

相互作用する場の量子論の系の基底状態の多重度の評価について

Toshimitsu Takaesu

Faculty of Science and Technology, Gunma University

[概要] 相互作用する場の量子論の系のハミルトニアンについて考察する。系の状態空間はボソンフォック空間とヒルベルト空間のテンソル積で与えられる。相互作用は消滅作用素とある交換関係をみたす一般化された摂動とする。主定理において基底状態が存在すれば、その多重度が有限であることを示す。

1 導入および主結果

相互作用する場の量子論の系について考察する。系の状態空間は

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \otimes \mathcal{F}_b(L^2(\mathbf{R}^d))$$

とする。ここで \mathcal{K} は \mathbf{C} 上の可分なヒルベルト空間で $\mathcal{F}_b(L^2(\mathbf{R}^d))$ は $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上のボソン・フォック空間とする。系の free Hamiltonian は

$$H_0 = A \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes d\Gamma_b(\omega)$$

とする。 A は \mathcal{K} 上の作用素で、以下の条件をみたすとする。

(A.1) A は自己共役で下に有界。

また、 $d\Gamma_b(\omega)$ は $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, $m \geq 0$, の第二量子化とする。系の全 Hamiltonian は

$$H(\kappa) = H_0 + \kappa H_1$$

とする。相互作用 H_1 は以下の条件をみたすとする。

(A.2) H_1 は対称作用素であり、ある $c_1 > 0$ が存在し、

$$\|H_1(H_0 + 1)^{-1}\| \leq c_1$$

が成り立つ。

(A.1) および **(A.2)** の条件の下で、 $|\kappa| < \frac{1}{c_1}$ のとき、Kato-Rellich の定理より、 $H(\kappa)$ は自己共役となる。

さらに以下の条件が成り立つとする。

(A.3) A は compact resolvent を持つ。

(A.4) ある $Q_1 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が存在して、

$$[H_1, \mathbf{1} \otimes a(f)]^0(\Phi, \Psi) = \int_{\mathbb{R}^d} (\Phi, Q_1(\mathbf{k})\Psi) d\mathbf{k}$$

が成り立つ。ここで、 $a(f)$ は消滅作用素で、 $[X, Y]^0(\Phi, \Psi) = (X^*\Phi, Y\Psi) - (Y^*\Phi, X\Psi)$ は作用素 X と Y の弱交換子とする。

(A.5) $Q_1 = Q_1(\mathbf{k})$ は強微分可能であり、ある $q_j > 0, j = 0, \dots, d$ が存在し、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\omega(\mathbf{k})^4} \|Q_1(\mathbf{k})(H_0 + 1)^{-1}\Psi\|^2 d\mathbf{k} &\leq q_0 \|\Psi\|, \\ \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\omega(\mathbf{k})^2} \|\partial_{k_j} Q_1(\mathbf{k})(H_0 + 1)^{-1}\Psi\|^2 d\mathbf{k} &\leq q_j \|\Psi\|. \end{aligned}$$

Remark

(A.4), (A.5) では、相互作用と生成作用素の交換関係に関する条件となっているが、これらの条件は以下の一般化されたスピン・ボソンモデルの Hamiltonian [1]

$$H_{\text{GSB}}(\kappa) = A \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes d\Gamma_b(\omega) + \kappa \sum_{j=1} B_j \otimes \phi(f_j)$$

へ応用できる条件となっている。ここで、 $\phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a(f) + a^\dagger(f))$, であり、 $a^\dagger(f)$ は生成作用素とする。

ここで主定理を述べる

定理 (A.1)-(A.5) および $|\kappa| < \frac{1}{c_1}$ が成り立つとする。このとき、 $H(\kappa)$ に基底状態が存在すれば、その多重度は有限である。

証明の基本的な方針は [5] で用いられているフェルミ場とボーズ場が相互作用する系の一つである量子電磁力学の系で考察されている方法を粒子と量子場の系へ応用できるように改良することである。[5] の方針は [2] および [3] で用いられている手法を合わせて用いる方法で、量子電磁力学の系の基底状態が任意の結合定数で存在し、その多重度が有限であることが示されている。

基底状態の多重度の評価に関しては [4] があるが、その結果を応用すれば結合定数が十分小さい時に、 $\dim \ker (H(\kappa) - E_0(H(\kappa))) \leq \dim \ker (A - E_0(A))$ となることが示される。今回の主結果は結合定数の条件に関しては自己共役性に必要な条件のみ課している。

謝辞

This work was supported by JSPS KAKENHI 20K03625 and the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

- [1] A. Arai and M. Hirokawa, On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model, *J. Funct. Anal.* **151** (1997), 455-503.
- [2] C.Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. H. Poincaré*, **1** (2000), 443-459.
- [3] M.Griesemer, E.Lieb and M.Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* **145** (2001), 557-595.
- [4] F. Hiroshima, Multiplicity of ground states in quantum field models; applications of asymptotic fields, *J. Funct. Anal.* **224** (2005), 431-470.
- [5] T. Takaesu, Ground states of quantum electrodynamics with cutoffs, *Journal of Mathematical Physics* **59** (2018) 072301.
- [6] T. Takaesu, On the evaluation of multiplicity of ground states of quantum field models, (in preparation)

Toshimitsu Takaesu

Faculty of Science and Technology, Gunma University

4-2 Aramaki-machi, Maebashi City, Gunma, 371-8510

t-takaesu@hotmail.co.jp