角度に制限を設けた格子三角形による正方形の三角形分割

Triangulation of a square with angle-restricted lattice triangles

東京理科大学大学院　　青木史也 *1
FUMIYA AOKI
Graduate School, Tokyo University of Science

東京理科大学　　武田渉 *2
Wataru takeda
Tokyo University of Science

東京理科大学　　関川浩 *3
Hiroshi Sekigawa
Tokyo University of Science

Abstract

We consider a triangulation of a square with lattice triangles under the condition that the angles of all triangles are 45 or more and less than 90 degrees. We show that the triangulation satisfying the condition is possible for a square with side length n, where $n = 10, 11, 13$ or more.

1　はじめに

様々な条件の下で正方形を三角形分割する問題が考えられる. 先行研究 [1] では, 正方形を 45 度, 60 度, 75 度の角をもつ相似な三角形のみで分割する方法について考えられている. 本研究では, この条件を変更した問題を考える.

以下, 第 2 節において, 今回扱う問題を紹介する. 第 3 節において, 分割する三角形の数が最小の場合と, 三角形分割されている正方形の周囲に台形を置いて, より大きな正方形の三角形分割を得る方法を考える. 第 4 節において, 第 3 節で扱った以外の分割方法を考える. 最後に第 5 節において, まとめを行う.

2　問題

先行研究 [1] では, 正方形を 45 度, 60 度, 75 度の角をもつ相似な三角形のみで分割する方法について考えられている. この問題の条件を緩和した上で, 格子点の要素を含めた問題として, 本研究では以下の問題を考える.

*1 E-mail: `1421502@alumni.tus.ac.jp`
*2 E-mail: `w.takeda@rs.tus.ac.jp`
*3 E-mail: `sekigawa@rs.tus.ac.jp`

問題 1
1 辺の長さが自然数 n の正方形を以下の条件の下で三角形分割せよ. また, 三角形分割可能な n を求めよ.

- 三角形の頂点座標は全て整数
- 三角形の角は全て 45 度以上 90 度未満
- 三角形の辺上に他の三角形の頂点があってよいものとする

数値計算やコンピュータグラフィックスなどで用いる三角形分割では三角形の辺上に他の三角形の頂点が存在することは許さないが本研究では三角形の辺上に他の三角形の頂点があってよいものとする.

3 主結果

第 2 節の問題を考えるにあたり, 前提となる正方形の辺の分け方と 2 種類の分割方法について述べる. 今回の方針は三角形の数が最小の場合での分割方法から考える. また, n での三角形分割から, 台形を組み合わせてより大きい n での分割方法を考える. そして, いずれの手法でも不可能である n において別の方法でも不可能であるかを考える.

3.1 正方形の辺上に底辺がある三角形

以下条件を満たす三角形のみを考える. 最小の三角形は底辺 2 高さ 2 の二等辺三角形なので頂点同士の距離は必ず 2 以上である. また, 正方形の隅における最小の三角形は底辺 3 高さ 2 の三角形である. このことから正方形の辺からの距離が 1 の点は三角形の頂点にならない. 正方形の隅を埋める三角形は必ず 45 度の角をもち, かつ正方形の対角線上に頂点が存在するため, 底辺の長さを x としたときにとり得る高さは $x/2$ より大きく x 未満となる (表 1, 図 1).

表 1: 底辺に対して可能な高さ

底辺	高さ	高さ (正方形の隅)
2	2	-
3	2, 3	2
4	3, 4	3
5	3, 4, 5, 6	3, 4
6	4, 5, 6, 7	4, 5
7	4, 5, 6, 7, 8	4, 5, 6

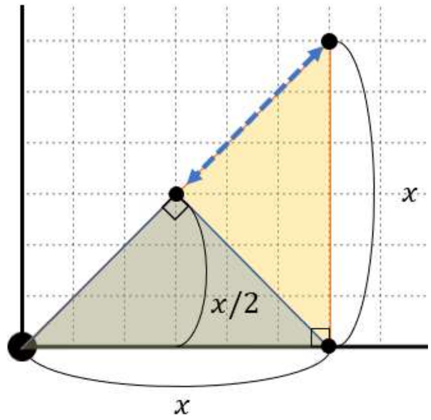


図 1: 正方形の隅を埋める三角形

3.2 三角形の数が最小の場合

問題の条件を満たす分割の三角形の最小の個数は 14 個であり, その場合から考える.

最小である 14 個の三角形の場合の作り方

手順 1 まず, 正方形の隅を分けるためには 45 度の角をもつ三角形を作る必要がある. これを 1 頂点が正方形の 1 辺のだいたい半分の位置になるようにとり, なおかつ正方形の同じ辺上に底辺をもつ三角形の高さが異なるように, 4 つの隅に対して行うのでこれで三角形が 8 個 (図 3(a)①).

手順 2 正方形の辺上にある頂点と正方形の対角線上にとった頂点で三角形を作ると 4 個 (図 3(a)②).

手順 3 中央にひし形ができるので, それを分けてこれで三角形が 2 個 (図 3(a)③).

これを n がいくつのときに行うことができるか考える (表 2).

前提として, 手順 1 で正方形の同じ辺上に底辺をもつ三角形の高さが等しい場合, 手順 2 の三角形を作った時点で台形が生じてしまう. 辺を分けるときに台形しか作れない場合, 台形の高さが全て等しいときは内側により小さい正方形が生じるため意味がない (図 2(a)).

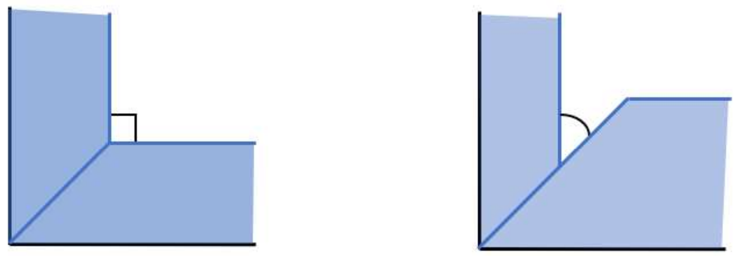
高さが異なる台形を組み合わせる場合, 境目に 45 度の隙間が生じるため制限が大きく, 結果的に意味がない (図 2(b)).

- 45 度の角をもつ最小の三角形は底辺が 3 であるため, この時点で $n \geqq 6$ となる.
- $n = 6$ のとき, 中心にできるひし形が正方形となり不可能.
- $n = 7$ のとき, 手順 1 でできる三角形が底辺と高さの比が 3:2 と 4:3 の三角形となり, 手順 2 でできる三角形が直角三角形となり不可能.
- $n = 8$ のとき, 正方形の辺を 4:4 に分けるとき, 高さ 2 のときは直角三角形, 高さ 3 のときは正方形の同じ辺上に底辺をもつ三角形の高さが等しくなるため不可能. 正方形の辺を 3:5 に分けるとき, 底辺 5 の三角形がとれる高さは 3, 4 となるが, いずれも手順 2 が不可能.

- $n = 9$ のとき, 正方形の辺は 3:6, 4:5 に分けることができる. 正方形の辺を 3:6 に分けるとき, 底辺 6 に対しとれる高さは 4, 5 となるが, いずれも手順 2 が不可能. 4:5 のとき, 底辺 5 のときの高さの候補は 3, 4 のみだが, 3 のときは手順 3 が不可能で, 4 のときは手順 2 が不可能.
- $n = 12$ のとき, 正方形の辺は 3:9, 4:8, 5:7, 6:6 に分けることができ, 高さは表 2 の組み合わせとなる. この中で手順 2 の三角形を作ることができるのは両方とも高さ 4 の場合のみであるが, この場合は台形となるため不可能.
- $n = 10, 11, 13$ のときに可能なことが分かり, n がこれ以上の場合も図 3(c) のように座標をとることにより同様に行うことができる.

以上の結果を定理としてまとめる.

定理 1
$n = 10, 11, 13$ 以上の場合に, 三角形の個数が最小である 14 個で, 条件を満たす三角形分割が可能である.

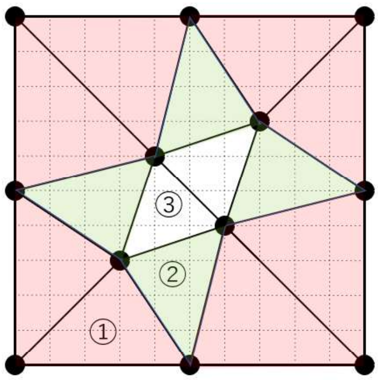


(a) 隣接する台形の高さが等しい場合　　(b) 隣接する台形の高さが異なる場合

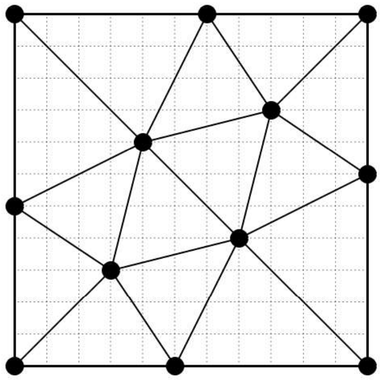
図 2: 辺を分けるときに台形しか作れない場合

表 2: 辺の分け方と高さの比の組み合わせ

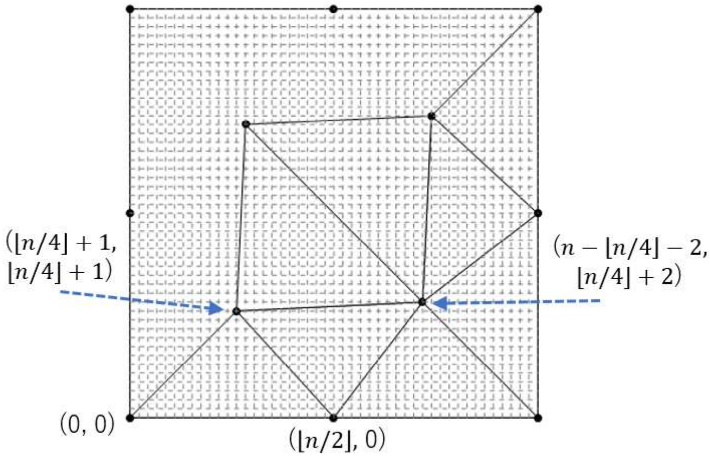
n	辺の分け方	高さの比
6	3:3	2:2
7	3:4	2:3
8	3:5	2:3, 2:4
	4:4	3:3
9	3:6	2:4, 2:5
	4:5	3:3, 3:4
12	3:9	2:5, 2:6, 2:7, 2:8
	4:8	3:5, 3:6, 3:7
	5:7	3:4, 3:5, 3:6, 4:4, 4:5, 4:6
	6:6	4:4, 4:5, 5:5



(a) $n=10$ の場合



(b) $n=11$ の場合



(c) 座標を n で表した場合 ($n = 10, 11, 13$ 以上)

図 3: 三角形の数が最小の場合

3.3　台形を用いる場合

三角形分割した正方形の周囲に 4 個の台形を置くことにより, [2] と同様の考え方により大きい正方形の三角形分割が得られる (図 4). また, 台形は三角形を組み合わせることにより上底と下底の長さを変えることができる (図 5).

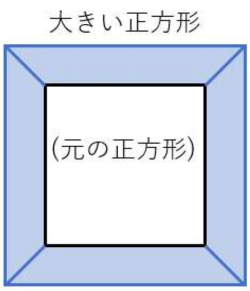


図 4: 台形の組み合わせ方

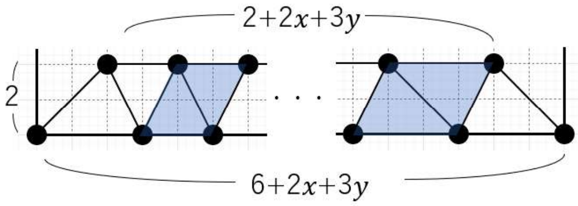


図 5: 高さ 2 の場合の台形の作り方

台形の高さが 2 のとき, 上底と下底の長さは 2 通りの増やし方がある (図 5).

(a) 底辺 2 の三角形を用いた場合 $(2+2x):(6+2x)$ $(x \geqq 0)$, $n=2+2x$ で可能ならば, $n=6+2x$ も可能

(b) 底辺 3 の三角形を用いた場合 $(2+3y):(6+3y)$ $(y \geqq 0)$, $n=2+3y$ で可能ならば, $n=6+3y$ も可能

また, (a) と (b) を組み合わせると $(2+2x+3y):(6+2x+3y)$ となり, これにより n が可能な場合, $n+4$ の場合も可能であることが分かる.

台形の高さ 3 のとき, 上底と下底の長さは 3 通りの増やし方がある. 先程と同様の方法で考えると, 上底が 3, 4 の台形に底辺が 3, 4, 5 の平行四辺形を追加することができる.

つまり, $n=3+3x+4y+5z$ または $n=4+3x+4y+5z$ $(x,y,z \geqq 0)$ で可能な場合, $n+6$ も可能. これにより, n が可能な場合, $n+6$ の場合も可能であることが分かる.

定理 2
一辺が n の正方形が条件を満たす三角形分割されているとき, 周囲に高さが 2, あるいは 3 の台形を 4 個置くことにより, 一辺が $n+4$, あるいは $n+6$ の正方形の三角形分割が得られる.

4 第 3 節で扱った以外の分け方

第 3 節で述べた方法では網羅できていないパターンを考える.

正方形の辺の他の分け方, 手順 1 で作成した三角形の辺の延長, もしくはさらに細かく分けることは可能であるか考える. そのために正方形の辺上にある三角形の頂点が角度の条件を満たしている場合についてのみ考える. ただし, 三角形が条件を満たすが高さが全て等しい場合は台形となり, 組み合わせても内側に直角が生じるので不可能である.

4.1 $n=6\sim 9$ の場合

$n=6\sim 9$ の場合, 三角形の辺をさらに細かく分ける方法を考える.

- $n=6,7$ のとき, 細かく分けることができないので不可能.
- $n=8$ のとき, 分け方は 3:2:3 の 1 通りのみであり, 台形になるため不可能.
- $n=9$ のとき, 分け方は 2 通りのみであり, 3:2:4 の場合は角度の条件が成立しないため不可能, 3:3:3 の場合は台形になるため不可能.

4.2 $n = 12$ の場合

$n = 12$ の場合は従来の方法に合わせて考慮すべき箇所が増えるのでその部分も合わせて考えていく. $n = 6 \sim 9$ の場合と同様に考えると, 正方形の辺を 3 つ以上に分ける組み合わせは 14 通りであるが, 3:2:3:4 の場合を除いて台形になるか角度の条件が成立しないかのいずれかとなる (表 3).

3:2:3:4 が含まれる場合と正方形の辺が含まれる三角形の辺を延長する場合に成立する可能性が残されているため, その場合について考える (図 6).

3:2:3:4 が含まれる場合, 正方形の辺を埋めた時点で内側にできる多角形の組み合わせは 4 通り存在するが (図 7), いずれの場合も多角形に含まれる直角の制約が大きく不可能となる.

また, 3:2:3:4 が含まれる場合の考え方として, この図形に含まれる角 (約 161.6 度) の分け方が 2 通りある (図 8). 2 つに分ける場合, 角を分割する辺をとることができる範囲が非常に狭いため不可能となる. 3 つに分ける場合, 台形と同様に考えると, 隅から接続することができるように辺をとると残る部分に直角が発生し, 残りを分割するためには必ず直角三角形ができるので不可能となる.

辺を延長した場合, 基本的にすでに考えた三角形の辺を整数倍伸ばす必要がある (図 9). この場合に延長した先の点をとることができるかを考えると, 3:2:3:4 につなぐ場合のみ点をとることができるが, 前述の通り結果的に不可能となる.

表 3: $n = 12$ の場合に正方形の辺を 3 つ以上に分ける組み合わせ

辺の分け方	備考
3:6:3	手順 2 が不可
3:3:3:3	高さ 2 の台形が可能
3:2:2:2:3	高さ 2 の台形が可能
3:2:3:4	図 6 参照
3:3:2:4	手順 2 が不可
4:4:4	高さ 3 の台形が可能
4:2:2:4	手順 2 が不可
3:4:5	手順 2 が不可
3:2:2:5	手順 2 が不可
3:3:6	手順 2 が不可
4:3:5	手順 2 が不可
5:2:5	手順 2 が不可
4:2:6	手順 2 が不可
3:2:7	手順 2 が不可

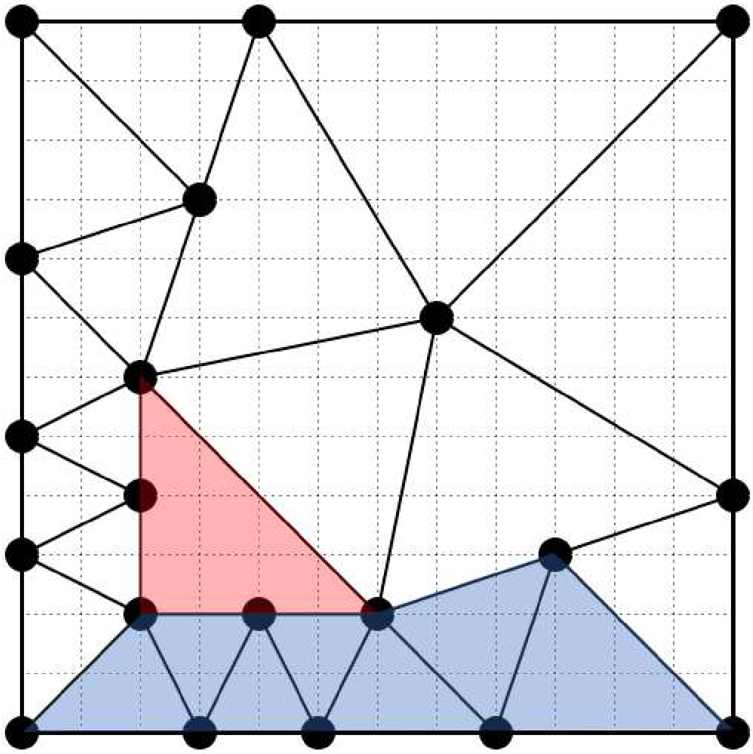


図 6: 3:2:3:4 の場合かつ大きい三角形ができる例 (失敗例)

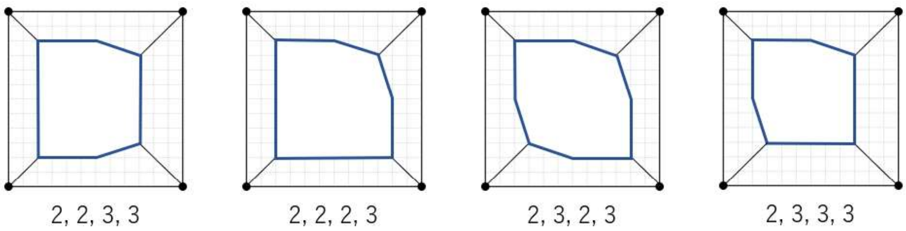
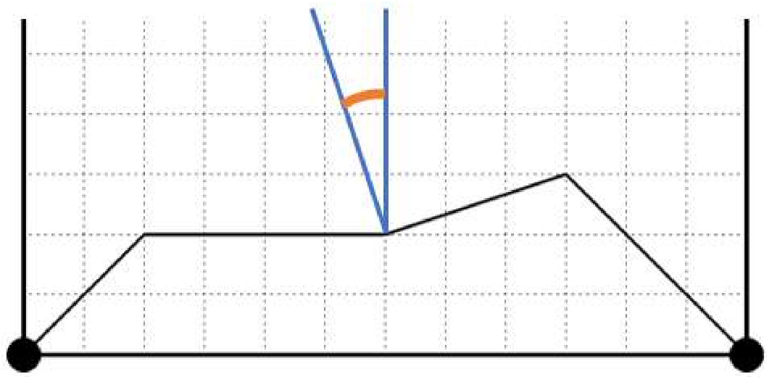
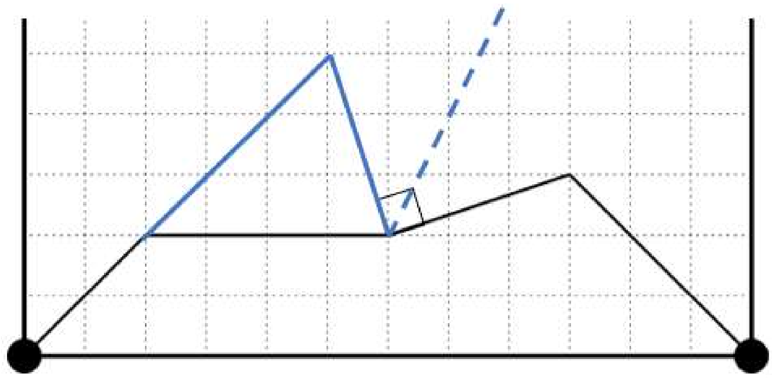


図 7: 3:2:3:4 が含まれる場合に内側にできる多角形



(a) 角を 2 つに分ける場合



(b) 角を 3 つに分ける場合

図 8: 三角形の数が最小の場合

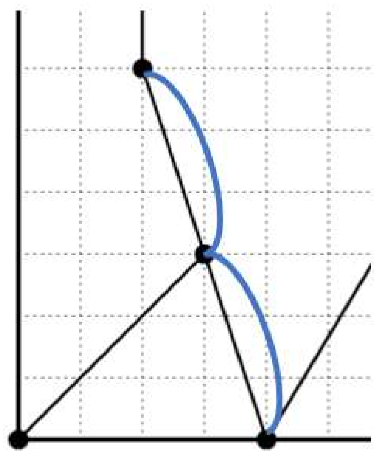


図 9: 辺を延長した場合

5 おわりに

本研究では, $n = 10, 11, 13$ 以上の場合に条件を満たす三角形分割が可能であることを示し, それ以外で不可能であることを示した. 今後の課題としては, $n = 12$ の可能性を調べるにあたり, より効率的な方法を考えたい.

参 考 文 献

[1] What is the smallest number of $45° - 60° - 75°$triangles that a square can be divided into. Stack Exchange. https://math.stackexchange.com/questions/44684 （参照 2022-12-14）.

[2] M. Laczkovich. Tilings of Polygons with Similar Triangles. *Combinatorica* 10, 281–306, 1990.