マンハッタン距離ボロノイ図からの母点探索

Finding the sites from a Voronoi diagram in the Manhattan distance

東京理科大学大学院　山中 悠輔 *1
Yusuke Yamanaka
Graduate School, Tokyo University of Science

東京理科大学　武田 渉
Wataru Takeda
Tokyo University of Science

東京理科大学　関川 浩
Hiroshi Sekigawa
Tokyo University of Science

Abstract

In this paper, we consider the problem to find the sites from a Voronoi diagram with unknown sites in the Manhattan distance. First, we introduce new concepts of bending points and hint lines, and obtain properties to find the sites. Then, we propose an algorithm to find the sites using the properties and investigate its computational complexity and computational error. Furthermore, given a partition of the plane, we discuss a method to determine whether it is a Manhattan distance Voronoi diagram or not.

1 はじめに

複数の点が与えられた際（この点のことを母点と呼ぶ）、どの点に最も近いかによって平面を分割した図形であるボロノイ図は、数学に限らず生物学や建築学など様々な分野で利用されている。ボロノイ図に関連した研究として、母点が与えられた時にボロノイ図を求めるもの（[1] 等を参照）はもちろん、ボロノイ図から母点を求めるというもの [2] や任意の平面分割図形からそれに近いボロノイ図を求めるといったもの [3] がある。これは地理情報処理分野や自然界にみられる平面分割図形の解析 [3] などで利用される。

上記の研究では通常、距離はユークリッド距離が用いられる。そこで本研究では距離をユークリッド距離からマンハッタン距離へと変更した際においても同様にボロノイ図から母点を求めることが可能か、ということや任意の平面分割図形がボロノイ図かどうかを判定する方法について示す。

*1 〒 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3　E-mail: 1421521@alumni.tus.ac.jp

2 諸定義

本節では、以下の議論で必要な概念などを定義しておく。

定義 1 (ボロノイ領域、ボロノイ図)
平面上に n 点からなる集合 $\{p_1, \cdots, p_n\}$（各点 p_i を母点と呼ぶ）が与えられている時、p_i までの距離 $d(x, p_i)$ が最短となる点 x からなる領域

$$V(p_i) = \{x \mid d(x, p_i) \leq d(x, p_j), \forall j \neq i\}$$

を母点 p_i のボロノイ領域という。また $\{V(p_1), V(p_2), \cdots, V(p_n)\}$ をボロノイ図と呼ぶ。

定義 2 (ボロノイ辺、ボロノイ点、次数)
2 つ以上のボロノイ領域に共通な境界をなす辺のことをボロノイ辺、3 つ以上のボロノイ領域に共通な境界をなす点のことをボロノイ点といい、ボロノイ点に接続する辺の本数を次数と呼ぶ。

以下ではマンハッタン距離でのボロノイ図のみを扱う。

定義 3 (マンハッタン距離)
次の $d(p_1, p_2)$ のことをマンハッタン距離と呼ぶ。

$$d(p_1, p_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \qquad (p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2))$$

これはアメリカのマンハッタンのような碁盤の目をした道路での距離の測り方に似ていることからその名がついた。タクシーでの移動に似ていることから、マンハッタン距離を利用した幾何学は taxicab geometry とも呼ばれる。

マンハッタン距離の場合ボロノイ領域の共通部分が面になる場合があるが、後述の性質 1 に挙げるように辺に次元を落として考えている。ただし、今回設定する条件によりそういった場合は現れない。

以下ではボロノイ図と水平、垂直な辺からなる長方形との共通部分が与えられているとする。

定義 4 (枠、屈曲点)
与えられた長方形の外周を枠と呼ぶことにする。この時、ボロノイ点でも枠とボロノイ辺の交点でもない、ボロノイ辺の傾きが変わる点のことを屈曲点と呼ぶことにする。

これ以降、ボロノイ図とは、枠内に制限したボロノイ図のことを指す。

定義 5 (ヒント線)
屈曲点から、屈曲点で接続する 2 つの線分がなす角のうち $135°$ 側の領域へ、屈曲点に接続する水平もしくは垂直な線分に対して垂直に伸びる半直線のことをヒント線と呼ぶことにする。

ここで、ボロノイ辺には水平、垂直、傾き ± 1 の線分のみ現れることが容易に分かるので、屈曲点で接続する 2 つの線分のなす角は $135°$、$225°$ の 2 種類になる。屈曲点で接続する 2 つの線分のなす角が $90°$ になる場合（水平な線分と垂直な線分が接続する場合など）は後述する性質から現れることはない。図 1 に屈曲点から伸びるヒント線の例を挙げた。ヒント線と母点の関係については後で記述する。

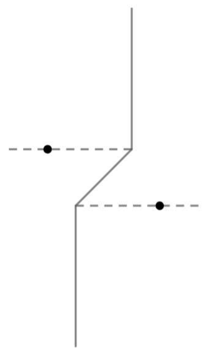

図 1: ヒント線の例（破線部がヒント線）

3　条件付きの母点探索

既存の研究としてボロノイ図から母点を求める問題 [2] や任意の平面分割図形からそれに近いボロノイ図を求める問題 [3] がある。前者はボロノイ辺が両側の領域の母点を結んだ線分の垂直 2 等分線であることを利用して、任意の位置に定めた 1 つの母点から他のすべての母点を得た後、縦横比を維持したまま母点全体の拡大縮小、平行移動を行い全ての辺に対して垂直 2 等分線の条件が満たされるようにする、という解法が用いられている。後者では与えられた平面分割図形の辺がその両側の領域の母点を結んだ線分の垂直 2 等分線に近くなることを利用する解法が用いられている。しかしそのどちらもがユークリッド距離での研究である。

そこで今回、距離をマンハッタン距離にして問題を以下のように変更したものについて考える。

問題 1
母点が不明なマンハッタン距離ボロノイ図から母点を得ることは可能か?

ただし今回条件として以下の 5 つを追加した。

1. 与えられた図がボロノイ図である。
2. 母点が全て枠の中に含まれている（ただし、枠上に母点は存在しない）。
3. 全ての母点の x 座標は異なる（y 座標に関しても同様）。
4. 2 つの母点を結んだ直線の傾きは ± 1 ではない。
5. ボロノイ点の次数は 3 のみ。

与える図を任意の平面分割図形ではなく、条件の 1 によって図 2 のようなボロノイ図と分かっている図形とすることで問題を扱いやすくした。条件の 2 は、枠の外側に母点が存在する場合、ボロノイ辺が全て現れず後に述べるヒント線が十分な数得られないため、こういった場合を除くこととした。また条件の 3 から 5 は母点の位置が同一直線上などに並ぶことはなく、ランダムであることを表している。これはボロノイ図の中にはボロノイ辺のみでは母点の位置が一意に定まらない図 3 の様な例があるため、そういったものを除く意図がある。

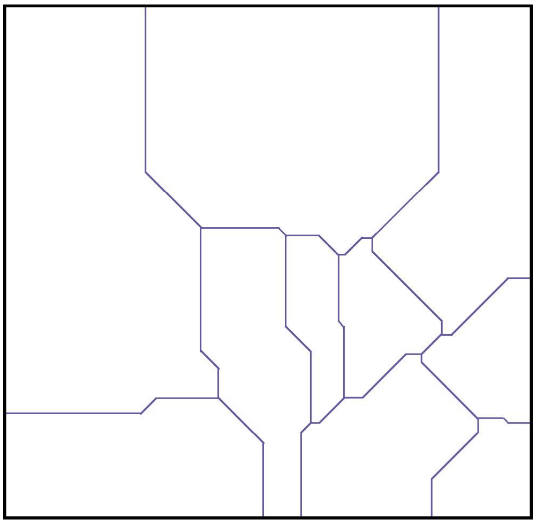

図 2: 母点を失ったボロノイ図の例

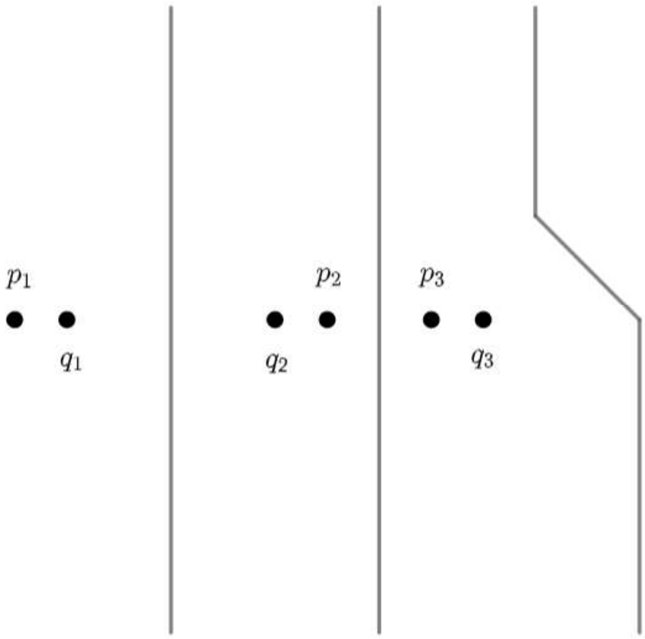

図 3: 母点が一意に定まらない例。母点を p_1, p_2, p_3 としても q_1, q_2, q_3 としても同じボロノイ図となる。

4　既存の性質と新たに得た性質

マンハッタン距離ボロノイ図におけるいくつかの性質を挙げる。

性質 1 (Giuseppe Liotta, Henk Meijer [4])
母点が 2 つのマンハッタン距離ボロノイ図は 8 種類のみであり、それらの唯一のボロノイ辺は傾き ±1 の線分、水平あるいは垂直な直線もしくは半直線からなる。

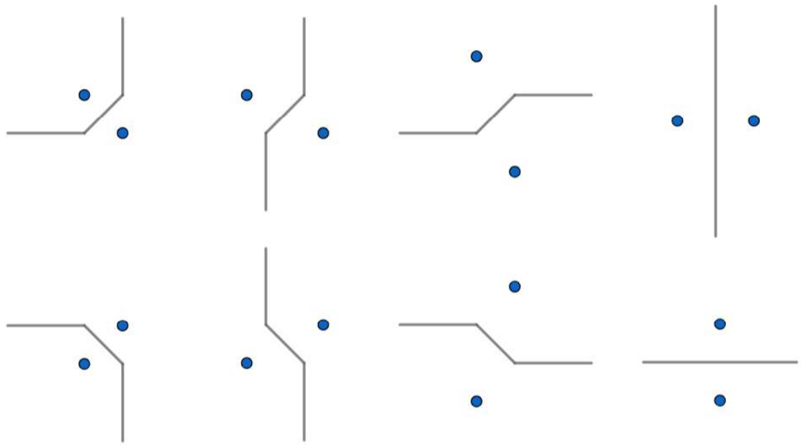

図 4: 母点が 2 つの時の 8 種類のボロノイ図

図 1 にその 8 種類を全て記載した。ただし 1 番左の列の 2 種類のボロノイ図は 2 つの母点を結んだ直線の傾きの絶対値が 1 の時である。第 2 節で述べたように、この 2 種類のボロノイ図にはボロノイ領域の共通部分が面になる部分が存在するが、今回面の一方の境界をなす半直線を採用して次元を落とし考えている。左から 2 列目は 2 つの母点を結んだ直線の傾きの絶対値が 0 より大きく 1 より小さい時であり、左から 3 列目はその絶対値が 1 より大きい時である。1 番右の列のボロノイ図は母点を結んだ直線が座標軸と平行な場合、つまり 2 つの母点の x 座標もしくは y 座標が一致した時である。設定した条件より、現れるボロノイ図は中央 2 列の 4 種類である。

性質 2 (Giuseppe Liotta, Henk Meijer [4])
マンハッタン距離ボロノイ図における各ボロノイ領域 $V(p_i)$ は星型多角形であり、母点 p_i は kernel 内に存在する。

星型多角形とは他の辺と交差しないように辺上の任意の点と結ぶことの出来る点が存在する多角形のことで、そういった点全体の集合を kernel と呼ぶ (図 5 の灰色部分が kernel)。

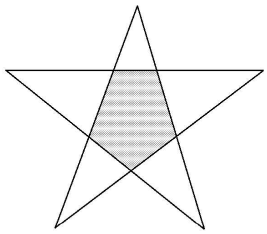

図 5: 星型多角形の例とその kernel（灰色部）

性質 3 (Giuseppe Liotta, Henk Meijer [4])
2 つの母点を隣り合わない頂点とする、水平、垂直な辺からなる長方形をとると、ボロノイ辺の傾き ±1 の部分はちょうどその長方形に収まる。

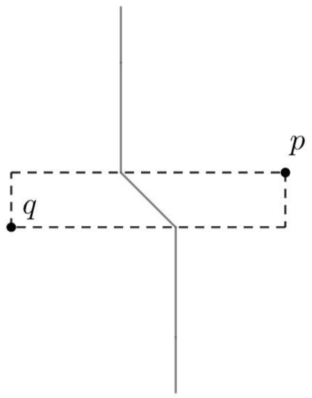

図 6: 性質 3 の例

図 6 は性質 3 の例である。ただし図 4 のうち右端の列は長方形が現れないが、傾きが ±1 の線分が存在しないため問題ない。また、この性質からヒント線は母点を通ることが分かる。

以下は先ほど設定した条件下でのみ成立する性質であり、本研究で得られたものである。

性質 4
全ての母点が枠内に含まれる時、ボロノイ辺の傾き ±1 の部分も全て枠内に含まれる。

性質 4 は性質 3 を全ての母点へと拡張したものである。また、条件 2 で挙げたように母点は枠上には存在しない。この性質から枠内に全ての母点が含まれていれば全てのヒント線を得ることが出来ると分かる。

性質 5
ボロノイ辺上、隣り合う 2 つのボロノイ点間には、必ず傾きが ±1 の部分が存在する。

この性質を利用することで性質 6 と 7 を得る。

性質 6
ボロノイ辺のみで囲まれた領域にはヒント線が 4 本存在する。

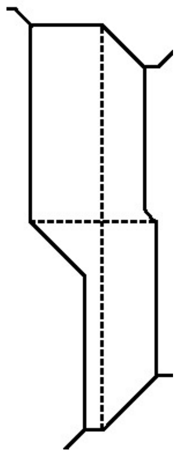

図 7: 性質 6 の例（破線部がヒント線）

図 7 では上下の屈曲点から伸びる 2 本のヒント線、左右の屈曲点から伸びる 2 本のヒント線がそれぞれ重なっているため、見掛け上、それぞれ 1 本に見えるが、ヒント線の合計した本数は 4 本である。ここで、現れるヒント線は水平な半直線と垂直な半直線がそれぞれ 2 本ずつであるため交点が最大 4 つであるが、性質 3 より平行な 2 つの半直線は同一直線上にあるため、見かけ上 2 本の直線となり交点が 1 つとなる。

性質 7
枠の一部が含まれる領域ではヒント線が 3 本、または直交する 2 本が存在する。

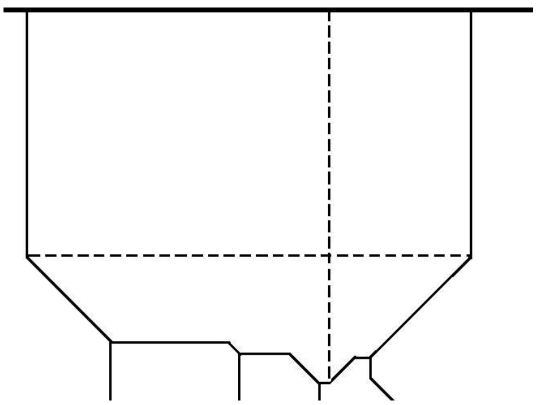

図 8: 性質 7 の例（破線部がヒント線）

図 8 では、左右の屈曲点から伸びる 2 本のヒント線が重なって 1 本に見えているが、ヒント線の合計した本数は 3 本である。性質 6 と同様に、現れるヒント線は水平な半直線と垂直な半直線が合計 3 本であるため交点が最大 2 つであるが、性質 3 より平行な 2 つの半直線は同一直線上にあるため、見かけ上 2 本の直線となり交点が 1 つとなる。

性質 6 と 7 は全ての領域でヒント線が交差することを示している。そしてこれらの性質をまとめたものが以下の定理である。

定理 6
全てのボロノイ領域においてヒント線は 1 点で交差し、またその交点は必ず母点になる。

5 提案するアルゴリズム

ここからは系 6 を利用したアルゴリズムを提案する。

アルゴリズム 1 (設定した条件の下で母点を得るアルゴリズム)

入力: 各頂点の情報（頂点番号, 座標, 頂点の種類, 頂点周辺の領域と角度, 隣接している頂点の番号のリスト）

出力: 母点の座標

1. 頂点を 1 つとる。
2. その点が屈曲点かどうかチェック。
3. その両隣の頂点が屈曲点かどうかチェックし、屈曲点でないならその頂点の座標からわかる適切な母点の座標を得て、選んだ頂点の 135° 側の領域の母点の座標とする。
   両方の頂点をチェックした後、次の頂点へ移動し 2 へ。
4. 全ての頂点を探索したら得た母点の座標を出力し終了。

ステップ 2 で使用する角度は入力情報の頂点周辺の角度のことである。頂点が屈曲点である際、現れる角度は 135° と 225° の 2 種類であるが、ヒント線が現れるのは 135° の領域側であるため、ステップ 2 にてチェックを行う。この時以下の定理が成り立つ。

定理 7
頂点数を n とすると、アルゴリズムの計算量は $O(n)$。また、このアルゴリズムでは計算誤差は発生しない。

証明 このアルゴリズムでは全ての頂点を一巡するだけで済む。そのため計算量は $O(n)$ となる。また母点の座標を求める際に、頂点の各座標の値を用いるだけであるため計算誤差は発生しない。 ∎

6 条件の一部を削除した場合の母点探索

ここからは条件として挙げていた以下の 2 つの条件を削除したものについて考える。

- 与えられた図がボロノイ図である。
- 全ての母点の x 座標は異なる（y 座標に関しても同様)。

上の条件を削除したことにより、与えられた図がボロノイ図かどうかの判定をする必要が発生する。このためボロノイ図である時に現れる図の場合分けを初めに行う。

1 つ目は先ほどまで扱ってきた全ての領域でヒント線が交差する場合である。この時はまず、先ほどまでのアルゴリズムでヒント線を利用し母点の候補となる点を得る。そして得た点からボロノイ図を作成し、元の与えられた図と一致するかを確認する。傾きが ± 1 の線分は性質 5 より枠外には存在しないことと、枠内から延長する形で存在しない水平垂直な半直線は母点が枠外に必要なため存在しないこと、の 2 点から枠内が一致していれば枠外も一致することが分かる。

2 つ目は図 9 のようなボロノイ図ではあるがヒント線が現れないもしくは交差しない場合である。この時母点の位置は不定となり一意に定まることはない。ただし線分の間の長さを l_i、左端から母点までの距離

を x、k を 1 から i まで動く変数とするとボロノイ図の性質から、以下が成り立つような位置に母点は存在する。

$$(-1)^k x > (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i l_i$$

k に 1 から i まで代入した全ての不等式を満たすような母点の候補となる点を求め、1 つ目同様得た点からボロノイ図を作成し、元の与えられた図と一致するかを確認する。

3 つ目はヒント線が最低 1 つは交差する場合である。これは 1 つ目と 2 つ目の場合分けの中間の状態で、母点の候補が分かる領域とそうでない領域に分かれる。この時は母点の候補が分かっていない領域の中で、母点の候補が分かっている領域に最も近い母点を探索し、ボロノイ図の性質であるボロノイ辺がその両側の母点からの距離が等しいことを利用し、母点が分かる領域を広げる。この操作を繰り返すことで全ての領域で母点の候補となる点を見つけることが出来、先ほどまでと同様にそれらの点からボロノイ図を作成し元の図形と一致するかを確認する。

これらをまとめると図 10 のような流れとなる。

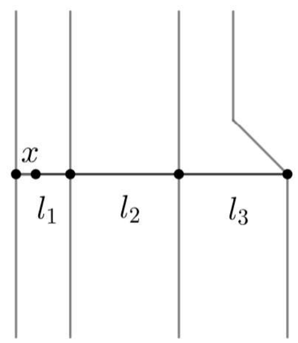

図 9: 母点の位置が不定となる例

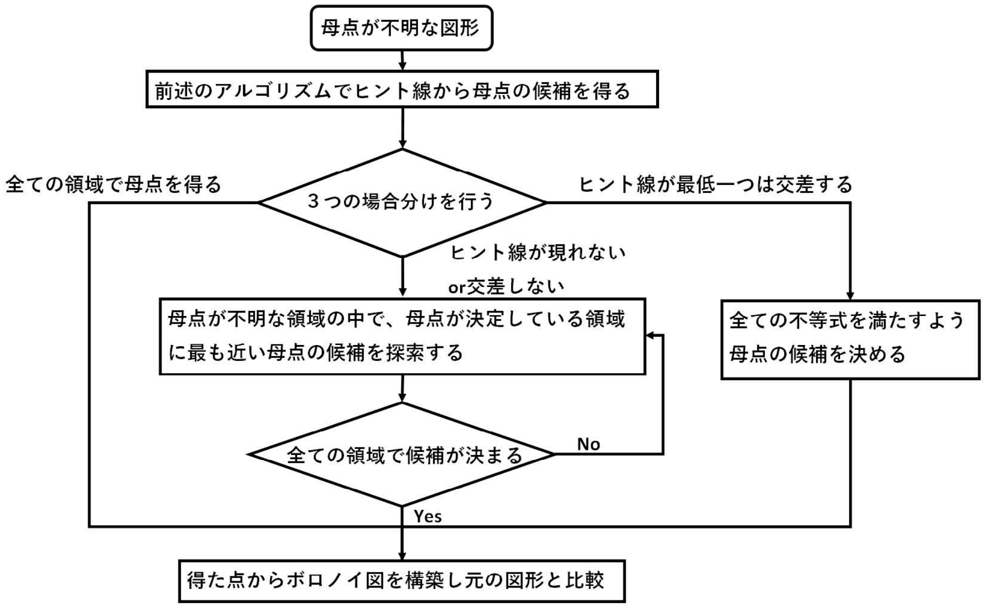

図 10: 条件を緩めた時の探索の流れ

7 まとめ

今回、条件を設定し、マンハッタン距離ボロノイ図であると分かっている場合の母点探索において、誤差無く母点を得ることが出来た。その条件を緩め元の図形がボロノイ図か不明とした場合については、ボロノイ図か否かの判定が出来た。

ただし後半の条件を緩めた際には、ヒント線から得た点が母点か確認するため、最後にボロノイ図を構築する操作がある。これを無くすにはマンハッタン距離ボロノイ図であることと同値な、扱いやすい条件が必要である。

謝　辞

この研究は科研費 21K11760 の助成を受けたものである。

参 考 文 献

[1] Mark de Berg, Otfried Cheong, Mrac van Kreveld, and Mark Overmars, *Computational Geometry: Algorithm and Applications*, Third Edition (2008), Springer.

[2] David Hartvigsen, Recognizing Voronoi Diagrams with Linear Programming, *Informs Journal on Computing* 4(4) (1992), 369–374.

[3] 神田 毅, 複雑な幾何計算の不要なボロノイ図あてはめ法, 情報処理学会研究報告アルゴリズム（AL）(2000), 57–64.

[4] Giuseppe Liotta, Henk Meijer, Voronoi Drawings of Trees, *Computational Geometry* 24 (2003), 147–178.