

カーネル法による回帰と分類のシステム制御への応用

東京大学大学院情報理工学系研究科 山内淳矢

Junya Yamauchi

Graduate School of Information Science and Technology

The University of Tokyo

1 はじめに

カーネル法はデータ間の非線形な関数関係を求める手法であり、機械学習や統計学で広く用いられている。カーネル法により求められる関数は、カーネル関数と呼ばれる関数により変換したデータの線形和として求められる。このカーネル関数を変更することで様々な問題に適用できるという柔軟性がカーネル法の大きな特徴である。また、再生核ヒルベルト空間という理論的な背景を持ち、数学的に厳密な解析が可能である [1]。本稿では、著者の専門分野であるシステム制御理論とカーネル法の接点について概説する。システム制御理論は定理を導く研究が一般的であるため、カーネル法との相性が良いと考えられる。

本稿ではまず、カーネル法とシステム制御理論のこれまでの関係について紹介する。つづいて、システム制御理論とカーネル法の基本的な問題である回帰と分類についてそれぞれ概説する。最後に、カーネル法に基づいたシステム制御分野の最近の発展において、その基本アイデアについて説明を試みる。

2 カーネル法とシステム制御

システム制御理論において、カーネル法が初めて使われ始めたのは 2000 年頃のものである。この少し前頃にサポートベクトルマシン (Support Vector Machine) が発表され、様々な分野で注目を集めた [2]。システム制御の分野においてもサポートベクトルマシンは取り入れられており、最適制御問題で用いられた [3]。著者が知る限りではこれがカーネル法を制御に応用した初めての研究のものである。文献 [3] では、各時刻で最適性条件を満たす制御則をサポートベクトル回帰により求めている。その後、適応制御などにもカーネル法が適用されているが、同時期に著しい発展を遂げたニューラルネットワークほどは盛り上がりなかったようである。

カーネル法がシステム制御で本格的に用いられ始めたのは、動的システムの入出力データからシステムモデルを同定することを目的としたシステム同定においてであろう。文献 [4] では、カーネル正則化とよばれる、カーネル関数を正則化項に用いることでモデルの複雑さを調整可能なシステム同定法を導出している。さらに、動的システムをモデル化するために適した新たなカーネル関数も提案している。

現在では、カーネル法というよりは、その一種であるガウス過程回帰 [5] がシステム制御でよく用いられている。文献 [6] では、ダイナミクス関数が未知であるとし、その関数をガウス過程回帰により学習している。真の関数と学習した関数の誤差を再生核ヒルベルト空間上のノルムにより評価し、システムの安定性を議論し

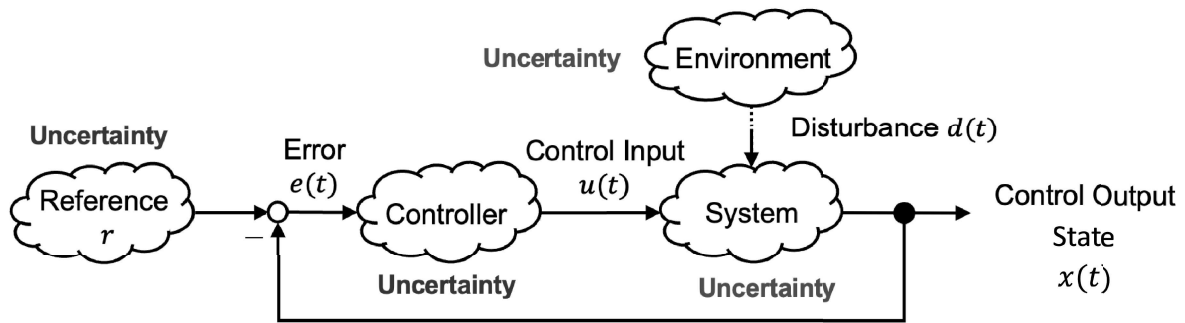


図1 Uncertainties in Control Systems

ている．文献 [6] が発表されて以降，ガウス過程回帰を制御に利用する研究が増えている．予測の不確かさを見積もることができるというガウス過程回帰の特徴から，システムモデルの一部に不確かさがある状況をもとより想定する適応制御理論やロバスト制御理論と相性が良いといえるであろう．現在までのところ，回帰問題と分類問題の応用がほとんどであり，カーネル法が扱う他の重要な問題はシステム制御にはまだあまり取り入れられていないようである．

3 システム制御

ここでは，厳密な議論は省略し，システム制御理論の概説を試みる．詳細な議論や理論の全体像に興味があれば，例えば文献 [7] 等を参照されたい．

システム制御理論では，以下のような微分方程式で記述される動的システムを扱うことが一般的である．

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

上記は，実際に制御したい対象システムの数理モデルである．ここで， $x \in \mathbb{R}^n$ はシステムの状態， $u \in \mathbb{R}^m$ は入力とする．システム制御理論の目的の一つは，式 (1) のもと目標とする値 r に状態を一致させる，つまり，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - r(t)\| = 0 \quad (2)$$

を達成する制御則 u を決定することである．適切な制御則を適用した結果， $x = r$ が式 (1) の安定な平衡点となると，システムは安定であるという．ロボットの制御に例えると，ロボットの位置や姿勢を望ましいものに一致させることを意味する．

安定性は，システム制御理論が長らく主目的としてきたシステムの特性的の一つである．最近ではこの安定性に加えて，安全性が重要であると広く認識され始めている．システムが安全であるとは，状態がある望ましい集合 \mathcal{C} に留まり続ける，つまり，

$$x(t_0) \in \mathcal{C} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{C}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (3)$$

が成り立つことを意味する．これはロボット制御で例えると，環境内の障害物にロボットがぶつからないように制御することに相当する．集合 \mathcal{C} は特に安全集合と呼ぶ．

システム制御分野の研究では，制御対象である式 (1) に対して安定性や安全性，もしくはその両方の特性を付加する制御則を提案することが主な目的となる．さらに，提案した制御則によりシステムが目的の特性を備

えていることを理論的に示すことが多く行われる。20 世紀後半に主流となっていた適応制御理論やロバスト制御理論では、実際の制御対象と制御対象モデルが異なる場合において、安定性を達成するための制御系を設計することを目的としていた。図 1 に、不確かさが存在する要素を雲型の箱により示した。最近では、これらの不確かさを機械学習法により学習することで、不確かさのもとでも安定性や安全性を満たす制御則を提案することが増えている。

4 カーネル法

本節では、カーネル法の基本的な問題である回帰問題と分類問題について概説する。詳細は文献 [1] を参照されたい。以降では、カーネル関数 $k: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ により定まる再生核ヒルベルト空間を \mathcal{H}_k と表記する。また、 $k(x, y) = k_x(y)$ と表し、内積は $\langle k_x, k_y \rangle_{\mathcal{H}_k} = k(x, y)$ と定める。ノルムは $\|f\|_{\mathcal{H}_k} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_k}}$ とする。

4.1 回帰問題

回帰問題とは、入力データと出力データと呼ばれる 2 種類のデータの間に関数関係を当てはめる問題である。以下にカーネル法による回帰問題をまとめる。ただし、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ とする。

問題 1 入力データ $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbb{R}^d$ と出力データ $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ が与えられたとき、

$$L(h) = \sum_{j=1}^N |y_j - h(\mathbf{x}_j)|^2 \quad (4)$$

を最小化する関数 $h \in \mathcal{H}_k$ を求めよ。

リプレゼンター定理より、 $h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N c_j k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x})$ とすることができる。カーネル法は、このカーネル関数の種類の豊富さにより、様々な関数の推定に利用できるという特徴がある。カーネル関数として、ここでは例えば以下のガウスクーネルを用いることを想定する。

$$k(x, y) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{2\ell^2}\right) \quad (5)$$

ここで、 σ_f と ℓ は正の実数であり、ハイパーパラメータと呼ばれる。

つづいて、 $K := (k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 、 $\mathbf{c} := (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ と定義する。すると、問題 1 は以下の 2 次計画問題に帰着される。

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{y} - K\mathbf{c}\|^2 \quad (6)$$

上記の最適化問題は既存のソルバーにより解くことができる。Python では `cvxopt` [8] もしくは `cxvpy` [9]、MATLAB であれば `quadprog` [10] を用いるとよい。実際に `cxvpy` を用いて回帰問題を解く Python コードは拙著 [11] に掲載しているので、参考にさせていただきたい。行列 K が逆行列をもつ場合はソルバーを用いるまでもなく、最適解 \mathbf{c}^* は $\mathbf{c}^* = K^{-1}\mathbf{y}$ と求められる。

4.2 分類問題

つづいて、各データに‘-1’か‘+1’のどちらかのラベルが付与されている状況を考える。ここでは2次元のデータ $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ を考え、異なるラベルをもつデータ集合を分離する関数を求める。これを分類問題と呼ぶ。簡単のため、データ集合は線形分類可能であるとする。データの集合を $\mathcal{D} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbb{R}^2$ とし、それぞれのラベルをもつデータ集合を $\mathcal{D}_+ := \{\mathbf{x}_j \in \mathcal{D} \mid \lambda_j = +1\}$, $\mathcal{D}_- := \{\mathbf{x}_j \in \mathcal{D} \mid \lambda_j = -1\}$ とする。カーネル法における分類問題は以下のようにまとめられる。

問題 2 $\mathcal{D} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbb{R}^2$ の分割 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_-$ に対して、

$$\mathcal{D}_+ \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid h(\mathbf{x}) > 0\} \quad (7)$$

$$\mathcal{D}_- \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid h(\mathbf{x}) < 0\} \quad (8)$$

を満たす関数 $h(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) + v_0$ ($v \in \mathcal{H}_k$, $v_0 \in \mathbb{R}$) を求めよ。

上記問題の解である関数 $h(\mathbf{x})$ を用いて、新たな点 \mathbf{x} のラベルを判定するアルゴリズムをサポートベクトルマシンと呼ぶ。関数 $h(\mathbf{x})$ は分離関数と呼ぶ。回帰問題と同様にして、リプレゼンター定理から $h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N c_j k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) + v_0$ とできる。

つづいて、 $\Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{1}_N := (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^N$ と定義する。ただし、 diag は各要素を対角にもつ対角行列とする。このとき、問題 2 は以下の最適化問題に帰着される。

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N, v_0 \in \mathbb{R}} \mathbf{c}^\top K \mathbf{c} \quad \text{s.t.} \quad \Lambda(K\mathbf{c} + v_0 \mathbf{1}_N) \geq \mathbf{1}_N \quad (9)$$

上記問題も2次計画問題であり、回帰問題と同様のソルバーにより最適解 \mathbf{c}^* , v_0^* を求めることができる。

5 カーネル法のロボット制御への応用

ここでは、前節で紹介した回帰問題と分類問題がシステム制御理論、より具体的にロボット制御においてどのように応用されているかを紹介する。

5.1 システムモデル学習に基づく制御

制御対象として、式 (1) の特殊な形式である以下のシステムを扱うことが多い。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (10)$$

これは代表的な機械システムを含む重要なシステムであることが知られている。簡単のため、状態と入力はスカラーとし、 $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ とする。目標値は $r(t) = 0$ とし、関数 f は未知、関数 g は既知で $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{X}$ を満たすとする。未知な関数に加わっていることは、計測できない外乱が環境から加わっていることを想定していると考えるとわかりやすいであろう。ここでは、この関数の回帰モデルを求めて制御に用いることで外乱の影響を抑制することを考える。訓練データとして $\mathcal{D} = \{(x_1, f(x_1)), \dots, (x_N, f(x_N))\}$ が利用可能であるとする。出力データである $f(x_j)$ は $\dot{x}_j - g(x_j)u_j$ を計算することで求める。つまり、問題 1 の出力は $y_j = f(x_j)$ とした。

ここでは、未知な関数 f はあるカーネル関数 k により構成される再生核ヒルベルト空間に属する関数とする。このカーネル関数とデータ集合 \mathcal{D} から式 (6) を解くことで関数 $h(x)$ を求めたとする。このとき、以下の制御則を考える。

$$u = -g^{-1}(x)(kx + h(x)), \quad k > 0 \quad (11)$$

この制御によりシステムが安定となるかを確認する。スカラー関数を $V(x) := (1/2)x^2$ と定義すると、式 (10) の解軌道に沿った時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = x (f(x) - g(x)g^{-1}(x)(kx + h(x))) \\ &= -kx^2 + x(f(x) - h(x)) \leq -kx^2 + |x||f(x) - h(x)| \end{aligned} \quad (12)$$

となる。未知の関数を完全に学習することができれば、つまりすべての $x \in \mathcal{X}$ で $f(x) = h(x)$ となれば $\dot{V}(x) = -kx^2$ となり、リアプノフの安定定理から $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ が成り立ちシステムの安定性が示される。しかし、有限個のデータ点ではすべての $x \in \mathcal{X}$ で $f(x) = h(x)$ が成り立つことは期待できない。そのため、学習誤差を評価する必要がある。

再生核等式 $f(x) = \langle f, k_x \rangle_{\mathcal{H}_k}$ を用いることで

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &= |\langle f, k_x \rangle_{\mathcal{H}_k} - \langle h, k_x \rangle_{\mathcal{H}_k}| = |\langle k_x, f - h \rangle_{\mathcal{H}_k}| \\ &\leq \|k_x\|_{\mathcal{H}_k} \|f - h\|_{\mathcal{H}_k} = \sqrt{k(x, x)} \|f - h\|_{\mathcal{H}_k} \end{aligned} \quad (13)$$

が得られる。さらに、 $\|f - h\|_{\mathcal{H}_k}^2 = \|f\|_{\mathcal{H}_k}^2 - 2\langle f, h \rangle_{\mathcal{H}_k} + \|h\|_{\mathcal{H}_k}^2$ と展開できる。ここで、 $\mathbf{f} := (f(x_1), \dots, f(x_N))^{\top}$ と定義し、2項目と3項目をさらに評価する。ふたたび再生核等式を用いると、

$$\langle f, h \rangle_{\mathcal{H}_k} = \left\langle f, \sum_{j=1}^N c_j k_{x_j} \right\rangle_{\mathcal{H}_k} = \sum_{j=1}^N c_j \langle f, k_{x_j} \rangle_{\mathcal{H}_k} = \sum_{j=1}^N c_j f(x_j) = \mathbf{c}^{\top} \mathbf{f} \quad (14)$$

$$\|h\|_{\mathcal{H}_k}^2 = \left\langle \sum_{i=1}^N c_i k_{x_i}, \sum_{j=1}^N c_j k_{x_j} \right\rangle_{\mathcal{H}_k} = \sum_{i,j=1}^N c_i c_j k(x_i, x_j) = \mathbf{c}^{\top} \mathbf{K} \mathbf{c} \quad (15)$$

を得る。逆行列 K^{-1} が存在する場合を考えると、式 (6) の解は $\mathbf{c} = K^{-1} \mathbf{f}$ となる。これより、 $\langle f, h \rangle_{\mathcal{H}_k} = \mathbf{f}^{\top} K^{-1} \mathbf{f}$ 、 $\|h\|_{\mathcal{H}_k}^2 = \mathbf{f}^{\top} K^{-1} \mathbf{K} K^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{f}^{\top} K^{-1} \mathbf{f}$ となる。したがって、

$$\|f - h\|_{\mathcal{H}_k}^2 = \|f\|_{\mathcal{H}_k}^2 - 2\mathbf{f}^{\top} K^{-1} \mathbf{f} + \mathbf{f}^{\top} K^{-1} \mathbf{f} = \|f\|_{\mathcal{H}_k}^2 - \mathbf{f}^{\top} K^{-1} \mathbf{f} \leq \|f\|_{\mathcal{H}_k}^2 \quad (16)$$

が得られ、上式を式 (13) に代入すると最終的に、

$$|f(x) - h(x)| \leq \sqrt{k(x, x)} \|f\|_{\mathcal{H}_k}, \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (17)$$

が得られる。上式を用いることで式 (12) の右辺を評価することができる。このとき、以下を満たす正の実数 a, b と $T = T(a, b)$ が存在することを示すことができる。

$$|x(t_0)| \leq a \Rightarrow |x(t)| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (18)$$

この性質を終局有界性とよび、学習に基づいた制御ではよく用いられる安定性に関わる概念である。

ここまでは通常の回帰問題を制御に用いる方法を紹介したが、ガウス過程回帰を用いて h を学習する場合も流れは基本的に同じである。ガウス過程回帰では、式 (17) の $k(x, x)$ が \mathbf{x} における予測の分散を表す。データを収集していくことでこの分散は更新され小さくなっていくため、ガウス過程回帰では式 (17) の上限を抑えることができる。つまり、データを集めることでより良い制御が行えるようになるのである。

注 1 カーネル関数としては、ガウスカーネルがよく用いられる。ガウスカーネルの使い勝手の良さがその主な理由であろう。大抵の関数はガウスカーネルを用いることで、ある程度満足のいくモデルを構築できることが多い。一方、システム制御の観点からはガウスカーネルの普遍性が重要である。

実は、本節で紹介した問題設定には矛盾がある。関数 f が未知ならば、再生核ヒルベルト空間を生成するカーネル関数も未知なはずである。しかし、式 (17) を用いるためには f と同じカーネル関数を用いて h を学習する必要がある。この矛盾点を解消してくれるのが、普遍カーネルである。普遍カーネルは連続関数であればコンパクト集合上で任意の精度で近似することができる [12]。したがって、未知関数が連続関数であれば、ガウスカーネルにより生成される再生核ヒルベルト空間内に任意の精度で未知関数を近似できる関数が存在する。この関数を真の関数 f と考えガウスカーネルにより h を学習することで、矛盾なく式 (17) を用いることができるのである。

5.2 環境モデル学習に基づく制御

つぎに、2次元平面上を運動するロボットを考える。ここでは環境内には位置と形状が未知な障害物がある状況で、ロボットを安全に保つための制御を考える。ロボットは2次元平面 $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ 上を運動するとし、その運動は式 (10) の微分方程式にしたがうとする。ここでは関数 f と g は既知であるとする。領域 \mathcal{X} で障害物が占める領域を \mathcal{O} とすると、安全集合は $\mathcal{C} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{O}$ となる。ロボットが安全であるとは、 $\mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{C}$ のとき、以降すべての時間 $t \geq t_0$ で $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C}$ が成り立つことをいう。以降では、障害物の位置と形状が未知である場合にロボットを安全に保つための制御について考える。

まず、 $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ で正、 $\mathbf{x} \notin \mathcal{C}$ で負となる関数 $h_{\mathcal{C}}$ が存在するとする。このとき、安全集合 \mathcal{C} は

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid h_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \geq 0\} \quad (19)$$

$$\partial\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid h_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) = 0\} \quad (20)$$

$$\text{int}(\mathcal{C}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid h_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) > 0\} \quad (21)$$

と表すことができる。ただし、 $\partial\mathcal{C}$ は集合の境界、 $\text{int}(\mathcal{C})$ は集合の内部とする。この関数 $h_{\mathcal{C}}$ が既知であるとき、障害物の真の位置と形状の情報が利用可能であるため、ロボットを安全に保つための制御入力が求められる。実際に、制御バリア関数法 [13, 14] を用いることで可能である。詳細は割愛するが、

$$\frac{dh_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial h_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial h_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) u \geq -h_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \quad (22)$$

を満たす制御則 $u(\mathbf{x})$ をロボットに適用することで安全性が保証される。ここで、 $\frac{\partial h_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial h_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) \in \mathbb{R}^2$ と表記した。

障害物の点群データが利用可能であれば、この関数 $h_{\mathcal{C}}$ をサポートベクトルマシンの分類関数として学習ができそうである。ここでは、ロボットが LiDAR (Light Detection and Ranging) センサと全球測位衛星システム (GNSS: Global Navigation Satellite System, いわゆる GPS) を搭載しているとする。LiDAR セン

サはロボットから周辺の障害物までの距離を取得することができ、GNSSはロボットの位置と姿勢を取得することができる。LiDARセンサの距離データを、GNSSからの位置姿勢情報を用いて慣性座標系からみた位置データに変換したものを z_j , $j = 1, \dots, N$ とする。このデータにはラベル $\lambda = -1$ を与え、データ集合 $\mathcal{D}_- = \{z_1, \dots, z_N\}$ を作成する。ラベル $\lambda = +1$ のデータは、ロボットから障害物までの距離を一定距離短くした値を用いることで $\mathcal{D}_+ = \{z_1, \dots, z_N\}$ を構成する。

このデータ集合を用いた最適化問題 (9) の最適解から構築した関数を h とする。このとき、 $\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid h(\mathbf{x}) \geq 0\} \subseteq \mathcal{C}$ であれば、 h を用いた不等式 (22) を満たす制御則により、ロボットの安全性を保証することができる。しかし、障害物の局所的な情報しか取得できない状況では $\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid h(\mathbf{x}) \geq 0\} \subseteq \mathcal{C}$ が成り立つことは期待できない。そこで筆者は、サポートベクトルマシンのベイズ学習版である関連ベクトルマシン [15] により安全集合を学習する方法を提案した [16]。関連ベクトルマシンはカーネル法的一种であり、ガウス過程による分類とみなすこともできる。ニューラルネットワークを用いた方法なども考えられており、学習に基づいた安全な制御は注目度の高いテーマである。

6 おわりに

本稿では、再生核ヒルベルト空間の重要な応用であるカーネル法において、回帰問題と分類問題を取り上げ、システム制御理論との関係についてまとめた。さらに、カーネル法と制御理論の融合研究において、最近の発展における基本アイデアを紹介した。

システム制御理論において、不確かさを考慮することは重要である。しかし、詳細なモデルを考えることで不確かさを抑えることができる一方、解析が困難になってしまう場合がある。カーネル法は、柔軟で扱いやすいモデルを構築することができ、システムの不確かさを扱うのに優れた手法といえる。今後も、カーネル法とシステム制御理論の融合によって、より高度な制御手法の開発や実践的な応用が期待される。

拙著 [11] では、図 1 に示した他の不確かさについてもカーネル法の適用を試みている。本稿の内容に興味を持っていただけた方にはぜひご一読いただきたい。

参考文献

- [1] 瀬戸, 伊吹, 畑中, “機械学習のための関数解析入門 ヒルベルト空間とカーネル法,” 内田老鶴圃, 2021.
- [2] C. Cortes and V. Vapnik, “Support-vector networks,” *Machine Learning*, Vol. 20, pp. 273–297, 1995.
- [3] J.A.K. Suykens, J. Vandewalle, B. De Moor, “Optimal control by least squares support vector machines,” *Neural Networks*, Vol. 14, No. 1, pp. 23–25, 2001.
- [4] T. Chen, G.D. Nicolao and L. Ljung, “On the estimation of transfer functions, regularizations and Gaussian processes—revisited,” *Automatica*, Vol. 48, pp. 1525–1535, 2012.
- [5] C.E. Rasmussen, C.K.I. Williams, “Gaussian processes for machine learning,” The MIT Press, 2005.
- [6] F. Berkenkamp, R. Moriconi, A.P. Schoellig and A. Krause, “Safe learning of regions of attraction for uncertain, nonlinear systems with Gaussian processes,” *Proc. 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control*, pp. 4661–4666, 2016.
- [7] K.J. Astrom and R.M. Murray, “Feedback systems: An introduction for scientists and engineers,” 2nd Edition, *Princeton University Press*, 2018.

- [8] S. Andersen, J. Dahl, and L. Vandenberghe, “CVXOPT: A Python package for convex optimization, version 1.1.6,” <https://cvxopt.org>, 2013.
- [9] A. Agrawal, R. Verschueren, S. Diamond and S. Boyd, “A rewriting system for convex optimization problems,” *Journal of Control and Decision*, Vol. 5, No. 1, pp. 42–60, 2018.
- [10] The Mathworks, “MATLAB quadprog - Quadratic programming,” <https://jp.mathworks.com/help/optim/ug/quadprog.html>, 2023.
- [11] 伊吹, 山内, 畑中, 瀬戸, “機械学習のための関数解析入門 カーネル法実践：学習から制御まで,” 内田老鶴圃, in press, 2023.
- [12] 金森, “統計的学習理論,” 機械学習プロフェッショナルシリーズ, 講談社, 2015.
- [13] A.D. Ames, X. Xu, J.W. Grizzle and P. Tabuada, “Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 62, No. 8, pp. 3861–3876, 2017.
- [14] M. Srinivasan, A. Dabholkar, S. Coogan and P.A. Vela, “Synthesis of control barrier functions using a supervised machine learning approach,” *Proc. 2020 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 7139–7145, 2020.
- [15] M.E. Tipping, “Sparse bayesian learning and the relevance vector machine,” *The Journal of Machine Learning Research*, Vol. 1, pp. 2110–244, 2001.
- [16] 山内, 水田, 藤田, “スパースベイズ手法による制御バリア関数の学習と安全な持続的被覆制御,” 計測自動制御学会論文集, Vol. 59, No. 5, in press, 2023.