存在することが知られている.

**定義 2.10** (Brauer-friendly 圏 [2, Definition 15])**.** ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の部分圏とする. ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ が Brauer-friendly 圏とは, 任意の $L, M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に対して, $L$ と $M$ は compatible な Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群であるときをいう.

**例.** すべての $p$-permutation $\mathcal{O}Gb$-加群の圏を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Perm}$ とすると, これは Brauer-friendly 圏になっている.

**定理 2.11** ([2, Theorem 18])**.** $b$ を $\mathcal{O}G$ のブロック, ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の Brauer-friendly 部分圏, $(P, b_P)$ を $(G, b)$-subpair, $PC_G(P) \leq H \leq N_G(P, b_P)$, $\overline{H} = H/P$, $\overline{C}_G(P) = PC_G(P)/P$ とする. このとき, 以下のことが成り立つ.

(i) $(P, b_P)$-slash 関手 $Sl_{(P,e_P)}$:${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \to {}_{k\overline{H}\overline{b}_P}\mathbf{Mod}$ が存在する.

(ii) $Sl'_{(P,b_P)}$:${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \to {}_{k\overline{H}\overline{b}_P}\mathbf{Mod}$ を $(P, b_P)$-slash 関手とすると, ある線形指標 $\chi$:$\overline{H}/\overline{C}_G(P) \to k^\times$ により関手としての同型 $\chi_* Sl_{(P,b_P)} \cong Sl'_{(P,b_P)}$ が成り立つ.

**例.** 上で考えた Brauer-friendly 圏の例である ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Perm}$ に対しては slash 関手は Brauer 関手 (の線形指標倍) である.

**定義 2.12** (slash 直既約性 [5, Definition 5.1])**.** ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の Brauer-friendly 部分圏, $M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ とする. このとき, $M$ が slash 直既約であるとは, 任意の $(G, b)$-Brauer pair $(Q, b_Q)$ に対する, ある $(Q, b_Q)$-slash 関手 $Sl_{(Q,b_Q)}$:${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \to {}_{k\overline{H}\overline{b}_Q}\mathbf{Mod}$ により $\mathrm{Res}^{N_G(Q,b_Q)/Q}_{QC_G(Q)/Q}(Sl_{(Q,b_Q)}(M))$ が直既約または 0 となることをいう.

**注意.** Slash 直既約性の定義は Brauer-friendly 圏 ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ と $(Q, b_Q)$-slash 関手 $Sl_{(Q,b_Q)}$ の取り方には依存しない.

**定理 2.13** ([2, Theorem 23])**.** $b$ を $\mathcal{O}G$ のブロック, $(P, b_P, V)$ を $\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$-stable endo-permutation source triple, ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を "big enough" な (つまり, 任意の直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群で source triple $(P, b_P, V)$ をもつものの有限個の直和が属する)Brauer-friendly 圏, $Sl_{(P,b_P)}$:${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \to {}_{k\overline{N}_G(P,b_P)\overline{b}_P}\mathbf{Mod}$ を $(P, b_P)$-slash 関手とする. このとき, source triple $(P, b_P, V)$ をもつすべての直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群の同型類の集合からすべての直既約射影 $k\overline{N}_G(P, b_P)\overline{b}_P$-加群の同型類の集合への全単射が $Sl_{(P,b_P)}$ により与えられる.

この定理を用いて Brauer-friendly 加群を次の様に表示する.

**定義 2.14.** 定理 2.13 と同じ設定とし, $M$ を直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群で source triple $(P, b_P, V)$ を持ち ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に属するものとする. このとき, 定理 2.13 によりある唯一の単純 $k\overline{N}_G(P, b_P)\overline{b}_P$-加群 $S$ により $Sl_{(P,b_P)}(M) \cong P(S)$ となるので, $M$ を $B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S)$ と表す. また, 自明 $k\overline{N}_G(P, b_P)\overline{b}_P$-加群 $S = k_{\overline{N}_G(P,b_P)}$ のとき, $BS(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}) = B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S)$ とする. この加群を Brauer-friendly Scott $\mathcal{O}G$-加群と呼ぶことにする.

**注意.** 1. 上記の Brauer-friendly 加群の表示は線形指標倍を除き一意である.

2. Scott $\mathcal{O}G$-加群 $S(G,P)$ は, $\mathcal{O}G$ の主ブロック $b$ により,

$$S(G,P) = BS(b, (P, b_P, \mathcal{O}_P), Sl_{(P,b_P)})$$

と表示出来る.

3. 主ブロック $b$ の場合には, Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群と endo-$p$-permutation $\mathcal{O}Gb$-加群は同じクラスになる. ブロック $b$ が一般の場合には, 直既約 endo-$p$-permutation $\mathcal{O}Gb$-加群は直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群であるが, 逆は一般には成り立たない. 次のような加群の包含関係が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{permutation 加群} & \subseteq & \text{endo-permutation 加群} \\ & & \cap\mid & & \cap\mid \\ \text{Scott 加群} & \subseteq & p\text{-permutation 加群} & \subseteq & \text{endo-}p\text{-permutation 加群} \\ & & & & \cap\mid \\ & & & & \text{Brauer-friendly加群} \end{array}$$

# 3 補題

このセクションでは, Ishioka-Kunugi の [6] において主結果を示すために用いられた $p$-permutation 加群や Scott 加群や Brauer 関手に対するよく知られている補題を, Brauer-friendly 加群や Brauer-friendly Scott 加群や slash 関手に対して用意する (そのうち, 主要なものを報告する).

次の補題は $p$-permutation 加群と Brauer 関手に関する命題 [3, (3.2) THEOREM. (1)] の Brauer-friendly 加群と slash 関手に関するに対応する結果である.

**補題 3.1** ([1, Corollary 3.17])**.** $M$ を source triple $(P, b_P, V)$ を持つ直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群, $(Q, b_Q)$ を $(G, b)$-subpair, $Sl_{(Q,b_Q)}$ を $(Q, b_Q)$-slash 関手とする. このとき, $Sl_{(Q,b_Q)}(M) \neq 0$ が成り立つことと $(Q, b_Q) \leq_G (P, b_P)$ が成り立つことは同値である.

Brauer-friendly 加群の Green 対応は Brauer-friendly 加群であり, 次のように明示的に表示出来る.

**補題 3.2** ([12, Lemma 4.5])**.** $(P, b_P)$ を $(G, b)$-subpair, $f^b_{b_P}$ を $(P, b_P)$ に関する Green 対応とする. このとき, ある $(P, b_P)$-slash 関手 $Sl'_{(P,b_P)}$ が存在して次の $\mathcal{O}N_G(P, b_P)b_P$-加群としての同型が成り立つ:

$$f^b_{b_P}(B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S)) \cong B(b_P, (P, b_P, V), Sl'_{(P,b_P)}, S).$$

特に次の同型が成り立つ:

$$f^b_{b_P}(BS(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)})) \cong BS(b_P, (P, b_P, V), Sl'_{(P,b_P)}).$$

次の補題は Scott 加群に対する命題 [10, Chapter 4, Theorem 8.6 (ii)] の Brauer-friendly 加群に対応する結果である.

**補題 3.3** ([12, Lemma 4.6]). $P$ を $G$ の $p$-部分群, $H$ を $PC_G(P) \le H$ を満たす $G$ の部分群, $b'$ を $\mathcal{O}H$ のブロック, $(P, b_P)$ を $(G, b)$-subpair とする. $(P, b_P)$ は $(H, b')$-subpair でもあり, $(P, b_P, V)$ は fusion-stable endo-permutation source triple であると仮定する. このとき, ある $t \in N_G(P, b_P)$ と $(P, b_P)$-slash 関手 $Sl''_{(P,b_P)}$ と単純 $k[\overline{N}_H(P, b_P)]\overline{b}_P$-加群 $S'$ で次が満たす物が存在する:

$$B(b', (P, b_P, {}^tV), Sl''_{(P,b_P)}, S') \mid \mathrm{Res}^G_H(B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S)).$$

特に次が成り立つ:

$$BS(b', (P, b_P, {}^tV), Sl''_{(P,b_P)}) \mid \mathrm{Res}^G_H(BS(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)})).$$

次は, [6, Lemma 2.2] の H. Kawai の結果に対応するものである.

**補題 3.4** ([12, Lemma 4.9]). $(P, b_P)$ を $(G, b)$-subpair, $(Q, b_Q) \le_G (P, b_P)$, $H = N_G(Q, b_Q)$ とする.
もし $R = {}^gP \cap H$ が $\{{}^iP \cap H \mid i \in G, (Q, b_Q) \le {}^i(P, b_P)\}$ の極大元ならば, ある $(R, b_R)$-slash 関手 $Sl_{(R,b_R)}$, ある $n \in G$, ある単純 $k[\overline{N}_H(R, b_R)\overline{b}_R]$-加群 $S'$ が存在して

$$B(b_Q, (R, b_R, \mathrm{Cap}(\mathrm{Res}^{{}^nP}_R({}^nV))), Sl_{(R,b_R)}, S') \mid \mathrm{Res}^G_H(B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S))$$

が成り立つ (ここで, $b_R$ は $(R, b_R) \le {}^g(P, b_P)$ を満たす唯一のブロックである).

次の補題は, [6, Lemma 2.1] の Thévenaz のテキストの exercise に対応するものである.

**補題 3.5** ([12, Lemma 4.10]). $(P, b_P)$ を $(G, b)$-subpair, $Q \le_G P$, $M = B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S)$, $H = N_G(Q, b_Q)$ とする. [2, Lemma 10(i)] より, $b_Q\mathrm{Res}^G_H(M) = L \oplus L'$($L$ は Brauer-friendly $\mathcal{O}Hb_Q$-加群, $L'$ は各直既約因子の vertex が $Q$ を含まない) と直和分解し, $L = \bigoplus_{1 \le i \le n} L_i$ と直既約分解する. $Z_i = \mathrm{vtx}(L_i)$ とする.
このとき, 各 $L_i$ に対して, ある $g_i \in G$, ある $S_i$:単純 $k[N_H(Z_i, b_{Z_i})/Z_i]\overline{b}_{Z_i}$-加群が存在して,

$$Sl_{(Q,b_Q)}(L_i) \cong B(b_Q, (Z_i, b_{Z_i}, \mathrm{Cap}(\mathrm{Res}^{g_iP}_{Z_i}({}^{g_i}V))[Q]), Sl_{(Z_i,b_{Z_i})}, S_i) \oplus (\bigoplus_j X_{i,j})$$

が成り立つ. ここで, $X_{i,j}$ は直既約 Brauer-friendly $kHb_Q$-加群でその source triple $(\mathrm{vtx}(X_{i,j}), b_{\mathrm{vtx}(X_{i,j})}, s(X_{i,j}))$ は次の条件を満たす:

$$(Q, b_Q) \le {}^\exists(\mathrm{vtx}(X_{i,j}), b_{\mathrm{vtx}(X_{i,j})}) \le (Z_i, b_{Z_i}),\ {}^\exists\mathrm{s}(X_{i,j}) \mid \mathrm{Res}^{Z_i}_{\mathrm{vtx}(X_{i,j})}(\mathrm{Cap}(\mathrm{Res}^{g_iP}_{Z_i}({}^{g_i}V)))[Q].$$

これより, 次の同型が成り立つ:

$$\begin{aligned} Sl_{(Q,b_Q)}(M) &\cong Sl_{(Q,b_Q)}(L) \\ &\cong \bigoplus_{1 \le i \le n} \big(B(b_Q, (Z_i, b_{Z_i}, \mathrm{Cap}(\mathrm{Res}^{g_iP}_{Z_i}({}^{g_i}V))[Q]), Sl_{(Z_i,b_{Z_i})}, S_i) \oplus (\bigoplus_j X_{i,j})\big). \end{aligned}$$

次の補題は [6, Lemma 3.1] の subpair 版である．[6, Lemma 3.1] と同じように示すことが出来る．

**補題 3.6** ([12, Lemma 4.12])**.** $(P, b_P)$ を $(G, b)$-subpair, $Q$ を $G$ の fully $\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$-normalized 部分群とする．$(Q, b_Q) \leq (P, b_P)$ と仮定する．このとき, $N_P(Q)$ は次の集合の極大元である

$$\{{}^gP \cap N_G(Q, b_Q) \mid g \in G, (Q, b_Q) \leq {}^g(P, b_P)\}.$$

次の補題は [6, Lemma 3.2] の subpair 版である．

**補題 3.7** ([12, Lemma 4.13])**.** $(P, b_P)$ を $(G, b)$-subpair, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ とする．もし $Q$ が $P$ の fully $\mathcal{F}$-automized かつ $\mathcal{F}$-receptive な部分群ならば, $(Q, b_Q) \leq ({}^gP, {}^gb_P)$ を満たす各 $g \in G$ に対して $N_{{}^gP}(Q) \leq_{N_G(Q,b_Q)} N_P(Q)$ が成り立つ.

# 4 主結果

主定理の中で必要になる加群を説明していく．$(P, b_P)$ を $(G, b)$-subpair, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$, $Q$ を $P$ の fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群, $M = B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S)$ とする．このとき, 補題 3.6 より部分群 $N_P(Q)$ は次の集合の極大元になる

$$\{{}^gP \cap N_G(Q, b_Q) \mid g \in G, (Q, b_Q) \leq {}^g(P, b_P)\}.$$

よって, 補題 3.4 より, ある $n \in G$, ある $(N_P(Q), b_{N_P(Q)})$-slash 関手 $Sl_{(N_P(Q),b_{N_P(Q)})}$, ある単純 $k[\overline{N}_{N_G(Q,b_Q)}(N_P(Q), b_{N_P(Q)})]\bar{b}_{N_P(Q)}$-加群 $S_Q$ で次の関係を満たすものが存在する:

$$B(b_Q, (N_P(Q), b_{N_P(Q)}, W_Q), Sl_{(N_P(Q),b_{N_P(Q)})}, S_Q) \mid \mathrm{Res}^G_{N_G(Q,b_Q)}(M),$$

ここで, $W_Q = \mathrm{Cap}(\mathrm{Res}^{{}^nP}_{N_P(Q)}({}^nV))$ である．また, 補題 3.5 より各 $(Q, b_Q)$-slash 関手 $Sl_{(Q,b_Q)}$ に対して, 次の関係が成り立つ:

$$B(b_Q, (N_P(Q), b_{N_P(Q)}, V_Q), Sl_{(N_P(Q),b_{N_P(Q)})}, S_Q) \mid Sl_{(Q,b_Q)}(M),$$

ここで, $V_Q = W_Q[Q]$ である．この章では次のように定める:

$$B_Q = B(b_Q, (N_P(Q), b_{N_P(Q)}, V_Q), Sl_{(N_P(Q),b_{N_P(Q)})}, S_Q).$$

次が [6, Theorem 1.3] の一般化にあたる Brauer-friendly 加群の slash 直既約性の同値条件を与える主定理である．

**定理 4.1** ([12, Theorem 5.1])**.** $b$ を $\mathcal{O}G$ のブロック, $(P, b_P)$ を $(G, b)$-subpair, $M = B(b, (P, b_P, V), Sl_{(P,b_P)}, S)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ とする．$Q \leq P$ に対して, $N_Q = N_G(Q, b_Q)$, $H_Q = N_P(Q)$ とする．$\mathcal{F}$ が saturated で $\mathrm{Res}^{N_P}_{PC_G(P)}(S)$ が単純 $\mathcal{O}PC_G(P)$-加群であるとする．このとき, 以下は同値である.

(i) $M$:slash 直既約.

(ii) $\mathrm{Res}^{N_Q}_{QC_G(Q)}(B_Q)$:直既約 ($^\forall Q \leq P$:fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群).

これらの条件が成り立てば, $P$ の各 fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群 $Q$ に対して

$$Sl_{(Q,b_Q)}(M) \cong B_Q$$

が成り立つ.

**注意.** 主定理の証明は, [6, Theorem 1.3] を示すために必要であった補題は前のセクションで用意したので, [6, Theorem 1.3] の証明と同じ方針で示せる. 詳細に関しては [12] に記載してある.

# 参考文献


[1] E. Biland, *Modular representations and local structure of finite groups*, Ph.D. thesis, Paris 7 University and Laval University, (2013).

[2] E. Biland, *Brauer-friendly modules and slash functors*, J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), 2319–2336.

[3] M. Broué, *On Scott modules and p-permutation modules: an approach through the Brauer morphism*, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 401–408.

[4] M. Broué, *Equivalences of blocks of group algebras*, in: Finite-Dimensional Algebras and Related Topics, Kluwer, (1994), 1–26.

[5] Z. Feng and Z. Li, *Endopermutation Scott modules, slash indecomposability and saturated fusion systems*, Comm. Algebra **46** (2018), 3608–3621.

[6] H. Ishioka and N. Kunugi, *Brauer indecomposability of Scott modules*, J. Algebra **470** (2017), 441–449.

[7] H. Kawai, *On indecomposable modules and blocks*, Osaka J. Math. **23** (1986), 201–205.

[8] R. Kessar, N. Kunugi and N. Mitsuhashi, *On saturated fusion systems and Brauer indecomposability of Scott modules*, J. Algebra **340** (2011), 90–103.

[9] M. Linckelmann, *On stable equivalences with endopermutation source*, J. Algebra **434** (2015), 27–45.

[10] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of Finite Groups, Academic Press, San Diego, 1989.

[11] T. Okuyama, *Some examples of derived equivalent blocks of finite groups*, preprint (1997).

[12] N. Watanabe, *Slash indecomposability of Brauer-friendly modules*, SUT J. Math., Vol. 57, No 1, (2021), 35–54.