Hall-Janko群が作用する14次元可換非結合代数について

熊本大学・自然科学教育部　松本恭平
Kyohei Matsumoto,
Graduated school of Science and Technology,
Kumamoto University

1 Introduction

Hall-Janko group J_2 は散在型単純群の一種である．Cohen ([3]) によって J_2 が作用する 315 点上の幾何が構成され，その後 Cohen と Tits（[2]）によってその唯一性が証明された．

Theorem 1.1 ([1], p.408)**.** 距離正則グラフ Γ であり，*intersection array* が $\{10, 8, 8, 2; 1, 1, 4, 5\}$ となるものが唯一存在する．そのグラフの点集合は 315 個であり *distance-transitive* である．また，このグラフの自己同型群は $J_2 : 2$ である．

本講究録では，J_2 が作用する $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上 14 次元可換非結合代数 W を構成する．この代数には 315 個の特別な idempotents があり，これらは前述した距離正則グラフをなしている．最終的に，この idempotents と対応している involutions を構成し W に J_2 が作用することを示す．

2 The definition and some notations

以下，

$$r := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad s := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

とする．W を以下の集合を基底にもつ $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上のベクトル空間とする．

$$\mathscr{B} = \{t,\ x_0,\ x_1, x_2, x_3, x_4,\ y_1, y_2, y_3, y_4,\ z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

Definition 2.1 (inner product)**.** 任意の $k = 0, 1, 2, 3, 4,\ i = 1, 2, 3, 4$ に対し，以下のように内積 $(\cdot\,,\cdot)$ を $\mathscr{B}$ の元に定義し，それを線形に拡張する．

$$(t, t) = 1,\ (x_k, x_k) = 3,\ (y_i, y_i) = (z_i, z_i) = 3r^2.$$

また，$u, v \in \mathscr{B}$ に対し，$u \neq v$ ならば $(u, v) = 0$ とする．つまり $\mathscr{B}$ は直交基底である．

次にベクトル空間の元同士に積を定義するが，その前に以下の行列を用意する．

$$K_1 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix},\ K_2 = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix},\ K_3 = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix},\ K_4 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix},$$

$$D_1=\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix},\ D_2=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix},\ D_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&1\end{pmatrix},\ D_4=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}.$$

任意の行列 X に対し，その転置行列を ${}^tX$ と書く．以上を用いて W に積を定義する．

Definition 2.2 (algebra product)**.** 任意の $k, l = 0, 1, 2, 3, 4$，また任意の $i, j = 1, 2, 3, 4$ に対し以下のように $\mathscr{B}$ に積を定義し，それを W に線形に拡張する．

$$\begin{aligned}
t^2 = t,\quad x_kx_l = -3\delta_{kl}t,\quad y_iy_j = \frac{3}{2}r^2\delta_{ij}(t-x_0),\quad z_iz_j = \frac{3}{2}r^2\delta_{ij}(t+x_0),\\
tx_k = x_k,\quad ty_i = \frac{1}{2}y_i,\quad tz_i = \frac{1}{2}z_i,\quad x_0y_i = -\frac{3}{2}y_i,\quad x_0z_i = \frac{3}{2}z_i,\\
x_i\cdot(y_1, y_2, y_3, y_4) = -\frac{3}{2}(z_1, z_2, z_3, z_4)\cdot K_i,\\
x_i\cdot(z_1, z_2, z_3, z_4) = -\frac{3}{2}(y_1, y_2, y_3, y_4)\cdot {}^tK_i,\\
y_i\cdot(z_1, z_2, z_3, z_4) = -\frac{3}{2}r^2(x_1, x_2, x_3, x_4)\cdot D_1D_iK_i.
\end{aligned}$$

任意の $a \in V$，また任意の $\lambda \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ に対し，

$$W^{(a)}_{\lambda} = \{v \in V \mid av = \lambda v\}$$

と表記すると，上の積の定義から

$$W^{(t)}_1 = \langle t\rangle,\quad W^{(t)}_{-1} = \langle x_0,\ x_1, x_2, x_3, x_4\rangle,\quad W^{(t)}_{1/2} = \langle y_1, y_2, y_3, y_4,\ z_1, z_2, z_3, z_4\rangle$$

となっていることが分かる．つまり

$$W = W^{(t)}_1 \oplus W^{(t)}_{-1} \oplus W^{(t)}_{1/2}.$$

また，直接計算することにより以下も分かる．

Lemma 2.3. 任意の $v_1, v_2, v_3 \in V$ に対し，

$$(v_1v_2, v_3) = (v_1, v_2v_3)$$

が成り立つ．つまり，この内積は結合的である．

3 Idempotents

W の中には特別な 315 個の idempotents がある．前述した通り，これらは最終的には intersection array が $\{10, 8, 8, 2; 1, 1, 4, 5\}$ となる距離正則グラフをなす．

まず，定義より $t \in V$ は idempotent である．それに加え，任意の $k = 0,1,2,3,4$ に対し，

$$t^{\pm}_k := -\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k$$

とおくとこれら 10. 個のベクトルは idempotents になる．実際に

$$(t^{\pm}_k)^2 = (-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k)^2 = \frac{1}{4}(-t \pm x_k)^2 = \frac{1}{4}(t \pm 2x_k - 3t) = -\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k = t^{\pm}_k$$

となるので $t_k^{\pm}$ は idempotent になることが確認できた．
これら 10 個の idempotents を，t と<u>隣接している</u>idempotents (adjacent idempotents) と呼ぶことにする．t と $t_k^{\pm}$ の距離は 1 ということである. $\Gamma_1(t)$ を t と隣接している idempotents の集合とすると，

$$\Gamma_1(t) = \{t_0^{\pm}, t_1^{\pm}, t_2^{\pm}, t_3^{\pm}, t_4^{\pm}\}$$

と表記できる．また，ここまでで手に入った 11 個の idempotents の内積を計算すると，

$$\begin{aligned}
(t,t) = 1, \quad (t_k^+, t_k^+) &= (-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k | -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k) = \frac{1}{4}(-t + x_k | -t + x_k) \\
&= \frac{1}{4}(1+3) = 1, \\
(t_k^-, t_k^-) &= (-\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_k | -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_k) = \frac{1}{4}(-t - x_k | -t - x_k) \\
&= \frac{1}{4}(1+3) = 1
\end{aligned}$$

となり，自分自身との内積は 1 になることが分かる．相異なる idempotents 同士の内積も，

$$\begin{aligned}
(t|t_k^{\pm}) &= (t| -\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k) = -\frac{1}{2}, \\
(t_k^+|t_k^-) &= (-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k | -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_k) = \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 3 = -\frac{1}{2}, \\
(t_k^{\pm}|t_{k'}^{\pm}) &= (-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k | -\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_{k'}) = \frac{1}{4}\cdot 1 \pm \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

のように計算できる.（ただし $k = k'$）

4 Automorphisms and distance 2

次に，前回の章で定義した $t_k^{\pm}$ と隣接している idempotents を構成する．そのために W の automorphism をいくつか構築する.（V の全単射線形写像 f に対し，

$$(v_1^f, v_2^f) = (v_1, v_2), \qquad (v_1v_2)^f = v_1^f v_2^f$$

が任意の $v_1, v_2 \in V$ に対してなりたつとき f を *automorphism* という.)
まずは以下のように行列を定義する．

$$X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; Y_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad T^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 4.1. θ^+ を W の全単射線形写像とし，$\mathscr{B}$ に関する表現行列 Θ^+ が

$$\Theta^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} T^+ & & & \\ & 0 & rY_0 & 0 \\ & -s^tY_0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & X_0 \end{pmatrix}$$

であるとする．このとき θ^+ は *automorphism* になる．

Lemma 4.2. θ^- を W の全単射線形写像とし，$\mathscr{B}$ に関する表現行列 Θ^- が

$$\Theta^- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} T^- & & & \\ & 0 & 0 & -rY_0X_0 \\ & 0 & X_0 & 0 \\ & sX_0{}^tY_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるとする．このとき θ^- は *automorphism* になる．

Lemma 4.3. $\rho \in GL(W)$ を以下のように定義する．

$$\rho : x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4 \longrightarrow x_0$$

$$(y_1^\rho\ y_2^\rho\ y_3^\rho\ y_4^\rho\ \ z_1^\rho\ z_2^\rho\ z_3^\rho\ z_4^\rho) = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ \ z_1\ z_2\ z_3\ z_4)\begin{pmatrix} A & B \\ -A & B \end{pmatrix},$$

ここで，

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -r & r & -s^2 & -r \\ r & s^2 & r & -r \\ s^2 & -r & -r & -r \\ r & r & -r & s^2 \end{pmatrix},\quad B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -r & -s^2 & -r & r \\ -r & r & -s^2 & -r \\ -r & -r & r & -s^2 \\ s^2 & -r & -r & -r \end{pmatrix},$$

である．このとき ρ は *automorphism* になり，その位数は 5 になる．

Lemma 4.1-4.3 を使うことによって，各 $k = 0,1,2,3,4$ に対し $t_k^\pm$ と隣接している idempotents を構成できる．定義から

$$\theta^+ : t \longmapsto t_0^+, \qquad \theta^- : t \longmapsto t_0^-$$

であり，また

$$t^{\theta^\pm\rho^k} = (t_0^\pm)^{\rho^k} = (-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_0)^{\rho^k} = -\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k = t_k^\pm$$

である．よって，

$$\varphi_k^\pm := \theta^\pm\rho^k$$

とおくと

$$t^{\varphi_k^\pm} = t_k^\pm$$

となる．以上より，$l = 0,1,2,3,4$ に対して，

$$u_{kl}^\pm := (t_l^\pm)^{\varphi_k^+},\quad v_{kl}^\pm := (t_l^\pm)^{\varphi_k^-}$$

とおくと，これらはそれぞれ t_k^+，t_k^- と隣接した idempotents になっている．
これらの idempotents が，今までで手に入れた 11 個の idempotents と異なっているとは限らない．実際に $l = 0$ のときを計算してみると，

$$\begin{aligned} u_{k0}^\pm = (t_0^\pm)^{\varphi_k^+} = (-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_0)^{\theta^+\rho^k} = (-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_0)^{\theta^+\rho^k} &= -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_0)^{\rho^k} \pm \frac{1}{2}(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}x_0)^{\rho^k} \\ &= -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k) \pm \frac{1}{2}(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}x_k) \\ &= \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}x_k \pm (\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}x_k) \end{aligned}$$

となるので

$$u_{k0}^+ = t, \quad u_{k0}^- = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k = t_k^+$$

がいえて，

$$\begin{aligned} v_{k0}^{\pm} = (t_0^{\pm})^{\varphi_k^-} = (-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_0)^{\theta^-\rho^k} = (-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_0)^{\theta^-\rho^k} &= -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_0)^{\rho^k} \pm \frac{1}{2}(-\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}x_0)^{\rho^k} \\ &= -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_k) \pm \frac{1}{2}(-\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}x_k) \\ &= \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}x_k \pm (-\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}x_k) \end{aligned}$$

となるので

$$v_{k0}^+ = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k = t_k^+, \quad v_{k0}^- = t$$

がいえる．$l \neq 0$ のときも直接計算すると，各 $u_{kl}^{\pm}, v_{kl}^{\pm}$ たちは $t, t_k^{\pm}$ と異なることがわかり，互いに相異なることも分かる．つまりそれら $u_{kl}^{\pm}, v_{kl}^{\pm}$ と t との距離は 2 である．$\Gamma_2(t)$ を t との距離が 2 である idempotents の集合とすると，

$$\Gamma_2(t) = \{\, u_{kl}^{\pm},\ v_{kl}^{\pm} \mid k = 0,1,2,3,4.\ \ l = 1,2,3,4.\}$$

となり，

$$|\Gamma_2(t)| = 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 80$$

であることも分かる．

5 Distance 3 and 4

同様の議論を繰り返し，$v_{kl}^{\pm}, u_{kl}^{\pm}$ と隣接している idempotents を作り続けることを考える．V をそのようにして手に入れた idempotents の集合とし，E を idempotents のペアで，隣接しているものの集合とする．

Proposition 5.1. $\Gamma := (V, E)$ というグラフを考えると以下が成り立つ．

(1) Γ の直径は 4,

(2) $|\Gamma_3(t)| = 160,\ |\Gamma_4(t)| = 64.$

(3) このグラフの *intersection array* は $\{10, 8, 8, 2; 1, 1, 4, 5\}$ になる．
したがって，$|V| = 1 + 10 + 80 + 160 + 64 = 315$ となる．

また，以上のプロセスで手に入れた 315 の idempotents と対応する involutions を構成することができる．

Proposition 5.2. 任意の $a \in V$ に対し，$\tau(a)$ を以下のように定義する全単射線形写像とする．

$$\tau(a) : v \longmapsto \begin{cases} v & \mathit{if}\ v \in V_1^{(a)} \oplus V_{-1}^{(a)} \\ -v & \mathit{if}\ v \in V_{1/2}^{(a)}. \end{cases}$$

このとき $\tau(a)$ は *involution* になる．

任意の $a, a' \in V$ に対し，内積と $\tau(a)\tau(a)$ の位数には以下のような関係がある

a と a' の距離	0	1	2	3	4
(a, a')	1	$-1/2$	$1/4$	$-1/8$	$(1 \pm 3\sqrt{5})/16$
order of $\tau(a)\tau(a')$	1	2	4	3	5

$G := \langle \tau(a) \rangle_{a \in V}$ という群を考えると，グラフの一意性より Hall-Janko 群が作用するということが分かる.

参考文献

[1] Brouwer, A.E., Cohen, A.M., Neumaier, A.: Distance-Regular Graphs. Modern Surveys in Mathematics. Springer, Berlin (1989)

[2] A. M. Cohen, and J.Tit, On generalized hexagons and a near octagon whose lines have three points, Europian J. Combin. 6 (1985) 13-27.

[3] A. M. Cohen, Geometries Originating from Certain Distance-Regular Graphs, in Finite Geometries and Designs (eds P. Cameron, J. Hirschfeid and D. Hughes), London Math. Soc. Lecture Notes Set. 49 (1981), 81-87.

[4] A. M. Cohen, A near octagon associated with HI, Report ZN 96,1980, Math. Centrum, Amsterdam.

[5] A. M. Cohen, Finite quaternionic reflection groups, I. Algebra 64 (1980), 293-324.

[6] J. Tits, Quarternions over $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, Leech's lattice, and the sporadic group of Hall-Janko, J. Algebra 63 (1980),56-75.

[7] Yoshiara, S. On the geometry of the Hall-Janko group on 315 points. Geom Dedicata 32, 173201 (1989).

[8] Hall, J. I. and Hall, M.,‘Geometry of the Hall-Janko Group’, Algebras, Groups and Geometries 2 (1985), 390398.

[9] M. Whybrow, An infinite family of axial algebras, J. Algebra 577 (2021)