パラメータ付きのイデアル操作の計算について

On Computations of Ideal Operations with Parameters

東京理科大学　　石原侑樹 *1
Yuki Ishihara
Tokyo University of Science

Abstract

This article introduces computations of ideals with parameters. Many ideal operations with parameters can be computed using *comprehensive Gröbner systems*. Let $K[A,X]$ be the polynomial ring over a field K, where $A=\{a_1,\ldots,a_m\}$ is a set of parameters and $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ is a set of ordinary valuables. For a value $\alpha\in K^m$, we denote by φ_α the homomorphism from $K[A,X]\to K[X]$ by $\varphi_\alpha(f(A,X))=f(\alpha,X)$. For a given parametric ideal operation $\mathcal{F}$ and input ideals $I_1,\ldots,I_l$ of $K[A,X]$, we compute a system of pairs (S_i,G_i) such that $\varphi_\alpha(G_i)$ is a basis of $\mathcal{F}(\varphi_\alpha(I_1),\ldots,\varphi_\alpha(I_l))$ for all $\alpha\in S_i$ and $\bigcup S_i=K^m$.

1　はじめに

イデアルは可換環論の基本的な概念であり，様々な分野において登場する．研究や応用においてはイデアルがパラメータを含む場合も多いため，パラメータも考慮したイデアル操作の計算が重要となる．イデアル操作の例としては，イデアルの共通部分やイデアル商などが挙げられる．本稿では，包括的グレブナー基底系（Comprehensive Gröbner System, CGS）を用いたイデアル操作の計算方法について紹介する．なおここでは体上の多項式環のイデアルを対象し，「パラメータ付きイデアル操作を計算する」とは，パラメータの値ごとに分類したイデアル操作の結果の生成系（またはグレブナー基底）を求めることを意味する．本稿の具体例における通常のイデアル操作の計算は数式処理ソフトウェア Risa/Asir [7] 上のライブラリ `noro_pd.rr` を使用しており，また包括的グレブナー基底系の計算は `https://www.rs.tus.ac.jp/~nabeshima/softwares.html` にて公開されている [5] によるものを利用している．

2　準備

本稿では，K を体とし，$A=\{a_1,\ldots,a_m\}$ をパラメータの集合，$X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ を通常の変数の集合とする．K としては主に有理数体 $\mathbb{Q}$ や複素数体 $\mathbb{C}$ などが想定される．パラメータを含む多項式 $f(A,X)=f(a_1,\ldots,a_m,x_1,\ldots,x_n)$ に対し，値 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in K^m$ を代入する写像を φ_α とする．すなわち，φ_α は $K[A,X]$ から $K[X]$ への環準同型であり，$\varphi_\alpha(f(A,X))=f(\alpha,X)$，つまり $\varphi_\alpha(a_1,\ldots,a_m,x_1,\ldots,x_n)=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,x_1,\ldots,x_n)$ である．可換環 R の元 $f_1,\ldots,f_s$ から生成されるイデアルを $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle_R$ で表す．可換環 R が明らかな場合には，簡単に $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ と書く．$K[A]$ のイデアル J に対し，$V(J)=\{\alpha\in K^m\mid g(\alpha)=0,\forall g\in J\}$ とする．また，$\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots,\}$ を自然数全体の集合とする．

*1 〒 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3　E-mail: yishihara@rs.tus.ac.jp

2.1　イデアル操作について

1 つまたは複数のイデアルに対し，新しいイデアルを作る操作を考えることができる．例えば，イデアル I と J に対しその和 $I+J$ もまたイデアルである．本稿ではこのような操作のことをイデアル操作と呼ぶ．よく使われるイデアル操作の例を下記に列挙する．

- イデアル和 ： $I+J=\{f+g \mid f\in I, g\in J\}$
- イデアル積 ： $I\cdot J=\langle fg \mid f\in I, g\in J\rangle$
- 共通部分 ： $I\cap J=\{f \mid f\in I$ かつ $f\in J\}$
- イデアル商 ： $I:J=\{f \mid fJ\subset I\}$
- 飽和イデアル ： $I:J^\infty=\{f \mid$ ある $m\in\mathbb{N}$ が存在して $fJ^m\subset I\}$
- イデアルの根基 ： $\sqrt{I}=\{f \mid$ ある $m\in\mathbb{N}$ が存在して $f^m\in I\}$
- 局所化の縮約 ： $IK[A,X]_S\cap K[A,X]$，ここで S は積閉集合
  - 極大独立集合による局所化：$IK[A,X]_{K[U]^\times}\cap K[A,X]$，ここで U は I の極大独立集合

パラメータを含むイデアル操作を計算する場合の問題点として，「イデアル操作」と「値を代入する操作」が必ずしも可換にはならないことが挙げられる．すなわち，下記のような図式が可換になるとは限らない．

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{I}_{K[A,X]}\times\mathcal{I}_{K[A,X]} & \xrightarrow{\varphi_\alpha\times\varphi_\alpha} & \mathcal{I}_{K[X]}\times\mathcal{I}_{K[X]} \\
{\scriptstyle\mathcal{F}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\mathcal{F}}\big\downarrow \\
\mathcal{I}_{K[A,X]} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \mathcal{I}_{K[X]}
\end{array}$$

ここで，$\mathcal{I}_R$ は可換環 R のイデアル全体の集合，$\mathcal{F}:\mathcal{I}_{K[A,X]}\times\mathcal{I}_{K[A,X]}\to\mathcal{I}_{K[A,X]}$ は 2 つのイデアルを入力として持ち，1 つのイデアルを出力として持つイデアル操作である．なお $\mathcal{F}$ は入力を $K[X]$ のイデアルに制限すると，出力も $K[X]$ のイデアルとなると仮定する．

例えば，多項式環 $\mathbb{Q}[a,x,y]$ のイデアル $I=\langle x+a, y^2\rangle$ と $J=\langle x^2, xy\rangle$ に対し，$\mathcal{F}$ として共通部分をとる操作を考えると

$$\mathcal{F}(\varphi_\alpha(I),\varphi_\alpha(J))=\varphi_\alpha(I)\cap\varphi_\alpha(J)=\begin{cases}\langle x^2, xy\rangle & \alpha=0\\ \langle xy^2, x^2y+axy, x^3+ax^2\rangle & \alpha\neq 0\end{cases}$$

となり，a の値により，$\varphi_\alpha(I)\cap\varphi_\alpha(J)$ の生成系の表現は異なる．特に，$\alpha=0$ の時，

$$\varphi_\alpha(I)\cap\varphi_\alpha(J)\neq\varphi_\alpha(I\cap J)=\langle x^3, x^2y, xy^2\rangle$$

であり，共通部分をとる操作と代入する操作は非可換となっている．

2.2　包括的系について

上述したように，イデアル操作 $\mathcal{F}$ と代入操作 φ_α は可換であるとは限らない．したがって，パラメータ付きのイデアル操作を「計算」するためには，イデアル操作の結果が安定するようにパラメータの値を分類する必要がある．すなわち，次のような系を求める必要がある．

定義 1
$\mathcal{F}$ を $K[A,X]$ の l 個のイデアル $I_1 \ldots, I_l$ を引数として持つイデアル操作とする．$S_1,\ldots,S_r$ を K^m の被覆[1)]，$G_1,\ldots,G_r$ を $K[A,X]$ の有限集合とする．$\{(S_1,G_1),\ldots,(S_r,G_r)\}$ が，各 i について，任意の $\alpha \in S_i$ に対し

$$\varphi_\alpha(G_i) = \mathcal{F}(\varphi_\alpha(I_1),\ldots,\varphi_\alpha(I_l))$$

を満たす時，$(\mathcal{F},(I_1,\ldots,I_l))$ の**包括的系**（*Comprehensive System*）と呼ぶこととする．また，略記として，$\mathcal{F}(I_1,\ldots,I_l)$ の包括的系とも呼ぶこととする．

イデアル操作が，グレブナー基底の計算に基づいて計算できる時，上記の包括的系は**包括的グレブナー基底系**を用いて計算できることが多い．

定義 2 (包括的グレブナー基底系 [8, 11])
$F = \{f_1(A,X),\ldots,f_k(A,X)\}$ を $K[A,X]$ の有限集合，$S_1,\ldots,S_r$ を K^m の被覆，$\{G_1,\ldots,G_r\}$ を $K[A,X]$ の有限集合の集合とする．各 i について，任意の $\alpha \in S_i$ に対して，$\varphi_\alpha(G_i)$ がイデアル $\langle f_1(\alpha,X),\ldots,f_k(\alpha,X)\rangle_{K[X]}$ のグレブナー基底であるとき，$\mathcal{G} = \{(S_1,G_1),\ldots,(S_r,G_r)\}$ は F の**包括的グレブナー基底系**（**Comprehensive Gröbner System**）と呼ばれる．

例 1
$A = \{a\}$，$X = \{x,y\}$，$F = \{x^2+ay, xy\}$ に対し，

$$\mathcal{G} = \{(V(a),\{x^2,xy\}),(\mathbb{C}\setminus V(a),\{x^2+ay,xy,y^2\})\}$$

は辞書式順序 $x > y$ に関する F の包括的グレブナー基底系である．

包括的グレブナー基底の計算アルゴリズムは [3, 4, 5, 9, 11] などで研究されている．本稿では，Risa/Asir 上で実装された [5] によるものを利用している[2)]．

注意 1
定義 *1,2* における $S_1,\ldots,S_r$ はここでは構成的集合（*constructible set*，*[1]* 参照）とする．すなわち，各 S_i は有限個の局所閉集合（*locally closed set*）の和集合である．ここで，K^m の部分集合 S が局所閉集合であるとは，$K[A]$ のあるイデアル J_1, J_2 が存在して，$S = V(J_1)\setminus V(J_2)$ と表されることである．また，$\mathcal{G}$ が F の包括的グレブナー基底系であるとき，$\mathcal{G}$ は F が生成するイデアル $I = \langle F\rangle$ の包括的グレブナー基底系とも呼ぶこととする．

3　パラメータ付きイデアル操作の計算方法

この節では，いくつかのイデアル操作について，パラメータを含む場合の包括的系の計算方法について具体例とともに紹介する．通常のイデアル操作の計算については，[2] や [10] に記載されている．また，パラメータ付きのイデアル操作の計算については，[6] や [12] で記載されている．K が複素数体などの代数的閉体の場合，局所閉集合 $V(J_1)\setminus V(J_2)$ が空集合であることと，飽和イデアル $J_1 : J_2^\infty$ が $K[A]$ と等しいことが同値であるため，後者の計算により判定することができる．一方，K が $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{F}_p$ の場合，一般に上記の飽和イデアルの計算だけでは判定できない．例えば，$\mathbb{Q}[a_1,a_2]$ のイデアル $J_1 = \langle a_1^2 + a_2^2\rangle$，$J_2 = \langle a_1, a_2\rangle$ に対し，$J_1 : J_2^\infty = J_1 \neq \mathbb{Q}[a_1,a_2]$ であるが，$V(J_1)\setminus V(J_2) = \emptyset$ である．

---

1) すなわち，$\bigcup_{i=1}^r S_i = K^m$．

2) `https://www.rs.tus.ac.jp/~nabeshima/softwares.html`

<ins>イデアル和</ins>

$K[A,X]$ のイデアル $I=\langle F_1\rangle$，$J=\langle F_2\rangle$ に対し，

$$\mathcal{G}=\{(K^m, F_1\cup F_2)\}$$

は $I+J$ の包括的系である．すなわち，$\varphi_\alpha(I+J)=\varphi_\alpha(I)+\varphi_\alpha(J)$ が任意の $\alpha\in K^m$ に対して成り立つ．

例 2

$I=\langle x^2+ax+1\rangle$，$J=\langle xy\rangle\subset\mathbb{Q}[a,x,y]$ とする時，

$$\mathcal{G}=\{(\mathbb{Q},\{x^2+ax+1, xy\})\}$$

は $I+J$ の包括的系である．

<ins>イデアル積</ins>

$K[A,X]$ のイデアル $I=\langle F_1\rangle$，$J=\langle F_2\rangle$ に対し，

$$\mathcal{G}=\{(K^m, F_1\cdot F_2)\}$$

は $I\cdot J$ の包括的系である．ただし，$F_1\cdot F_2=\{f\cdot g\mid f\in F_1, g\in F_2\}$ である．すなわち，$\varphi_\alpha(I\cdot J)=\varphi_\alpha(I)\cdot\varphi_\alpha(J)$ が任意の $\alpha\in K^m$ に対して成り立つ．

例 3

$I=\langle x^2, ay\rangle, J=\langle x,y\rangle\subset\mathbb{Q}[a,x,y]$ とする時，

$$\mathcal{G}=\{(\mathbb{Q},\{x^3, x^2y, axy, ay^2\})\}$$

は $I\cdot J$ の包括的系である．

注意 2

上記のイデアル和とイデアル積の包括的系に登場する $F_1\cup F_2$，$F_1\cdot F_2$ はグレブナー基底になっているとは限らないため，グレブナー基底を求めたい場合には再度 $F_1\cup F_2$ や $F_1\cdot F_2$ の包括的グレブナー基底系を計算する必要がある．

<ins>共通部分</ins>

$K[A,X]$ において，I，J をイデアル，t を新しい変数とすると，

$$I\cap J=(I\cdot t+J\cdot(1-t))\cap K[A,X]$$

が成り立つ（[2], Lemma 1.8.10）．よって，$\mathcal{G}=\{(S_1,G_1),\ldots,(S_r,G_r)\}$ をブロック順序 $t>>X$ に関する $I\cdot t+J\cdot(1-t)$ の包括的グレブナー基底系とすると，

$$\mathcal{G}'=\{(S_1, G_1\cap K[A,X]),\ldots,(S_r, G_r\cap K[A,X])\}$$

は $I\cap J$ の包括的グレブナー基底系である．また，3 個以上のイデアルの共通部分についても同様に計算できる．実際，$I_1,\ldots,I_l$ をイデアル，$T=\{t_1,\ldots,t_{l-1}\}$ を新しい変数とすると，

$$\begin{aligned} I_1\cap\cdots\cap I_l &= \left(\sum_{i=1}^{l-1} I_i\cdot t_i+I_l\cdot\left(1-\sum_{i=1}^{l-1}t_i\right)\right)\cap K[A,X] \\ &= (I_1\cdot t_1+I_2\cdot t_2+\cdots+I_{l-1}\cdot t_{l-1}+I_l\cdot(1-t_1-t_2-\cdots-t_{l-1}))\cap K[A,X]\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$\mathcal{G}=\{(S_1,G_1),\ldots,(S_r,G_r)\}$ をブロック順序 $T>>X$ に関する $\sum_{i=1}^{l-1} I_i\cdot t_i+I_l\cdot(1-\sum_{i=1}^{l-1} t_i))$ の包括的グレブナー基底系とすると，

$$\mathcal{G}'=\{(S_1,G_1\cap K[A,X]),\ldots,(S_r,G_r\cap K[A,X])\}$$

は $I_1\cap\cdots\cap I_l$ の包括的グレブナー基底系である．

例 4

$I=\langle x^2,ay\rangle$，$J=\langle x,y+b\rangle\subset\mathbb{Q}[a,b,x,y]$ とする時，辞書式順序 $t>x>y$ に関する $(I\cdot t+J\cdot(1-t))=\langle x^2t,ayt,x(1-t),(y+b)(1-t)\rangle$ の包括的グレブナー基底系の 1 つは，

$$\mathcal{G}=\{(\mathbb{Q}^2\backslash V(ab),\{x^2,xy,y^2+by,abt-ay-ab\},(V(b)\backslash V(a),\{x^2,y,tx-x\}),(V(a),\{x^2,(y+b)t-y-b,tx-x\})\}$$

である．したがって，それぞれの生成系から t を含む多項式を除いた

$$\mathcal{G}'=\{(\mathbb{Q}^2\setminus V(ab),\{x^2,xy,y^2+by\},(V(b)\setminus V(a),\{x^2,y\}),(V(a),\{x^2\})\}$$

は $I\cap J$ の包括的系である．

次に，$I_1=\langle ax^2,y\rangle,I_2=\langle by^2,z\rangle,I_3=\langle cz^2,x\rangle\subset\mathbb{Q}[a,b,c,x,y,z]$ に対し，$I_1\cdot t_1+I_2\cdot t_2+I_3\cdot(1-t_1-t_2)$ の辞書式順序 $t_1>t_2>x>y>z$ に関する包括的グレブナー基底系の 1 つは次の 8 つの要素からなる．ここで，t_1,t_2 を含まない多項式に下線を引いている．

- $(\mathbb{Q}^3\setminus V(abc),\{\underline{cz^2y,zyx,by^2x,-azx^2},zt_2,by^2t_2,yxt_2-yx,-ax^2t_2+ax^2,-cz^2t_1+cz^2,yt_1,-xt_2-xt_1+x\})$,
- $(V(a)\setminus V(bc),\{\underline{cz^2y,zyx,by^2x},zt_2,by^2t_2,yxt_2-yx,-cz^2t_1+cz^2,yt_1,-xt_2-xt_1+x\})$,
- $(V(b)\setminus V(ca),\{\underline{cz^2y,zyx,azx^2},zt_2,yxt_2-yx,-ax^2t_2+ax^2,-cz^2t_1+cz^2,yt_1,-xt_2-xt_1+x\})$,
- $(V(c)\setminus V(ab),\{\underline{zyx,by^2x,azx^2},zt_2,by^2t_2,yxt_2-yx,-ax^2t_2+ax^2,yt_1,-xt_2-xt_1+x\})$,
- $(V(a,b)\setminus V(c),\{\underline{cz^2y,zyx},zt_2,yxt_2-yx,-cz^2t_1+cz^2,yt_1,-xt_2-xt_1+x\})$,
- $(V(b,c)\setminus V(a),\{\underline{zyx,azx^2},zt_2,yxt_2-yx,-ax^2t_2+ax^2,yt_1,-xt_2-xt_1+x\})$,
- $(V(c,a)\setminus V(b),\{\underline{zyx,by^2x},zt_2,by^2t_2,yxt_2-yx,yt_1,-xt_2-xt_1+x\})$,
- $(V(a,b,c),\{\underline{zyx},zt_2,yxt_2-yx,yt_1,-xt_2-xt_1+x\})$.

したがって，$I_1\cap I_2\cap I_3$ の包括的系は上記の局所閉集合と下線部からなる生成系の組を集めたものであり，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ に対し，

$$\varphi_\alpha(I_1)\cap\varphi_\alpha(I_2)\cap\varphi_\alpha(I_3)=\begin{cases}\langle xy^2,yz^2,zx^2,xyz\rangle & \alpha_1\neq0,\alpha_2\neq0,\alpha_3\neq0\\ \langle xy^2,yz^2,xyz\rangle & \alpha_1=0,\alpha_2\neq0,\alpha_3\neq0\\ \langle yz^2,zx^2,xyz\rangle & \alpha_1\neq0,\alpha_2=0,\alpha_3\neq0\\ \langle xy^2,zx^2,xyz\rangle & \alpha_1\neq0,\alpha_2\neq0,\alpha_3=0\\ \langle yz^2,xyz\rangle & \alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3\neq0\\ \langle zx^2,xyz\rangle & \alpha_1\neq0,\alpha_2=0,\alpha_3=0\\ \langle xy^2,xyz\rangle & \alpha_1=0,\alpha_2\neq0,\alpha_3=0\\ \langle xyz\rangle & \alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0\end{cases}$$

が成り立つ．なおこの場合には，上記の包括的系をまとめて，

$$\varphi_\alpha(I_1)\cap\varphi_\alpha(I_2)\cap\varphi_\alpha(I_3)=\langle\alpha_2xy^2,\alpha_3yz^2,\alpha_1zx^2,xyz\rangle$$

と書くことも可能である．すなわち，$\mathcal{H} = \{\mathbb{Q}^3, \{bxy^2, cyz^2, azx^2, xyz\}\}$ も $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ の包括的系である．ただし，α の値により消える先頭項があるため，$\mathcal{H}$ は包括的グレブナー基底系とはなっていない．

<u>イデアル商</u>

$K[A,X]$ において，I をイデアル，f を 0 でない多項式とすると，

$$I : \langle f \rangle = (I \cap \langle f \rangle) \cdot f^{-1}$$

が成り立つ（[2], Lemma 1.8.12 参照）．よって，$S_0 = \{\alpha \in K^m \mid \varphi_\alpha(f) = 0\}$ とし，$\mathcal{G} = \{(S_1, G_1), \ldots, (S_r, G_r)\}$ を $I \cap \langle f \rangle$ の包括的系とすると，

$$\{(S_0, \{1\}), (S_1 \setminus S_0, G_1), \ldots, (S_r \setminus S_0, G_r)\}$$

は $I : \langle f \rangle$ の包括的系である．また，$J = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ に対し，$I : J = (I : \langle f_1 \rangle) \cap \cdots \cap (I : \langle f_s \rangle)$ が成り立つため，

$$\varphi_\alpha(I) : \varphi_\alpha(J) = (\varphi_\alpha(I) : \langle \varphi_\alpha(f_1) \rangle) \cap \cdots \cap (\varphi_\alpha(I) : \langle \varphi_\alpha(f_s) \rangle)$$

を用いて，$I : J$ の包括的系も同様に計算できる．別の計算方法として，$J = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ とした時に，$g = f_1 + f_2 t + \cdots + f_s t^{s-1}$ に対し，

$$I : J = (IK[A,X,t] : \langle g \rangle) \cap K[A,X].$$

が成り立つことから（[10], Proposition 2.10 参照），$IK[A,X,t] : \langle g \rangle$ の包括的系を計算することでも求められる．

例 5

$I = \langle x^2, ay^2 \rangle$，$f = by \in \mathbb{Q}[a,b,x,y]$ とする時，まず $S_0 = \{\alpha \in \mathbb{Q}^2 \mid \varphi_\alpha(f) = 0\} = V(b)$ である．また，$I \cap \langle f \rangle$ の包括的系は

$$\mathcal{G} = \{(\mathbb{Q}^2 \setminus V(ab), \{x^2y, y^2\}), (V(a) \setminus V(b), \{x^2y\}), (V(b), \{0\})\}$$

である．したがって，

$$\mathcal{G}' = \{(V(b), \{1\}), (\mathbb{Q}^2 \setminus V(ab), \{x^2, y\}), (V(a) \setminus V(b), \{x^2\})\}$$

は $I : \langle f \rangle$ の包括的系である．次に，$f_1 = f$，$f_2 = x + a$ とする時，$I : \langle f_1, f_2 \rangle$ の包括的系を考える．$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}'$ は $I : f_1$ の包括的系であり，$I : f_2$ の包括的系の 1 つは

$$\mathcal{G}_2 = \{(\mathbb{Q}^2 \setminus V(a), \{x^2, y^2\}), (V(a), \{x\})\}$$

である．$\mathcal{G}_1$ の要素は 3 つ，$\mathcal{G}_2$ の要素は 2 つであるため，$\varphi_\alpha(I : \langle f_1 \rangle)$ と $\varphi_\alpha(I : \langle f_2 \rangle)$ の組み合わせには次の $3 \times 2 = 6$ 通り（空集合を除くと 4 通り）の場合分けが考えられる．

$$(\varphi_\alpha(I : \langle f_1 \rangle), \varphi_\alpha(I : \langle f_2 \rangle)) = \begin{cases} (\langle 1 \rangle, \langle x^2, y^2 \rangle) & \alpha \in V(b) \cap (\mathbb{Q}^2 \setminus V(a)) = V(b) \setminus V(a) \\ (\langle 1 \rangle, \langle x \rangle) & \alpha \in V(b) \cap V(a) = V(a,b) \\ (\langle x^2, y \rangle, \langle x^2, y^2 \rangle) & \alpha \in (\mathbb{Q}^2 \setminus V(ab)) \cap (\mathbb{Q}^2 \setminus V(a)) = \mathbb{Q}^2 \setminus V(ab) \\ (\langle x^2, y \rangle, \langle x \rangle) & \alpha \in (\mathbb{Q}^2 \setminus V(ab)) \cap V(a) = \emptyset \\ (\langle x^2 \rangle, \langle x^2, y^2 \rangle) & \alpha \in (V(a) \setminus V(b)) \cap (\mathbb{Q}^2 \setminus V(a)) = \emptyset \\ (\langle x^2 \rangle, \langle x \rangle) & \alpha \in (V(a) \setminus V(b)) \cap V(a) = V(a) \setminus V(b) \end{cases}$$

したがって，その共通部分を計算すると，

$$\varphi_\alpha(I:\langle f_1\rangle)\cap\varphi_\alpha(I:\langle f_2\rangle)=\begin{cases}\langle x^2,y^2\rangle & \alpha\in V(b)\setminus V(a)\\ \langle x\rangle & \alpha\in V(a,b)\\ \langle x^2,y^2\rangle & \alpha\in\mathbb{Q}^2\setminus V(ab)\\ \langle x^2\rangle & \alpha\in V(a)\setminus V(b)\end{cases}$$

であり，$\varphi_\alpha(I):\langle\varphi_\alpha(f_1),\varphi_\alpha(f_2)\rangle=\varphi_\alpha(I:\langle f_1\rangle)\cap\varphi_\alpha(I:\langle f_2\rangle)$ であるから，

$$\mathcal{G}_3=\{(\mathbb{Q}^2\setminus V(a),\{x^2,y^2\}),(V(a)\setminus V(b),\{x^2\}),(V(a,b),\{x\})\}$$

は $I:\langle f_1,f_2\rangle$ の包括的系である．

飽和イデアル

飽和イデアルを計算する方法の 1 つとしてイデアル商を利用する方法がある．すなわち，十分大きな自然数 m に対し，

$$I:J^\infty=I:J^m$$

が成り立つことを利用する．上記を満たす最小の自然数 m は

$$I:J^k=I:J^{k+1}$$

を満たす最小の自然数 k と等しい．別の計算方法としては，

$$I:f^\infty=(I+\langle 1-f\cdot t\rangle)\cap K[A,X]$$

を利用する方法がある（[10], Proposition 2.9 参照）．さらに別の計算方法としては，$J=\langle f_1,\dots,f_s\rangle$，$g=f_1+f_2t+\cdots+f_st^{s-1}$ に対し，等式

$$I:J^\infty=((I+\langle t-g\rangle):\langle t\rangle^\infty)\cap K[A,X].$$

を利用することもできる（[10], Proposition 2.12 参照）．

例 6

$I=\langle x^2,ay^2\rangle$，$f=by\in\mathbb{Q}[a,b,x,y]$ とする時，$I:\langle f\rangle$ の包括的系の 1 つは

$$\mathcal{G}=\{(V(b),\{1\}),(\mathbb{Q}^2\setminus V(ab),\{x^2,y\}),(V(a)\setminus V(b),\{x^2\})\}$$

である．また，$I:\langle f\rangle^2$ の包括的系の 1 つは

$$\mathcal{G}'=\{(V(b),\{1\}),(\mathbb{Q}^2\setminus V(ab),\{1\}),(V(a)\setminus V(b),\{x^2\})\}$$

である．さらに，$I:\langle f\rangle^3$ の包括的系の 1 つは

$$\mathcal{G}''=\{(V(b),\{1\}),(\mathbb{Q}^2\setminus V(ab),\{1\}),(V(a)\setminus V(b),\{x^2\})\}$$

であることから，$\mathcal{G}'=\mathcal{G}''$ が成立している．したがって，$\mathcal{G}'$ は $I:\langle f\rangle^\infty$ の包括的系である．

根基

まず，パラメータを含まない 0 次元イデアルの根基を計算するには，以下の命題を利用することができる．

命題 3 ([10], Theorem 4.16)
K を完全体，$I \subset K[X]$ を 0 次元イデアルとする． 各 i に対し，$f_i(x_i)$ を $I \cap K[x_i] = \langle f_i \rangle$ を満たす 1 変数多項式とし，g_i を f_i の無平方部分とする．すなわち，$f_i = h_{i1}^{e_1} \cdots h_{ir_i}^{e_{r_i}}$ を f_i の K 上の因数分解とした時，$g_i = h_{i1} \cdots h_{ir_i}$ である．この時,

$$\sqrt{I} = I + \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$$

が成り立つ．

上記の命題は特に K が $\mathbb{Q}$ の時に利用することができる．この命題をパラメータが含む場合に適用することについて考える．ここで，I を $K[A, X]$ のイデアルで，$IK(A)[X]$ が $K(A)[X]$ の 0 次元イデアルであると仮定する．まず，$\varphi_\alpha(I) \cap K[x_i] = \langle \varphi_\alpha(f_i) \rangle$ なる $f_i \in K[A, x_i]$ を計算するために，ブロック順序 $X \setminus \{x_i\} >> x_i$ に関する I の包括的グレブナー基底系 $\mathcal{G}_i = \{(S_{i1}, G_{i1}), \ldots, (S_{ik_i}, G_{ik_i})\}$ を計算する．各 $j = 1, \ldots, k_i$ について，$f_{ij} \in G_{ij} \cap K[A, x_i]$ を適切にとれば，任意の $\alpha \in S_{ij}$ に対して，$\varphi_\alpha(I) \cap K[x_i] = \langle \varphi_\alpha(f_{ij}) \rangle$ が成り立つ．次に，$\varphi_\alpha(f_{ij})$ の無平方部分については，$\varphi_\alpha(f_{ij})$ と $\frac{d}{dx_i}\varphi_\alpha(f_{ij})$（$\varphi_\alpha(f_{ij})$ の x_i に関する微分）の最大公約元 $\gcd(\varphi_\alpha(f_{ij}), \frac{d}{dx_i}\varphi_\alpha(f_{ij}))$ を求めればよい．実際，$\varphi_\alpha(f_{ij})/\gcd(\varphi_\alpha(f_{ij}), \frac{d}{dx_i}\varphi_\alpha(f_{ij}))$ は $\varphi_\alpha(f_{ij})$ の無平方部分に等しい．そして，$\langle f_{ij}, \frac{d}{dx_i} f_{ij} \rangle = \langle \gcd(f_{ij}, \frac{d}{dx_i} f_{ij}) \rangle$ より，それらは $\langle f_{ij}, \frac{d}{dx_i} f_{ij} \rangle$ の包括的グレブナー基底系から計算できる．I が正次元の場合については，[12] に詳細が説明されている．

例 7
$I = \langle x^2, y^2 + a \rangle \subset \mathbb{Q}[a, x, y]$ とする．$\mathcal{G} = \{(\mathbb{Q}, \{x^2, y^2 + a\})\}$ は辞書式順序 $x > y$ に関する I の包括的グレブナー基底系であるから，$I \cap \mathbb{Q}[a, x] = \langle x^2 \rangle$，$I \cap \mathbb{Q}[a, y] = \langle y^2 + a \rangle$ である．ここで，$f_1 = x^2$ の無平方部分は a の値に関わらず x である．一方，$f_2 = y^2 + a$ 無平方部分は a の値によって異なる．実際,

$$\left\langle f_2, \frac{d}{dy} f_2 \right\rangle = \langle y^2 + a, 2y \rangle = \langle a, y \rangle$$

の包括的グレブナー基底系の 1 つは

$$\mathcal{G}' = \{(\mathbb{Q} \setminus V(a), \{1\}), (V(a), \{y\})\}$$

であり，つまり，$f_2 = y^2 + a$ の無平方部分は，$a \neq 0$ の時，$y^2 + a$ であり，$a = 0$ の時，y であることが分かる．よって,

$$\sqrt{\varphi_\alpha(I)} = \begin{cases} \langle x, y^2 + a \rangle & \alpha \in \mathbb{Q} \setminus V(a) \\ \langle x, y \rangle & \alpha \in V(a) \end{cases}$$

であり，$\{(\mathbb{Q} \setminus V(a), \{x, y^2 + a\}), (V(a), \{x, y\})\}$ は $\sqrt{I}$ の包括的系である．

<u>局所化の縮約</u>

$K[A, X]$ の積閉集合 S に対し，イデアル I の S に関する局所化の縮約 $IK[A, X]_S \cap K[A, X]$ の計算について考える．S が積に関して有限生成である場合には飽和イデアルを用いて計算できる．すなわち，S が $h_1, \ldots, h_k$ で生成されている場合,

$$IK[A, X]_S \cap K[A, X] = I : \langle h_1 \cdots h_k \rangle^\infty$$

が成立するため，$I : \langle h_1 \cdots h_k \rangle^\infty$ の包括的系を求めればよい．S が有限生成でない場合，例えば，素イデアル P の補集合である場合などは，一般に局所化の計算は難しい．しかし，X の部分集合 U に対し，$K[U]^\times = K[U] \setminus \{0\}$ の局所化の計算は，次の命題により飽和イデアルを用いて計算することができる．

命題 4 ([2], Proposition 4.3.1)
I を $K[X]$ のイデアル，U を X の部分集合とする．$IK(U)[X \setminus U]$ のグレブナー基底 $G = \{f_1, \ldots, f_s\} \subset K[X]$ に対し，$K(U)$ を係数体とした時の $f_1, \ldots, f_s$ の先頭係数の最小公倍元を h とする．すなわち，$h = \mathrm{lcm}(\mathrm{lc}(f_1), \ldots, \mathrm{lc}(f_s)) \in K[U]$ である．この時，

$$IK[X]_{K[U]^\times} \cap K[X] = I : \langle h \rangle^\infty$$

が成り立つ．

U が極大独立集合の場合には，I の次元がパラメータによって変わるかどうかも考える必要がある．詳細は [12] に記載されている．

例 8
$\mathbb{Q}[a, x, y]$ において，$I = \langle x^2, xy \rangle$，$S$ を $y + a$ で生成される積閉集合とする．この時，

$$\varphi_\alpha(I)\mathbb{Q}[x, y]_{\varphi_\alpha(S)} \cap \mathbb{Q}[x, y] = \varphi_\alpha(I) : \langle \varphi_\alpha(y + a) \rangle^\infty$$

が成り立つ．$I : \langle y + a \rangle^\infty$ の包括的系の 1 つは

$$\mathcal{G} = \{(\mathbb{Q} \setminus V(a), \{x^2, xy\}), (V(a), \{x\})\}$$

であり，これは $I\mathbb{Q}[a, x, y]_S \cap \mathbb{Q}[a, x, y]$ の包括的系でもある．

4 まとめ

パラメータ付きのイデアルは純粋数学や応用数学などで登場することも多い．本稿ではパラメータを含むイデアル操作の計算について，包括的グレブナー基底を利用した方法を紹介した．実際の計算においては，包括的系の表現およびパラメータ空間の分割の仕方も重要であり，目的に合わせてより適したアルゴリズムを考える必要がある．

参 考 文 献

[1] Brunat, J.M., Montes, A.: Computing the Canonical Representation of Constructible Sets. Math.Comput.Sci. 10, 165-178 (2016) decomposition. J. Symb. Comput. 110, 1-23 (2022)

[2] Greuel, G.-M., Pfister, G.: A Singular Introduction to Commutative Algebra. Springer, Heidelberg (2002). https://doi.org/10.1007/978-3-662-04963-1

[3] Kapur, D., Sun, Y. and Wang, D. :An efficient algorithm for computing a comprehensive Gröbner system of a parametric polynomial system. J. Symb. Comp., **49**, 27–44, (2013).

[4] Montes, A., Wibmer, M.:Gröbner bases for polynomial systems with parameters. J. Symb. Comput., 45 (12) 1391-1425 (2010)

[5] Nabeshima, K.: Stability conditions of monomial bases and comprehensive Gröbner systems, Proc. CASC2012, Lecture Notes in Computer Science, **7442**, 248-259, Springer (2012)

[6] Nabeshima, K., Tajima, S.: Testing Zero-Dimensionality of Varieties at a Point. Math.Comput.Sci. 15, 317-331 (2021)

[7] Risa/Asir developing team. Risa/Asir. a computer algebra system. http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir.

[8] 佐藤洋祐. 包括的グレブナー基底 (系) 入門. 数式処理. **14** (1)，3-15，日本数式処理学会 (2007)

[9] Suzuki, A. and Sato. Y.: A simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner bases. In Proceedings of the 2006 international symposium on Symbolic and algebraic computation (ISSAC '06). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 326-331. (2006)

[10] Vasconcelos, W.: Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Algorithms and Computation in Mathematics, **2**, Springer, Heidelberg (2004)

[11] Weispfenning, V. Comprehensive Gröbner bases, J. Symb. Comp. 14(1), 1-29 (1992)

[12] Yokoyama, K.: Stability of Parametric Decomposition. In: Iglesias, A., Takayama, N. (eds) Mathematical Software - ICMS 2006. ICMS 2006. Lecture Notes in Computer Science, vol 4151 (2006)