A partially ordered set of invariant semiclosed subspaces

不変な半閉部分空間の半順序集合について

茨城大学大学院理工学研究科　平澤　剛[1]

Go Hirasawa

Ibaraki University

1. はじめに

本研究は, 無限次元可分複素ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素は非自明で不変な閉部分空間を常に有するか, という古典的な問題, 所謂, 不変部分空間問題を背景としている. 任意の有界線形作用素は不変な半閉部分空間を多く有していることが知られているが ([8]), その中にいつでも閉部分空間が存在するならば, 上記の問題は肯定的な結論に達することになる. 我々の議論の場が半閉部分空間の集合上なのは, このような理由によるものである. 特に本稿では, H 上の有界線形作用素 T の非自明で不変な半閉部分空間からなる半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ を考察の場とし, この半順序集合の鎖が閉部分空間を含むような条件を模索する.

2. 準備

準備として, 本稿で使用する概念のいくつかの定義を述べる. まず, 半閉部分空間の定義を与える.

Definition 2.1 ([3], [1])**.** *H の部分空間 M が半閉であるとは, M 上の Hilbert ノルム $\|\cdot\|_M$ が存在して, 包含写像 $(M, \|\cdot\|_M) \hookrightarrow H$ が連続なことである. すなわち,*

$$\exists k > 0,\ \forall x \in M,\ \|x\| \le k\|x\|_M.$$

H の部分空間 M が半閉であることと, M が有界作用素 $A \in \mathcal{B}(H)^+$ の値域 $M = AH$ であることは同値である. 正数 p $(0 < p < 1)$ に対して, 半閉部分空間 M の p 乗を定義する.

[1]本研究は科学研究費基盤研究 (C) No.20K03624 の助成を受けている.

Definition 2.2. 任意の半閉部分空間 M に対して,

$$M^p := A^p H \quad (0 \le p \le 1)$$

と定義する. ただし, A は $M = AH$ を満たす $A \in \mathcal{B}^+(H)$ である.

Remark 2.1. $p = 0$ については, $A^0 = I$ とし $M^0 := H$ と定義する. もし $M = AH = BH$ $(A, B \in \mathcal{B}^+(H))$ ならば $A^p H = B^p H$ であるので, *well defined* である.

AH が H で閉であることは, $AH = A^{\frac{1}{2}} H$ と同値であることはよく知られているが ([3]), 上で定義したことを用いると, M が H で閉であることは, $M = M^{\frac{1}{2}}$ と同じことになる. つまり, 半閉部分空間の 1/2 乗に関して不動なるものが閉部分空間となる. そこで, 閉部分空間を不動点として捉えていくために, 議論の場を不変な半閉部分空間からなる半順序集合で考えていくことする. そこにおける鎖（全順序部分集合）も考察していくため, 関連する Kubo-Ando ([6]) による作用素平均とその Uhlmann's 補間平均の定義を以下述べておく.

Definition 2.3. 2 項演算 $m : (A, B) \mapsto AmB$ $(A, B \in \mathcal{B}^+(H))$ が作用素平均であるとは, 以下を満たすことである.

(m1) $A \le C,\ B \le D \Longrightarrow AmB \le CmD$
(m2) $T^*(AmB)T \le (T^*AT)m(T^*BT)$ ただし, $T \in \mathcal{B}(H)$ とする.
(m3) $A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B \Longrightarrow A_n m B_n \downarrow AmB$
(m4) $ImI = I$

Remark 2.2. (m2) において, T が可逆なとき, 等号が成り立つことが知られているが, もう少し緩めた条件が知られている *(*)*. (m3) において, $X_n \downarrow X$ とは $0 \le X_{n+1} \le X_n,\ X_n \overset{sot}{\to} X$ を意味する. また, 作用素平均 m が対称であるとは, $AmB = BmA$ がすべての $A, B \in \mathcal{B}^+(H)$ で成り立つことである.

Definition 2.4 ([5])**.** パラメータ付けされた作用素平均 m_t $(0 \le t \le 1)$ が, 対称平均 m の *Uhlmann* 補間であるとは, 次が成り立つことである.

(U1) $Am_0B = A,\ Am_{\frac{1}{2}}B = AmB$ および $Am_1B = B$ $(A, B \in \mathcal{B}^+(H))$.
(U2) $(Am_pB)m(Am_qB) = Am_{\frac{p+q}{2}}B$ $(A, B \in \mathcal{B}^+(H))$.

(U3) 写像 $t \mapsto Am_tB$ が各 $A, B \in \mathcal{B}^{++}(H)$ ごとにノルム連続である．つまり，任意の $0 \le t \le 1$ に対して，以下の式が各 $A, B \in \mathcal{B}^{++}(H)$ ごとに成り立つ．

$$\lim_{s \to t} \|Am_tB - Am_sB\| = 0$$

Remark 2.3. 各 $0 \le \alpha \le 1$ に対して，次が成り立つ．

$$(Am_pB)m_\alpha(Am_qB) = Am_{(1-\alpha)p+\alpha q}B \ (A, B \in \mathcal{B}^+(H))$$

Definition 2.5 (cf. [4])**.** m_t $(0 \le t \le 1)$ を対称平均 m の *Uhlmann* 補間とする．H の半閉部分空間 L, R に対して，半閉部分空間を次で定義する．

$$Lm_tR := (A^2m_tB^2)^{\frac{1}{2}}H \quad (0 \le t \le 1),$$

ただし，$L = AH$, $R = BH$ $(A \ge 0, B \ge 0)$ とする．

Remark 2.4. Lm_tR は $A \ge 0, B \ge 0$ の選び方によらず決まるため *well defined* である．また，$Lm_0R = L$ であり，$Lm_1R = R$ である．一般に，$L \cap R \subseteq Lm_tR \subseteq L + R$ が成り立つ．従って，もし $L \subseteq R$ ならば $L \subseteq Lm_tR \subseteq R$ となる．半閉部分空間からなる区間を $[L, R] := \{M : L \subseteq M \subseteq R\}$ で定義すると，$Lm_tR \in [L, R]$ $(0 \le t \le 1)$ と表現される．

次は Douglas's majorization theorem として知られている基本的な結果であるが，ここでは必要な部分のみ抜粋して記述しておく．

Theorem 2.1 ([2])**.** $A, B \in \mathcal{B}(H)$ とするとき，次は同値である．

(i) $AH \subseteq BH$
(ii) ある $k > 0$ が存在して，$AA^* \le kBB^*$ を満たす
(iii) ある $C \in \mathcal{B}(H)$ が存在して，$A = BC$ を満たす

上記の条件が満たされるとき，$\ker C^* \supseteq \ker B$ のもとで C は一意的に存在する．

3. 半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$

$T \in \mathcal{B}(H)$ に対して，

$$\mathrm{Inv}(T) := \{M : TM \subseteq M\}, \quad \mathrm{Inv}(T)_0 := \mathrm{Inv}(T) \setminus \big\{H, \{0\}\big\}$$

と定義する．ただし，M は H の半閉部分空間である．$\mathrm{Inv}(T)_0$ は多くの元を含むことが知られており ([8])，通常の包含関係で半順序集合となる．ちなみに，$\mathrm{Inv}(T)$ は束となり，任意の 2 元 M_1, M_2 に対する上限は $M_1 + M_2$ で，下限は $M_1 \cap M_2$ である．

　まず，半閉部分空間の区間と Uhlmann 補間との関連性に関して述べておく．

Theorem 3.1. *m_t $(0 \le t \le 1)$ を Uhlmann 補間とし，半閉部分空間 L, R が $L \subset R$ を満たしているとする．このとき，集合 $\{Lm_tR : 0 \le t \le 1\}$ は区間 $[L, R]$ においての鎖となる．すなわち，$t_1 < t_2$ に対して，$Lm_{t_1}R \subseteq Lm_{t_2}R$ が成り立つ．*

Proof. 簡素化のため $M_t := Lm_tR$ とおく．$M_0 = L, M_1 = R$ である．$L = AH$ および $R = BH$ を満たす $A, B \in \mathcal{B}^+(H)$ をとる．$0 \le t_1 < t_2 \le 1$ を満たす任意の t_1, t_2 について，$M_{t_1} \subseteq M_{t_2}$ を示す．$0 \le s \le 1$ について，

$$\begin{aligned}
M_0 m_s M_{t_2} &= \left(A^2 m_s (A^2 m_{t_2} B^2)\right)^{\frac{1}{2}} H = \left((A^2 m_0 B^2) m_s (A^2 m_{t_2} B^2)\right)^{\frac{1}{2}} H \\
&= \left(A^2 m_{(1-s)\cdot 0 + s\cdot t_2} B^2\right)^{\frac{1}{2}} H \quad \text{(by Remark2.3)} \\
&= \left(A^2 m_{st_2} B^2\right)^{\frac{1}{2}} H = \left(A^2 m_u B^2\right)^{\frac{1}{2}} H \quad (u := st_2) \\
&= Lm_uR = M_0 m_u M_1 = M_u \quad (0 \le u \le t_2)
\end{aligned}$$

となる．Remark2.4 で述べたように，$M_0 \subseteq M_{t_2}$ から $M_0 m_s M_{t_2} \in [M_0, M_{t_2}]$ $(0 \le s \le 1)$ が成り立つので，上で求めたことから $M_u \in [M_0, M_{t_2}]$ $(0 \le u \le t_2)$ となる．特に，$u = t_1 (< t_2)$ として，$M_{t_1} \in [M_0, M_{t_2}]$．以上から，$M_{t_1} \subseteq M_{t_2}$ となる．□

Theorem 3.2. *$T \in \mathcal{B}(H)$ とし，m_t $(0 \le t \le 1)$ を Uhlmann 補間とし，半閉部分空間 L, R が $L, R \in \mathrm{Inv}(T)_0$ ならば $Lm_tR \in \mathrm{Inv}(T)_0$ である．さらに $L \subseteq R$ ならば集合 $\{Lm_tR : 0 \le t \le 1\}$ は区間 $[L, R]$ において，T-不変な半閉部分空間からなる鎖となる．*

Proof. $L = AH$, $R = BH$ を満たす $A, B \in \mathcal{B}^+(H)$ を選んでおく．仮定より $T(AH) \subseteq AH$, $T(BH) \subseteq BH$ なので $X, Y \in \mathcal{B}(H)$ で $TA = AX$,

$TB = BY$ を満たすものが存在する. すると

$$\begin{aligned} T(A^2 m_t B^2)T^* &\le (TA^2T^*)m_t(TB^2T^*) \\ &= (AXX^*A)m_t(BYY^*B) \\ &\le (\|X\|^2A^2)m_t(\|Y\|^2B^2) \\ &\le \max(\|X\|^2, \|Y\|^2)(A^2m_tB^2) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, Theorem2.1 より

$$T(A^2m_tB^2)^{\frac{1}{2}}H \subseteq (A^2m_tB^2)^{\frac{1}{2}}H$$

を得る. □

さて g_t $(0 \le t \le 1)$ をパラメータ化された作用素幾何平均とする. 正値な可逆作用素に対しては以下のように定義される.

$$Ag_tB = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^tA^{\frac{1}{2}} \quad A, B \in \mathcal{B}^{++}(H)$$

可逆とは限らない正値作用素に対しては, Definition2.3 $(m3)$ を用いて定義される. Theorem3.2 から次のよく知られている事実が導かれる.

Corollary 3.3. *$T \in \mathcal{B}(H)$ とする. 半閉部分空間 L が T-不変ならば L^p も T-不変である. ただし, $0 < p \le 1$ である.*

Proof. $L = AH$ $(A \ge 0)$ と表わしておく. すると $0 \le t < 1$ に対して,

$$\begin{aligned} Lg_tH &= (A^2g_t\ I^2)^{\frac{1}{2}}H = (I\ g_{1-t}A^2)^{\frac{1}{2}}H \\ &= \left((A^2)^{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}H = A^{1-t}H = L^{1-t} = L^p\ (p := 1-t) \end{aligned}$$

Theorem3.2 での R は H を除いてあるが, $R = H$ でも明らかに Theorem3.2 の主張が成り立つ. 今, L および H が T-不変であることから Lg_tH の T-不変性が得られる. □

次の定理は, Bourbaki-Kneser の不動点定理としてよく知られているものである.

Theorem 3.4 ([7])**.** *$(X, \le)$ を半順序集合とし, $f : X \to X$ を写像とする. もし, 以下の 2 条件 (i), (ii) を満たすならば写像 f は X 上に不動点をもつ, つまり, $z = f(z)$ を満たす $z \in X$ が存在する.*

(i) X の空でない任意の鎖は X に上限を有する

(ii) すべての $x \in X$ について, $x \leq f(x)$ が成り立つ

Remark 3.1. 半順序集合 X が条件 (i) を満たすとき, X は完備であるという. 次の条件 (ii)' および (iii) を考える.

(ii)' $\exists x_0 \in X,\ x_0 \leq f(x_0)$

(iii) $x \leq y$ ならば $f(x) \leq f(y)$ $(x, y \in X)$

このとき, 条件 (i), (ii)' および (iii) を満たすならば $x_0 \leq x$ なる範囲において, f の不動点 z を有する.（特に, 最小のものが存在する）（$Amann$ の不動点定理）

さて, $T \in \mathcal{B}(H)$ について, 半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ を考える. さらに, 写像 $f : \mathrm{Inv}(T)_0 \to \mathrm{Inv}(T)_0$ を $f(M) := M^{\frac{1}{2}}, M \in \mathrm{Inv}(T)_0$ で定義する. すると $M \subseteq M^{\frac{1}{2}} = f(M)$ が成り立つので, もし, 半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ が完備ならば Theorem3.4 から不動点 $M_\infty \in \mathrm{Inv}(T)_0$ をもつことになる. すなわち, $M_\infty = M_\infty^{\frac{1}{2}}$. よって, M_∞ は閉部分空間となるので, T は非自明で不変な閉部分空間を有することになる. 従って, 次が成り立つ.

Proposition 3.5. $T \in \mathcal{B}(H)$ とする. もし半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ が完備（空でない任意の鎖は $\mathrm{Inv}(T)_0$ に上限をもつ）ならば T は非自明で不変な閉部分空間を有する.

4. Questions

この節では, いくつかの question について考えていくが, まず, Proposition 3.5 に関することを取り上げる.

Question1. 半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ が完備となることはあるのか.

これに関する回答はまだないのだが, 次のようなことはわかっている.

「もし $T \in \mathcal{B}(H)$ が不変で稠密な半閉部分空間をもつならば半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ は完備ではない」

任意の T は常に不変な半閉部分空間を多くもつ. その中に非稠密な半閉部分空間が常に一つ存在すれば, その閉包が非自明で不変な閉部分空間を与えることになり, 不変部分空間問題は肯定的に解決される. しかし, T が稠密と非稠密な不変半閉部分空間の双方を有している場合は, 非自明で不変な閉部分空間を有していても, 上述「 $\cdots$ 」から半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ は完備にはならない. 従って, $\mathrm{Inv}(T)_0$ の完備性の考察が, 不変部分空間問

題の解決への糸口を生み出すことはないだろうと捉えている. 完備性はすべての鎖についての上限の存在を要請しているので, それは強すぎる条件なのかもしれない.

さて, 上述「$\cdots$」の理由だが, Remark3.1 で述べた Amann の不動点定理および背理法を利用する. 先ほど定義した写像 $f:\mathrm{Inv}(T)_0 \to \mathrm{Inv}(T)_0$, $f(M)=M^{\frac{1}{2}}(M\in \mathrm{Inv}(T)_0)$ は Amann の不動点定理の条件 (ii)' および (iii) を満たす. 従って, 背理法より, $\mathrm{Inv}(T)_0$ を完備かつ $T\in\mathcal{B}(H)$ が稠密な $M_d\in\mathrm{Inv}(T)_0$ をもつとすると, M_d より包含関係について大きい不変な半閉部分空間の中で不動点 $f(M_\infty)=M_\infty\in\mathrm{Inv}(T)_0$ が存在することになるが, M_∞ が閉であることおよび M_d の稠密性から $M_\infty=H$ となって $H\in\mathrm{Inv}(T)_0$ となる. これは矛盾である.

次に, すべての鎖を考察対象とするのではなく, 以下を考察する.

Question 2. 半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ の鎖が閉部分空間を含むのはどのようなときか.

$\mathrm{Inv}(T)_0$ における鎖 $\mathcal{K}=\{M_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ に対して, $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}$ を次で定義する.

$$\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}:=\{M_\lambda^{\frac{1}{2}}:\lambda\in\Lambda\}.$$

半閉部分空間 $M=AH(A\geq 0)$ に対する $M^{\frac{1}{2}}=A^{\frac{1}{2}}H$ の定義からもわかるように, 正値有界作用素の 1/2 乗は作用素の順序を保存するので, Theorem2.1 を加味することで, 半閉部分空間の包含関係 $(M\subseteq N \Longrightarrow M^{\frac{1}{2}}\subseteq N^{\frac{1}{2}})$ を保存する. 従って, $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}$ も鎖となる.

さて, 鎖 $\mathcal{K}$ が閉部分空間を含むならば $\mathcal{K}\cap\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}\neq\phi$ である. 逆は成り立つかと言うと, 否である. 例えば, $M\in\mathrm{Inv}(T)_0$ は閉でないとして, $\mathcal{K}:=\{M,M^{\frac{1}{2}}\}$ とおくと, $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}=\{M^{\frac{1}{2}},M^{\frac{1}{4}}\}$ となるので, $\mathcal{K}\cap\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}\neq\phi$ かつ $\mathcal{K}$ は閉部分空間を含まない.

次に, 項数を増やした状況を考察する. 鎖 $\mathcal{K}$ に対して,

$$\mathcal{K},\ \mathcal{K}^{\frac{1}{2}},\ \mathcal{K}^{\frac{1}{4}},\ \cdots,\ \mathcal{K}^{\frac{1}{2^n}},\ \cdots$$

を考える. 一般には, これらの間に包含関係はないと思われる. $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}$ とは限らない. 明らかだが, $\mathcal{K}$ が閉部分空間を含めば $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathcal{K}^{\frac{1}{2^n}}\neq\phi$ である. 逆向きの成立は否である. 例えば, 閉部分空間でない $M\in\mathrm{Inv}(T)_0$ をとり, $M=AH\ (A\geq 0)$ と表わしておく. すると,

$$\mathcal{K}_A=\{\cdots,A^8H,\ A^4H,\ A^2H,\ M,\ M^{\frac{1}{2}},\ M^{\frac{1}{4}},\cdots\}$$

と定義すると, $\mathcal{K}_A$ は鎖となる. M より小さい部分は, 2 乗が包含関係を保存しないため, A に依存する形で書いてある. このとき,

$$\mathcal{K}_A = \mathcal{K}_A^{\frac{1}{2}} = \mathcal{K}_A^{\frac{1}{4}} = \cdots = \mathcal{K}_A^{\frac{1}{2^n}} = \cdots ,$$

つまり, $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_A^{\frac{1}{2^n}} \neq \phi$ かつ $\mathcal{K}_A$ は閉部分空間を含まない. このように, $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}^{\frac{1}{2^n}} \neq \phi$ から $\mathcal{K}$ が閉部分空間を含むとは限らないのだが, $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}^{\frac{1}{2^n}} = \{M\}$ かつ $M^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{K}$ を満たす M が存在するならば, その M は閉部分空間である.

半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ の鎖 $\mathcal{K}$ からなる列 $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{K}^{\frac{1}{4}}$, $\cdots$, $\mathcal{K}^{\frac{1}{2^n}}$, $\cdots$ の下極限集合 $\mathcal{K}_{liminf}$ を考える.

$$\mathcal{K}_{liminf} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{n=i}^{\infty} \mathcal{K}^{\frac{1}{2^n}}.$$

下極限集合が空でないと仮定する. すると, $\mathcal{K}_{liminf}$ も鎖となり,

$$\mathcal{K}_{liminf} \supseteq \mathcal{K}_{liminf}^{\frac{1}{2}}$$

を満たす. 従って, もし $\mathcal{K}_{liminf}$ が最大元を有していれば, その 1/2 乗が最大元と一致することになるので, $\mathcal{K}_{liminf}$ は閉部分空間を含むことがわかる. これは, Question 2 に対する一つの回答である. 今述べたことは 1 つの鎖 $\mathcal{K}$ を起点としてその列を考え, 1/2 乗で閉じるように下極限集合という鎖を考えたが, 要するに 1/2 乗で閉じた鎖が最大元をもてば閉部分空間を有することに基づいている.

次に, 最大元があるとは限らない場合を考察するのに, 極大な鎖で考えてみる. 極大鎖の存在性を保障してくれるのが, 選択公理と同等な以下の定理である.

Theorem 4.1 (Hausdorff's Maximality Theorem)**.** *任意の半順序集合は極大な鎖をもつ.*

これより, 任意の $T \in \mathcal{B}(H)$ に関する半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ は, 極大な鎖をもつことになる. これについて, 以下の question を考える.

Question 3. 半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ において, もし $\mathcal{K}_{max} \supseteq \mathcal{K}_{max}^{\frac{1}{2}}$ を満たす極大な鎖 $\mathcal{K}_{max}$ が存在するならば $\mathcal{K}_{max}$ は閉部分空間を含むか.

これについても, まだわかっていないことが多いが, 以下, 考察の概要を述べて本報告を終わりにしたい.

まず, 半順序集合 $\mathrm{Inv}(T)_0$ の極大な鎖 $\mathcal{K}_{max}$ における同値関係を導入することを検討している. 具体的には, $M, N \in \mathcal{K}_{max}$ が $N = Mg_pH$ または $M = Ng_pH$ を満たす $0 \leq p < 1$ が存在するとき, $M \sim N$ と定義する. このとき, 関係 $\sim$ は $\mathcal{K}_{max}$ 上の同値関係となるか検証する. g_t $(0 \leq t < 1)$ はパラメータ化された作用素幾何平均である. $M = Mg_0H$ なので反射律 $M \sim M$ が成り立つ. また, 定義から $M \sim N$ ならば $N \sim M$ となるので対称律が成立する. 推移律の成立は不明である. $L \sim M$ のとき $L \subseteq M$ か $M \subseteq L$ のどちらかであり, $M \sim N$ のとき $M \subseteq N$ か $N \subseteq M$ のどちらかであり, $L \sim N$ を示すには $L \subseteq N$ か $N \subseteq L$ のどの場合でも成り立つことを確認する必要がある. 成立が不明なのは次の包含関係の場合である. $L \subseteq N \subseteq M$ の場合で $L \sim M$ かつ $M \sim N$ ならば $L \sim N$ の場合. もし, これが成り立てば, すべての包含関係の場合で示せることになるので, 推移律が成り立つ. 従って, 関係 $\sim$ は同値関係となり極大な鎖 $\mathcal{K}_{max}$ を同値関係で類別したときの集合 $\mathcal{K}_{max}/\sim$ が得られることになる. あくまでも関係 $\sim$ が同値関係である仮定に基づいての話だが, この同値類がどの程度存在するのかという考察に興味があり, 集合 $\mathcal{K}_{max}/\sim$ の濃度が $\mathcal{K}_{max}$ が閉部分空間を含むことに与える関係性を調査したい. 仮定条件 $\mathcal{K}_{max} \supseteq \mathcal{K}_{max}^{\frac{1}{2}}$ というのは, できるだけ標準的な鎖であることを要請した条件のつもりである. つまり, 1/2 乗で閉じているだけでなく p 乗 $(0 < p < 1)$ でも閉じていると期待した条件である（現時点では不明）. 従って, p 乗でも閉じているとすると, 極大鎖に属する異なる 2 つの（閉でない）半閉部分空間で $L \subsetneq N$ が同値 $L \sim N$ ならばその間にある M も $L \sim M \sim N$ になると思われる. 極大鎖 $\mathcal{K}_{max}$ において, 非稠密な半閉部分空間からなる部分と稠密なものからなる部分がもしあるならば, その境界辺りには閉部分空間があるはずで, その存在性を主張する根拠が集合 $\mathcal{K}_{max}/\sim$ の濃度にあるのではないかと考えている.

References

[1] T.Ando, *De Branges Spaces and Analytic Operator Functions*, Hokkaido University (Sapporo), 1990.

[2] R.G.Douglas, *On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space*, Proc.Amer.Math.Soc. 17 (1966) 413-416.

[3] P.AFillmore, J.P.Williams, *On Operator Ranges*, Advance in Math. (1971), 254-281.

[4] J.Fujii, *Operator Means and Range Inclusion*, Linear Algebra and its Applications 170 (1992), 137-146.

[5] J.Fujii, E.Kamei, *Uhlmann's Interpolational Method for Operator Means*, Math. Japonica 34,No.4 (1989), 541-547.
[6] F.Kubo, T.Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. 246 (1980), 205-224.
[7] K. Masuda editor, *Ouyou kaiseki handbook*, (2012) Maruzen. (Japanese)
[8] E.Nordgren, M.Radjabalpour, H.Radjavi, P.Rosenthal, *On Invariant Operator Ranges*, Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 389-398.

Go Hirasawa

Graduate School of Sci. and Eng.

Ibaraki University

Nakanarusawa 4-12-1

Hitachi 316-8511 JAPAN

E-mail address: gou.hirasawa.529@vc.ibaraki.ac.jp