# Weyl 亜群と Hamilton 閉路

山根　宏之
富山大学学術研究部理学系
Hiroyuki Yamane
Faculty of Science, Academic Assembly, Univesity of Toyama

Abstract. Weyl 亜群の Hamilton 閉路について解説する。詳しくは、[16] をみよ。[16] において、標数 0 の体上で定義される（有限型の）一般化された量子群に付随する Weyl 亜群の Cayley グラフの Hamilton 閉路の存在性を示した。階数が $n$ ならば、その Cayley グラフは、連結 $n$-正則グラフである。階数が 1 のときは、その Cayley グラフは、頂点が 2 つで、辺が 1 つであるので、Hamilton 閉路は存在しない。階数が 2 のときは、その Cayley グラフは、連結 2-正則グラフであるので、Hamilton 閉路の存在性は明らかである。[16] ではその存在性を階数が 3, 4 のときは、例を具体的に与える事によって示し、階数が 5 以上のときは、存在性のみを示した。[3] によって有限コクセター群に対して定義される Cayley グラフに Hamilton 閉路が存在する事が示されたが、[16] では本質的に同じ証明法を実行した。

## 1　Introduction

$x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して、$J_{x,y} := \{n \in \mathbb{Z} | x \leq n \leq y\}$ とおく。集合 $X$ に対して、$|X|$ を $X$ の濃度とする。まず、有限グラフと Hamilton 閉路の定義を与える。

**有限グラフ**
$V$ を空ではない有限集合とする。$P_2(V)$ を $V$ の部分集合で 2 つの異なる元からなるものを元とするものとする。すなわち、$P_2(V) := \{X \subset V || X| = 2\}$ である。$E$ を $P_2(V)$ の空でない集合とする。組 $(V, E)$ を有限グラフとよぶ。組 $(V, P_2(V))$ を有限完全グラフとよぶ。

**Hamilton 閉路**
$\Gamma = (V, E)$ を有限グラフとする。ここで、$V$ と $E$ はそれぞれ頂点と辺の集合である。$\varphi : J_{1,|V|} \to V$ を全単射写像とする。$\varphi$ が $\Gamma$ の Hamilton 閉路であるとは、

$$\{\varphi(|E|), \varphi(1)\} \in E \quad \text{および} \quad \forall i \in J_{1,|E|-1}, \{\varphi(i), \varphi(i+1)\} \in E$$

を満たすときにいう。

[3] によって有限コクセター群に対して定義される Cayley グラフに Hamilton 閉路が存在する事が示された。その方法は非常に簡潔なものであって、有限コクセター群のコ

クセターグラフがループを含まない事のみを使って証明している。さらにそれは下記の定理 1.1 と本質的に同じ証明法である。

**定理 1.1.** （Rapaport-Strasser (1959)、[14, Lemma 1] をみよ） $G$ を有限群とする。$S=\{\alpha,\beta,\gamma\}\subset G$ を $\langle S\rangle=G$, $\alpha^2=\beta^2=\gamma^2=e$ となるものとする。$\alpha\beta=\beta\alpha$ を仮定する。このとき Cayley グラフ $\Gamma=\Gamma(G,S)$ は Hamilton 閉路をもつ。

証明： $z\in G$ と $X\subset G$ に対して $\partial_z(X):=\{g\in G\setminus X|\exists x\in X, g=xz\}$ とおく。$H=\langle\beta,\gamma\rangle\subset G$ とおく。$|H|=2m$ であって、$\Gamma(H,\{\beta,\gamma\})$ は Hamilton 閉路

$$e\leftrightarrow\beta\leftrightarrow\beta\gamma\leftrightarrow\beta\gamma\beta\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow(\beta\gamma)^{m-1}\beta\leftrightarrow(\beta\gamma)^m=e$$

をもつ。

帰納法を用いる。$X_1=H\subsetneq X_2\subsetneq\cdots\subsetneq X_q=G$ となる列を考える。各 $1\leq i\leq q$ に対して $X_i$ は閉路をもち、$X_i=y_{i,1}H\coprod\cdots\coprod y_{i,1}H$ である。$\partial_\alpha(X_i)=\emptyset$ ならば $X_i=G$ でなければならないので証明は終わる。

$\partial_\alpha(X_i)\neq\emptyset$ と仮定する。$y\in\partial_\alpha(X_i)$ とする。$yH\cap X_i=\emptyset$ である。($\because$ $\exists h\in H$, $x:=yh\in X_i$ と仮定する。$y=xh^{-1}\in X_i$ となり矛盾である。)

$X_{i+1}:=X_i\coprod yH$ とおく。$x\in X_i$ を $y=x\alpha$ となるものとする。$x=y\alpha$ である。$X_i$ は閉路をもつので、$X_i\cap\{x\alpha,x\beta,x\gamma\}\neq\emptyset$ である。$x\alpha\notin X_i$ であるので、$X_i\cap\{x\beta,x\gamma\}\neq\emptyset$ である。$x\gamma\leftrightarrow x\leftrightarrow x\beta$ は、その閉路の部分道である。

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots\leftrightarrow & x & \leftrightarrow & x\beta & \leftrightarrow\cdots & & (X_i)\\ & \updownarrow & & \updownarrow & & & (\cdot\alpha)\\ \cdots\leftrightarrow & y & \leftrightarrow & y\beta & \leftrightarrow\cdots & & (yH)\end{array}$$

上の図を参考にして、$X_i$ の閉路から $x\leftrightarrow x\beta$ を取り除き、$yH$ の閉路から $y\leftrightarrow y\beta$ を取り除いて、$x\leftrightarrow y=x\alpha$ と $x\beta\leftrightarrow x\beta\alpha=x\alpha\beta=y\beta$ でつないで $X_{i+1}$ の閉路を得る。 □

上の定理の証明法と同じ方法で主結果を得た。

**主結果** ([16]) 一般化された量子群のワイル亜群の Cayley グラフは Hamilton 閉路をもつ。

# 2 一般化されたルート系とワイル亜群（1つ目の）定義

この節の内容について、詳しい事は [10], [9], [1] を見よ。$I$ を空でない有限集合とする。$n:=|I|(\in\mathbb{N})$ とおく。$F_2(I)$ を $I\cup\{e\}$ を生成元とし関係式 $i^2=e$ で定義される半群と

する。$F_2(I)$ は群である。$A$ を $F_2(I)$ が作用する空でない集合とする。$i, j \in N$, $a \in A$ とする。

$$\Theta(i,j;a) = \{(ij)^m, (ji)^m | m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

とおく。$\Theta(i,j;a) = \Theta(j,i;a)$ であり $i \cdot \Theta(i,j;a) = \Theta(i,j;a)$ が成り立つ。$\theta(i,j;a) = |\Theta(i,j;a)| (\in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ とおく。$(i,j;a)_{(0)} = (i,j;a)^{(0)} = a$ とおき，$(i,j;a)_{(m)} = i \cdot (i,j;a)^{(m-1)}$, $(i,j;a)^{(m)} = j \cdot (i,j;a)_{(m-1)}$ とおく。各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $(i,j;a)_{(m)} \neq (i,j;a)^{(m)}$ であれば $\theta(i,j;a) = \infty$ でありそうでなければ

$$\theta(i,j;a) = \min\{m \in \mathbb{N} | (i,j;a)_{(m)} = (i,j;a)^{(m)}\}$$

である。

$I$ および $A$ を上のものとする。

$$m_{i,j;a} = m_{j,i;a} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\} \quad (a \in A, i, j \in I, i \neq j)$$

とする。$\theta(i,j;a) \in \mathbb{N}$ かつ $m_{i,j;a} \in \mathbb{N}$ なら $\theta(i,j;a)$ は $m_{i,j;a}$ を割り切ると仮定する。$\theta(i,j;a)$ なら $m_{i,j;a} = \infty$ であると仮定する。$\mathbf{m} = (m_{i,j;a} | i, j \in I, i \neq j, a \in A)$ とおく。半群

$$W = (W, I, A, \cdot, \mathbf{m})$$

を $\{0, e_a, s_i^a\}$ を生成系とし下の定義関係式 (1)-(3) により定義する。
(1) $00 = e_a 0 = 0 e_a = s_i^a 0 = 0 s_i^a = 0$, $e_a^2 = e_a$, $e_a e_b = 0$ $(a \neq b)$, $e_{i \cdot a} s_i^a = s_i^a e_a = s_i^a$,
(2) $s_i^{i \cdot a} s_i^a = e_a$,
(3) $s_{i_1}^{a_1} s_{i_2}^{a_2} \cdots s_{i_{2m}}^{a_{2m}} = e_a$ $(i, j \in N, i \neq j, a \in A$, $m_{i,j;a} \in \mathbb{N}$, ここで $m = m_{i,j;a}$, $i_{2k-1} = i$, $i_{2k} = j$ $(k \in J_{1,m})$, $a_t = (i_t i_{t-1} \cdots i_1) \cdot a$ $(t \in J_{1,2m})$ とおく。)

各 $a \in A$ に対して $V_a$ を $n$ 次元実線形空間とし、$\pi_a = \{\alpha_i^a | i \in I\}$ を $V_a$ の基底であるものとし，$R_a$ を $\pi_a \subset R_a$ を満たす $V_a$ の部分集合とする。

$$R_a^+ = R_a \cap (\oplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^a), \quad R_a^- = R_a \cap (\oplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\leq 0} \alpha_i^a)$$

とおく。各 $a \in A$, $i \in I$ に対して $\sigma_i^a : V_a \to V_{i \cdot a}$ を線形同型写像とする。各 $a \in A$, $i, j \in I$, $i \neq j$ に対して $m_{i,j;a} := |R_a^+ \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^a \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_j^a)| (\in J_{2,\infty} \cup \{\infty\})$ とおく。

**定義 2.1.** データ $R = (I, A, (V_a, R_a, \pi_a, (\sigma_i^a)_{i \in I})_{a \in A})$ が次の (1)-(4) を満たすとき一般化されたルート系とよぶ。
(1) $R_a = R_a^+ \cup R_a^-$, $\mathbb{R}\alpha_i^a \cap R_a = \{\alpha_i^a, -\alpha_i^a\}$
(2) $\sigma_i^a(R_a) = R_{i \cdot a}$, $\sigma_i^a(\alpha_i^a) = -\alpha_i^{i \cdot a}$, $\sigma_i^a(\alpha_j^a) \in \alpha_j^{i \cdot a} + \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^{i \cdot a}$ $(j \neq i)$
(3) $\sigma_i^{i \cdot a} \sigma_i^a = \mathrm{id}_{V_a}$
(4) $\theta(i,j;a) \in \mathbb{N}$ かつ $m_{i,j;a} \in \mathbb{N}$ なら $\theta(i,j;a)$ は $m_{i,j;a}$ を割り切る。$\theta(i,j;a) = \infty$ なら $m_{i,j;a} = \infty$ である。

さらに、$|R_a| < \infty$ のとき、$R$ を一般化された有限ルート系とよぶ。$|R_a| < \infty$ のとき、$R_a^- = -R_a^+$ である。

この $\mathbf{m} = (m_{i,j;a} | a \in A, i, j \in I)$ に対して定義される $W = (W, I, A, \cdot, \mathbf{m})$ を $R$ のワイル亜群 (Weyl groupoid) とよぶ。

**定理 2.2.** 公理 (4) は、次の公理 (4)$'$（または公理 (4)$''$）に取り換えることができる。

(4)$'$　$k \in \mathbb{N}$, $i_t \in I$ $(t \in J_{1,k})$, $a \in A$ とする。$a_t := (i_t i_{t-1} \cdots i_1) \cdot a$ $(t \in J_{1,k})$ とおき、$\gamma := \sigma_{i_k}^{a_{k-1}} \cdots \sigma_{i_2}^{a_1} \sigma_{i_1}^{a}$ とおく。全ての $i \in I$ に対して $\gamma(\alpha_i^a) = \alpha_i^{a_k}$ であるならば $a_k = a$ である。

（(4)$''$ $\gamma$ を (4)$'$ のものとする。$\gamma(R_+^a) = R_+^{a_k}$ ならば $a_k = a$ である。）

$V$ を $\{e_i | i \in I\}$ を基底とする $\mathbb{R}$-線形空間とする。$\hat{\sigma}_i^a \in \mathrm{GL}(V)$ を $\hat{\sigma}_i^a(e_i) = -e_i$, $\hat{\sigma}_i^a(e_j) = e_j + N_{ij}^a e_i$ $(j \neq i)$ で定義する。ここで、$N_{ij}^a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\sigma_i^a(\alpha_j^a) \in \alpha_j^{i \cdot a} + N_{ij}^a \alpha^a$ により定義する。

**定理 2.3.** $k \in \mathbb{N}$, $i_t \in I$ $(t \in J_{1,k})$, $a \in A$ とする。$a_t := (i_t i_{t-1} \cdots i_1) \cdot a$ $(t \in J_{1,k})$ とおき、$\gamma := \sigma_{i_k}^{a_{k-1}} \cdots \sigma_{i_2}^{a_1} \sigma_{i_1}^{a}$, $\hat{\gamma} := \hat{\sigma}_{i_k}^{a_{k-1}} \cdots \hat{\sigma}_{i_2}^{a_1} \hat{\sigma}_{i_1}^{a}$, とおく。$d_{ij} \in \mathbb{Z}$ を $\hat{\gamma}(e_j) = \sum_{i \in I} d_{ij} e_i$ により定義する。このとき、

$$\gamma(\alpha_j^a) = \sum_{i \in I} d_{ij} \alpha_i^{a_k}$$

が成り立つ。

**定理 2.4.** $k \in \mathbb{N}$, $i_t \in I$ $(t \in J_{1,k})$, $a \in A$ とする。$a_t := (i_t i_{t-1} \cdots i_1) \cdot a$ $(t \in J_{1,k})$ とおき、$\gamma := \sigma_{i_k}^{a_{k-1}} \cdots \sigma_{i_2}^{a_1} \sigma_{i_1}^{a}$ とおく。$c := s_{i_k}^{a_{k-1}} \cdots s_{i_2}^{a_1} s_{i_1}^{a} (\in W)$ とおく。このとき、

$$\gamma = \mathrm{id}_{V^a} \quad \Longleftrightarrow \quad c = e_a$$

が成り立つ。

# 3　（2 つ目の）一般化されたルート系—1 つ目と同値

この節の内容について、詳しい事は [15], [2] を見よ。$n \in \mathbb{N}$ とする。$\mathbb{R}^n$ を標準的な $n$ 次元実ベクトル空間とする。$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的な基底とする。$\mathbb{Z}^n := \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n \subset \mathbb{R}^n$ とする。

$\mathbb{R}^n$ の有限部分集合 $\mathcal{R}$ を $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathcal{R} \subset \mathbb{Z}^n$ となるものとする。$\mathcal{R}$ の部分集合の族 $\mathbb{B}$ を、各 $B \in \mathbb{B}$ が $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$-基であり $\mathcal{R}_B^+ := \mathcal{R} \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0} e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} e_n)$ とおいたときに $\mathcal{R} = \mathcal{R}_B^+ \cup (-\mathcal{R}_B^+)$ を満たすものとして定義する。

**定義 3.1.** 「$\mathcal{R}$ が一般化された有限ルート系」であるとは、次の (0)-(3) を満たすときにいう。
(0) $\mathcal{R}$ は空でない有限集合であり、$\mathbb{B}$ は空でない。
(1) $\{e_1, \ldots, e_n\} \in \mathbb{B}$
(2) $\forall \alpha \in \mathcal{R}$, $\mathbb{R}\alpha \cap \mathcal{R} = \{\pm\alpha\}$
(3) $\forall B \in \mathbb{B}$, $\forall \alpha \in B$, $\exists B^{(\alpha)} \in \mathbb{B}$, $(-\mathcal{R}_B^+) \cap \mathcal{R}_{B^{(\alpha)}}^+ = \{-\alpha\}$

このとき

$$\exists N_{\beta,\alpha}^B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\beta \in B \setminus \{\alpha\}), B^{(\alpha)} = \{-\alpha\} \cup \{\beta + N_{\beta,\alpha}^B \alpha | \beta \in B \setminus \{\alpha\}\}$$

が成り立つ。

**定理 3.2.** $\mathbb{B}$ を定義 3.1 ものとする。$B \in \mathbb{B}$ の元に次の性質 $(*)$ を満たすように順序付け $B = \{\alpha_1^B, \ldots, \alpha_n^B\}$ を行うことが出来る。

$(*)$ 全単射 $\tau_i : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ $(i \in J_{1,n})$ で次の性質「 」を満たすものがある。

「$\tau_i(B) = B^{(\alpha_i^B)}$ であり、$\alpha_i^{\tau_i(B)} = -\alpha_i^B$, $\alpha_j^{\tau_i(B)} = \alpha_j^B + N_{\alpha_i^B,\alpha_j^B}^B \alpha_i^B$ $(j \neq i)$」

明らかに

$$\tau_i(\tau_i(B)) = B \quad (B \in \mathbb{B})$$

が成り立つ。

**定理 3.3.** $B \in \mathbb{B}$ とする。このとき、$\mathbb{B} = \{\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_k}(B) | k \in \mathbb{N}, i_t \in J_{1,n}(t \in J_{1,k})\}$ が成り立つ。

**定理 3.4.** $B \in \mathbb{B}$ とする。$1 \leq i \neq j \leq n$ とする。

$$m := m_{ij}^B := |\mathcal{R}_B^+ \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_j)|$$

とおく。このとき

$$(\tau_i\tau_j)^m(B) = B$$

である。さらに、$m$ 個の元

$$B, \tau_j(B), \tau_i\tau_j(B), \tau_j\tau_i\tau_j(B), \ldots, \underbrace{\cdots \tau_i\tau_j\tau_i\tau_j}_{m-1}(B)$$

は全て異なる。

**定理 3.5.** 定義 2.1 の $R^a$ は、$|R^a| < \infty$ であるならば、定義 3.1 の一般化された有限ルート系である。ただし、$\alpha_i^a$ と $e_i$ を同一視する。逆に、定義 3.1 の $\mathcal{R}$ は、$A = \mathbb{B}$ とする定義 2.1 の意味での一般化された有限ルート系である。

**定義 3.6.** グラフ $\Gamma(\mathcal{R}) = (V(\mathcal{R}), E(\mathcal{R}))$ を頂点の集合 $V(\mathcal{R})$ を $\mathbb{B}$ と同一視し、辺の集合 $E(\mathcal{R})$ を $\{\{B, \tau_i(B)\}|B \in \mathbb{B}, i \in J_{1,n}\}$ と同一視することによって定義する。($\mathcal{R}$ のワイル亜群を $W$ とする。$\Gamma(\mathcal{R})$ を $W$ の Cayley グラフとよぶ。)

**Remark 3.7.** 一般化された有限ルート系は [5] により分類された。

# 4 主定理

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする。$\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ とする。写像 $\chi : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{K}^\times$ が次の性質を満たすとき bicharacter という。

$$\chi(a+b, c) = \chi(a, c)\chi(b, c), \quad \chi(a, b+c) = \chi(a, b)\chi(a, c) \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}^n) \tag{4.1}$$

$\widetilde{\mathbb{B}}$ を $\mathbb{Z}^n$ の(順序付き)基の集合とする。$B = \{\alpha_1^B, \ldots, \alpha_n^B\} \in \widetilde{\mathbb{B}}$ に対して

$$q_{ij}^B := \chi(\alpha_i^B, \alpha_j^B) \quad (i, j \in J_{1,n})$$

とおく。$\widetilde{\mathbb{B}}$ の空でない有限部分集合 $\mathbb{B}$ が admissible であるとは、次の条件 (1)-(4) を満たすときにいう。

(1) $\mathbb{B}$ は空でない有限集合である。

(2) 各 $B \in \mathbb{B}$ と、各 $i, j \in J_{1,n}$, $i \neq j$, に対して、次の条件を満たす $N_{ij}^{\chi,B} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する。

(2-1) $q_{ii}^B = 1$ のときは、$N_{ij}^{\chi,B} = 0$

(2-2) $q_{ii}^B \neq 1$ のときは、

$$((q_{ii}^B)^{N_{ij}^{\chi,B}+1} - 1)(1 - q_{ij}^B q_{ji}^B (q_{ii}^B)^{N_{ij}^{\chi,B}}) = 0,$$

かつ

$$((q_{ii}^B)^{m+1} - 1)(1 - q_{ij}^B q_{ji}^B (q_{ii}^B)^m) \neq 0 \quad (m \in J_{0, N_{ij}^{\chi,B}-1})$$

(3) 各 $B \in \mathbb{B}$ と、各 $i \in J_{1,n}$ に対して、$N_{ii}^{\chi,B} := -2$ とおき、

$$\tau_i(B) := \{\alpha_j^{\tau_i(B)} = \alpha_j^B + N_{ij}^{\chi,B}\alpha_i | j \in J_{1,n}\}$$

とおく。$\tau_i(B) \in \mathbb{B}$ である。

(4) 各 $B \in \mathbb{B}$ に対して、

$$\mathbb{B} = \{B\} \cup \{\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_k}(B) | k \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_k \in J_{1,n}\}$$

である。

**定理 4.1.** $\mathbb{B}$ を admissible であるものとする。$\mathcal{R} := \cup_{B\in\mathbb{B}} B$ とおく。$\mathcal{R}$ は一般化された有限ルート系である。

**主定理** ([16]) $n \geq 2$ とする。$\mathbb{B}$ を admissible であるものとする。$\mathcal{R} := \cup_{B\in\mathbb{B}} B$ とおく。このとき、有限グラフ $\Gamma(\mathcal{R})$ は Hamilton 閉路をもつ。

**Remark 4.2.** admissible な $(\chi, \mathbb{B})$ は、[7] により分類された。($\mathbb{K}$ の標数は 0 である。Remark 4.2 と下記の Remark 5.10 は同じことを述べている。)

# 5 一般化された量子群

$\mathbb{K}$ を体とする。$\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ とする。$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x \in \mathbb{K}$ に対して、

$$(n)_x := \sum_{r=1}^{n} x^r, \quad (n)_x! := \prod_{r=1}^{n} (n)_x$$

とおく。$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \in J_{0,n}$, $x \in \mathbb{K}$ に対して、$\binom{n}{m}_x \in \mathbb{K}$ を

$$\binom{n}{0}_x := \binom{n}{n}_x := 1,$$

$$\binom{n}{m}_x := \binom{n-1}{m}_x + x^{n-m}\binom{n-1}{m-1}_x = x^m\binom{n-1}{m}_x + \binom{n-1}{m-1}_x \ (m \in J_{1,n-1})$$

によって定義する。$(m)_x!(n-m)_x!\binom{n}{m}_x = (n)_x!$ が成り立つ。$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x, y \in \mathbb{K}$ に対して、

$$(n; x, y) := 1 - x^{n-1}y, \quad (n; x, y)! := \prod_{m=1}^{n} (m; x, y)$$

とおく。$x \in \mathbb{K}^\times$ に対して、$\mathrm{ord}(x) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}$ を

$$\mathrm{ord}(x) := \begin{cases} \infty & (\forall n' \in \mathbb{N}, (n')_x \neq 0 \text{ であるとき}), \\ \min\{n \in \mathbb{N} | (n)_x = 0\} & (\exists n'' \in \mathbb{N}, (n'')_x = 0 \text{ であるとき}), \end{cases}$$

により定義する。

$n \in \mathbb{N}$ とし、$\mathfrak{A} := \mathbb{Z}^n$、$I := J_{1,n}$、$\alpha_i := e_i \in \mathfrak{A}$ $(i \in I)$ とする。$U = U(\chi)$ を bicharcter $\chi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathbb{K}$ によってきまる一般化された量子群とする。$U = U(\chi)$ の定義は [2, Theorem 6.1] をみよ。$U$ は $\mathbb{K}$ 上の結合的代数である。

$$[X, Y] := XY - YX \quad (X, Y \in U(\chi))$$

とおく。

$U$ の生成元 $K_\lambda$, $L_\lambda$ $(\mu \in \mathfrak{A})$, $E_i$, $F_i$ $(i \in I)$ は次の関係式をみたす。

$$\begin{cases} K_0 = L_0 = 1, K_\lambda K_\mu = K_{\lambda+\mu}, L_\lambda L_\mu = L_{\lambda+\mu}, \\ K_\lambda E_i K_\lambda^{-1} = \chi(\lambda, \alpha_i) E_i, K_\lambda F_i K_\lambda^{-1} = \chi(\lambda, -\alpha_i) F_i, \\ L_\lambda E_i L_\lambda^{-1} = \chi(-\alpha_i, \lambda) E_i, L_\lambda F_i L_\lambda^{-1} = \chi(\alpha_i, \lambda) F_i, \\ [E_i, F_i] = \delta_{ij}(-K_{\alpha_i} + L_{\alpha_i}) \end{cases} \tag{5.1}$$

$U$ は次の式 (5.2) によってホップ代数 $(U, \Delta, \varepsilon, S)$ とみなせる。

$$\begin{cases} \Delta(K_\lambda) = K_\lambda \otimes K_\lambda, \Delta(L_\lambda) = L_\lambda \otimes L_\lambda, \\ \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_{\alpha_i} \otimes E_i, \Delta(F_i) = F_i \otimes L_{\alpha_i} + 1 \otimes F_i, \\ \varepsilon(K_\lambda) = \varepsilon(L_\lambda) = 1, \varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0, \\ S(K_\lambda) = K_{-\lambda}, S(L_\lambda) = L_{-\lambda}, S(E_i) = -K_{-\alpha_i} E_i, S(F_i) = -F_i L_{-\alpha_i} \end{cases} \tag{5.2}$$

$U^0 = U^0(\chi)$ を $U$ の $K_\lambda$, $L_\lambda$ $(\mu \in \mathfrak{A})$ で生成された部分代数とする。$\{K_\lambda L_\mu | \lambda, \mu \in \mathfrak{A}\}$ は $U^0$ の $\mathbb{K}$-線形空間としての基底である。即ち、

$$U^0 = \oplus_{\lambda,\mu\in\mathfrak{A}} \mathbb{K} K_\lambda L_\mu$$

である。$U^+ = U^+(\chi)$ を $U$ の $(i \in I)$ で生成された部分代数とする。ただし、$1 \in U^+$ である。$U^- = U^-(\chi)$ を $U$ の $(i \in I)$ で生成された部分代数とする。ただし、$1 \in U^-$ である。線形写像

$$U^- \otimes_{\mathbb{K}} U^0 \otimes_{\mathbb{K}} U^+ \to U \quad (Y \otimes Z \otimes X \mapsto YZX)$$

は全単射である。$U$ の線形部分空間 $U_\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{A})$ で

$$U^0 \subset U_0, E_i \in U_{\alpha_i}, E_i \in U_{-\alpha_i}, U_\lambda U_\mu \subset U_{\lambda+\mu}, U = \oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}} U_\lambda$$

を満たすものが一意的に存在する。$\mathfrak{A}^+ := \oplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ とおく。$\lambda \in \mathfrak{A}^+$ に対して $U^+_\lambda := U^+ \cap U_\lambda$, $U^-_{-\lambda} := U^- \cap U_{-\lambda}$ とおく。

が成り立つ。

$$\begin{aligned}&U^+=\oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}^+}U^+_\lambda,\quad U^-=\oplus_{\lambda\in\mathfrak{A}^+}U^-_{-\lambda},\\&\dim U^+_\lambda=\dim U^-_{-\lambda},\\&\dim U^+_0=\dim U^+_{\alpha_i}=1,\,U^+_0=\mathbb{K}1,\,U^+_{\alpha_i}=\mathbb{K}E_i,\\&\dim U^-_0=\dim U^-_{-\alpha_i}=1,\,U^-_0=\mathbb{K}1,\,U^-_{-\alpha_i}=\mathbb{K}F_i,\end{aligned}$$

が成り立つ。次の事実 (5.3) が成り立つ。「(5.3) が $U(\chi)$ の定義である」と言ってよい。

(5.3)
- $\lambda\in\mathfrak{A}^+\setminus\{0\}$, $X\in U^+_\lambda$ とする。
  このとき、「$\forall i\in I$, $[X,F_i]=0\Longrightarrow X=0$」が成り立つ。
- $\lambda\in\mathfrak{A}^+\setminus\{0\}$, $Y\in U^-_{-\lambda}$ とする。
  このとき、「$\forall i\in I$, $[E_i,Y]=0\Longrightarrow Y=0$」が成り立つ。

$U$ の $\mathbb{K}$-代数としての自己同型写像 $\Omega:U\to U$ で $\Omega(K_\lambda):=K_{-\lambda}$, $\Omega(L_\lambda):=L_{-\lambda}$, $\Omega(E_i):=F_iL_{-\alpha_i}$, $\Omega(F_i):=K_{-\alpha_i}E_i$ となるものが一意的に存在する。

$$\begin{aligned}&[\![X,Y]\!]:=XY-\chi(\lambda,\mu)YX\quad(X\in U_\lambda,Y\in U_\mu),\\&[\![X,Y]\!]^{\mathrm{op}}:=XY-\chi(\mu,\lambda)YX\quad(X\in U_\lambda,Y\in U_\mu),\end{aligned}$$

とおく。$i,j\in I$, $i\neq j$, $m\in\mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned}&E_{0,i,j}:=E_i,E_{m,i,j}:=[\![E_i,E_{m-1,i,j}]\!],\quad E^\vee_{0,i,j}:=E_i,E^\vee_{m,i,j}:=[\![E_{m-1,i,j},E_i]\!],\\&F_{0,i,j}:=F_i,F_{m,i,j}:=[\![F_i,F_{m-1,i,j}]\!]^{\mathrm{op}},\quad F^\vee_{0,i,j}:=F_i,F^\vee_{m,i,j}:=[\![F_{m-1,i,j},F_i]\!]^{\mathrm{op}},\end{aligned}$$

とおく。

$q_{ij}:=\chi(\alpha_i,\alpha_j)$ $(i,j\in I)$ とおく。

次の等式が成り立つ。

(EQ1) $[E_i,F_i^m]=(m)_{q_{ii}}(-K_{\alpha_i}+q_{ii}^{-m+1}L_{\alpha_i})F_i^{m-1}\quad(i\in I,m\in\mathbb{N})$
(EQ2) $[E_i^m,F_i]=-(m)_{q_{ii}}(-L_{\alpha_i}+q_{ii}^{-m+1}K_{\alpha_i})E_i^{m-1}\quad(i\in I,m\in\mathbb{N})$
(EQ3) $[E_i,F_{m,i,j}]=-(m)_{q_{ii}}(m;q_{ii},q_{ij}q_{ji})K_{\alpha_i}F_{m-1,i,j}\quad(i,j\in I,i\neq j,m\in\mathbb{N})$
(EQ4) $[E_{m,i,j},F_i]=(m)_{q_{ii}}(m;q_{ii},q_{ij}q_{ji})L_{\alpha_i}E_{m-1,i,j}\quad(i,j\in I,i\neq j,m\in\mathbb{N})$
(EQ5) $[E_i,F^\vee_{m,i,j}]=(m)_{q_{ii}}(m;q_{ii},q_{ij}q_{ji})F^\vee_{m-1,i,j}L_{\alpha_i}\quad(i,j\in I,i\neq j,m\in\mathbb{N})$
(EQ6) $[E^\vee_{m,i,j},F_i]=-(m)_{q_{ii}}(m;q_{ii},q_{ij}q_{ji})E^\vee_{m-1,i,j}K_{\alpha_i}\quad(i,j\in I,i\neq j,m\in\mathbb{N})$
(EQ7) $(i,j\in I,i\neq j,l,m\in\mathbb{Z}_{\geq0})$

$$[E_{l,i,j},F_{m,i,j}]=\begin{cases}(l)_{q_{ii}}!\binom{m}{l}_{q_{ii}}(m;q_{ii},q_{ij}q_{ji})!F_i^{m-l}L_{l\alpha_i+\alpha_j} & (0\leq l<m),\\(m)_{q_{ii}}!(m;q_{ii},q_{ij}q_{ji})!(-K_{m\alpha_i+\alpha_j}+L_{m\alpha_i+\alpha_j}) & (m=l),\\-(m)_{q_{ii}}!\binom{l}{m}_{q_{ii}}(l;q_{ii},q_{ij}q_{ji})!E_i^{l-m}K_{m\alpha_i+\alpha_j} & (l>m\geq0).\end{cases}$$

(EQ8) $(i,j\in I,i\neq j,l,m\in\mathbb{Z}_{\geq0})$

$$[E^\vee_{l,i,j},F^\vee_{m,i,j}]=\begin{cases}-(l)_{q_{ii}}!\binom{m}{l}_{q_{ii}}(m;q_{ii},q_{ij}q_{ji})!K_{l\alpha_i+\alpha_j}F_i^{m-l} & (0\leq l<m),\\(m)_{q_{ii}}!(m;q_{ii},q_{ij}q_{ji})!(-K_{m\alpha_i+\alpha_j}+L_{m\alpha_i+\alpha_j}) & (m=l),\\(m)_{q_{ii}}!\binom{l}{m}_{q_{ii}}(l;q_{ii},q_{ij}q_{ji})!L_{m\alpha_i+\alpha_j}E_i^{l-m} & (l>m\geq0).\end{cases}$$

(EQ9) $[E_{l,i,j}, F_{m,i,k}] = [E^\vee_{l,i,j}, F^\vee_{m,i,k}] = 0$ $(i,j,k \in I, i \neq j \neq k \neq i, l,m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$
(EQ10) $[E_j, F_{m,i,j}] = (m; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! F_i^m L_{\alpha_j}$ $(i,j,I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$
(EQ11) $[E_{m,i,j}, F_j] = -(m; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! E_i^m K_{\alpha_j}$ $(i,j,I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$
(EQ12) $[E_j, F^\vee_{m,i,j}] = -(m; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! K_{\alpha_j} F_i^m$ $(i,j,I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$
(EQ13) $[E^\vee_{m,i,j}, F_j] = (m; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! L_{\alpha_j} E_i^m$ $(i,j,I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$
(EQ14) $\Delta(E_i^m) = \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} E_i^{m-t} K_{t\alpha_i} \otimes E_i^t \quad (i \in I, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$
(EQ15) $\Delta(F_i^m) = \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} F_i^t \otimes F_i^{m-t} L_{t\alpha_i} \quad (i \in I, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$
(EQ16) $(i,j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$
$\Delta(E_{m,i,j}) = E_{m,i,j} \otimes 1 + \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} (t; q_{ii}, q_{ii}^{m-t} q_{ij}q_{ji})! E_i^t K_{(m-t)\alpha_i + \alpha_j} \otimes E_{m-t,i,j}$
(EQ17) $(i,j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$
$\Delta(F_{m,i,j}) = 1 \otimes F_{m,i,j} + \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} (t; q_{ii}, q_{ii}^{m-t} q_{ij}q_{ji})! F_{m-t,i,j} \otimes F_i^t L_{(m-t)\alpha_i + \alpha_j}$
(EQ18) $(i,j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$
$\Delta(E^\vee_{m,i,j}) = K_{m\alpha_i + \alpha_j} \otimes E^\vee_{m,i,j} + \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} (t; q_{ii}, q_{ii}^{m-t} q_{ij}q_{ji})! E^\vee_{m-t,i,j} K_{t\alpha_i} \otimes E_i^t$
(EQ19) $(i,j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$
$\Delta(F^\vee_{m,i,j}) = E^\vee_{m,i,j} \otimes L_{m\alpha_i + \alpha_j} + \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} (t; q_{ii}, q_{ii}^{m-t} q_{ij}q_{ji})! F_i^t \otimes F^\vee_{m-t,i,j} L_{t\alpha_i}$

**Remark 5.1.** 等式 (EQ1)-(EQ19) は、(5.1) だけを定義関係式とする Hopf 代数 $\widetilde{U}(\chi)$ において成り立つ。

**補題 5.2.** $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。$(m)_{q_{ii}}! = 0$ ならば、$U^+_{m\alpha_i} = \{0\}$ である。$(m)_{q_{ii}}! \neq 0$ ならば、$\dim U^+_{m\alpha_i} = 1$ および $U^+_{m\alpha_i} = \mathbb{K}E_i^m$ である。

**補題 5.3.** ([1, Lemma 4.9 (2)]) $i,j \in I$, $i \neq j$, とする。$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。このとき、$\{E_{r,i,j}E_i^{m-r} | (m-r)_{q_{ii}}!(r)_{q_{ii}}!(r; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! \neq 0\}$ は $U^+_{m\alpha_i + \alpha_j}$ の基底である。(この集合が空集合ならば、$U^+_{m\alpha_i+\alpha_j} = \{0\}$ である。)

**Karchenko's PBW Theorem**
まず、記号を用意する。$Y$ を $\mathfrak{A}^+ \setminus \{0\}$ の空でない集合とする。$z : Y \to \mathbb{N}$ を写像とする。

$$Y^{\langle z \rangle} := \{(\lambda, k) \in Y \times \mathbb{N} | \lambda \in Y, k \in J_{1,z(\lambda)}\}$$

とおく。写像 $p^{\langle Y,z \rangle} : Y^{\langle z \rangle} \to Y$ を $p^{\langle Y,z \rangle}(y) := \lambda$ $(y = (\lambda, k) \in Y^{\langle z \rangle})$ により定義する。

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathfrak{P}}^{\langle Y,z \rangle} := \{f : Y^{\langle z \rangle} \to \mathbb{Z}_{\geq 0} | f \text{ は写像 }\}, \\
&\widetilde{\mathfrak{P}}^{\langle Y,z \rangle, \prime} := \{f \in \widetilde{\mathfrak{P}}^{\langle Y,z \rangle} || \{y \in Y^{\langle z \rangle} | f(y) \neq 0\}| < \infty\}, \\
&\mathfrak{P}^{\langle Y,z \rangle, \prime} := \{f \in \widetilde{\mathfrak{P}}^{\langle Y,z \rangle, \prime} | \forall y \in Y^{\langle z \rangle}, 0 \leq f(y) < \mathrm{ord}(\chi(p^{\langle Y,z \rangle}(y), p^{\langle Y,z \rangle}(y)))\}
\end{aligned}$$

とおく。

$$\mathfrak{P}^{\langle Y,z \rangle}_\lambda := \{f \in \mathfrak{P}^{\langle Y,z \rangle, \prime} | \sum_{y \in Y^{\langle Y,z \rangle}} f(y) p^{\langle Y,z \rangle}(y) = \lambda\} \quad (\lambda \in \mathfrak{A}^+)$$

とおく。

**定理 5.4.** ([12], [13], ([6] もみよ))
(1) $R^+(\chi) \subset \mathfrak{A}^+ \setminus \{0\}$ と写像 $\varphi^+_\chi : R^+(\chi) \to \mathbb{N}$ で次の性質 (5.4) を満たすものが一意的に存在する。

$$\forall \lambda \in \mathfrak{A}^+, \dim U^+_\lambda = |\mathfrak{P}_\lambda^{\langle R^+(\chi), \varphi^+_\chi \rangle}| \tag{5.4}$$

(2) $R^+(\chi)^{\langle \varphi^+_\chi \rangle}$ 上の全順序 $\preceq$ と $E_y \in U^+_\lambda$ ($y \in R^+(\chi)^{\langle \varphi^+_\chi \rangle}, \lambda := p^{\langle R^+(\chi)^{\langle \varphi^+_\chi \rangle}, \varphi^+_\chi \rangle}(y)$) で、1 と

$$E_{y_1}^{f(y_1)} E_{y_2}^{f(y_2)} \cdots E_{y_{k_f}}^{f(y_{k_f})}$$
$$(f \in \widetilde{\mathfrak{P}}^{\langle R^+(\chi)^{\langle \varphi^+_\chi \rangle}, \varphi^+_\chi \rangle, \prime}, \{y_1, y_2, \ldots, y_{k_f}\} = f^{-1}(\mathbb{N}), y_1 \prec y_2 \prec \cdots \prec y_{k_f})$$

から成る集合が $U^+(\chi)$ の $\mathbb{K}$-基底であるものが存在する。

$R(\chi) := R^+(\chi) \cup (-R^+(\chi))$ とおく。写像 $\varphi_\chi : R(\chi) \to \mathbb{N}$ を $\varphi_\chi(-\beta) := \varphi_\chi(\beta) := \varphi^+_\chi(\beta)$ ($\beta \in R^+(\chi)$) により定義する。

$$N^\chi_{ij} := |\{m \in \mathbb{N} | (m)_{q_{ii}}!(m; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! \neq 0| \, (\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$$
$$(i, j \in I, i \neq j)$$

とおく。$N^\chi_{ii} := -2$ ($i \in I$) とおく。
　補題 5.2, 補題 5.3 より次を得る。

**補題 5.5.** $i, j \in I$, $i \neq j$, とする。$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。このとき、

$$「m\alpha_i + \alpha_j \in R^+(\chi) \Longleftrightarrow m \in J_{0, N^\chi_{ij}}」$$

が成り立つ。さらに、$m \in J_{0, N^\chi_{ij}}$ ならば、$\varphi^+_\chi(m\alpha_i + \alpha_j) = 1$ が成り立つ。

**定義 5.6.** $i \in I$ とする。
(1) $\chi$ が $i$-finite であるとは、「$\forall j \in I \setminus \{i\}$, $N^\chi_{ij} < \infty$」を満たすときにいう。
(2) $\chi$ が $i$-finite であると仮定する。$\mathbb{Z}$-加群の同型写像 $\sigma^\chi_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ を

$$\sigma^\chi_i(\alpha_j) := \alpha_j + N^\chi_{ij}\alpha_i \quad (j \in I)$$

によって定義する。$(\sigma^\chi_i)^{-1} = \sigma^\chi_i$ である。
(3) $\chi$ が $i$-finite であると仮定する。bicharacter $\tau_i\chi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathbb{K}^\times$ を

$$\tau_i\chi(a, b) := \chi(\sigma^\chi_i(a), \sigma^\chi_i(a)) \quad (a, b \in \mathfrak{A})$$

によって定義する。$\sigma^{\tau_i\chi}_i = \sigma^\chi_i$ であり、$\tau_i\tau_i\chi = \chi$ である。

**定理 5.7.** ([4], [8]) $\chi$ が $i$-finite であると仮定する。
(1) $\sigma_i^\chi(R(\chi)) = R(\tau_i\chi)$ および $\varphi_{\tau_i\chi} \circ \sigma_i^\chi = \varphi_\chi$ が成り立つ。
(2) $\mathbb{K}$ 代数の同型写像 $T_i^{\tau_i\chi} : U(\tau_i\chi) \to U(\chi)$ で次の等式 (5.5) を満たすものが一意的に存在する。

$$
\begin{aligned}
&T_i^{\tau_i\chi}(K_\lambda) := K_{\sigma_i^\chi(\lambda)}, T_i^{\tau_i\chi}(L_\lambda) := L_{\sigma_i^\chi(\lambda)},\\
&T_i^{\tau_i\chi}(E_i) := F_i L_{-\alpha_i}, T_i^{\tau_i\chi}(F_i) := K_{-\alpha_i}, E_i,\\
&T_i^{\tau_i\chi}(E_j) := E_{N_{ij}^\chi,i,j} \quad (j \neq i),\\
&T_i^{\tau_i\chi}(F_j) := \frac{1}{(N_{ij}^\chi)_{q_{ii}}!(N_{ij}^\chi; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})!} F_{N_{ij}^\chi,i,j} \quad (j \neq i),
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

とくに、$T_i^{\tau_i\chi}(U(\tau_i\chi)_\lambda) = U(\chi)_{\sigma_i^\chi(\lambda)}$ $(\lambda \in \mathfrak{A})$ が成り立つ。

**補題 5.8.** $|R(\chi)| < \infty$ と仮定する。このとき、$R(\chi)$ は一般化された有限ルート系である。さらに、$\varphi_\chi(R(\chi)) = \{1\}$ である。

**定理 5.9.** ([11, Theorem 4.9]) $|R(\chi)| < \infty$ と仮定する。$k := |R^+(\chi)|$ とし、$i_t \in I$ $(t \in J_{1,k})$ を $\sigma_{i_1}^{\chi_1}\sigma_{i_2}^{\chi_2} \ldots \sigma_{i_k}^{\chi_k}(R^+(\chi_k)) = -R^+(\chi)$ となるものとする。ここで、$\chi_t := \tau_{i_t} \cdots \tau_{i_1}\chi$ $(t \in J_{1,k})$ とおく。$\beta_1 := \alpha_{i_1}$ とおき、$\beta_t := \sigma_{i_1}^{\chi_1}\sigma_{i_2}^{\chi_2} \ldots \sigma_{i_{t-1}}^{\chi_{t-1}}(\alpha_{i_t}) \in R^+(\chi)$ $(t \in J_{2,k})$ とおく。$\{\beta_t | t \in J_{1,k}\} = R^+(\chi)$ である。$E_{\beta_1} := E_{i_1}$ とおき、$E_{\beta_t} := T_{i_1}^{\chi_1}T_{i_2}^{\chi_2} \ldots T_{i_{t-1}}^{\chi_{t-1}}(E_{i_t}) \in U_{\beta_t}^+$ $(t \in J_{2,k})$ とおく。$g : J_{1,k} \to J_{1,k}$ を全単射とする。このとき、

$$
E_{\beta_{g(1)}}^{m_{g(1)}} E_{\beta_{g(2)}}^{m_{g(2)}} \cdots E_{\beta_{g(k)}}^{m_{g(k)}} \quad (m_t \in J_{0,\mathrm{ord}(\chi(\beta_t,\beta_t))-1})
$$

から成る集合は、$U^+(\chi)$ の $\mathbb{K}$-基底である。

**Remark 5.10.** $\mathbb{K}$ の標数が 0 のとき、$|R^+(\chi)| < \infty$ である $\chi$ は、[7] で分類された。

# References


[1] S. Azam, H. Yamane, M. Yousofzadeh, Classification of finite dimensional irreducible representations of generalized quan-tum groups via Weyl groupoids, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 51 (2015) 59-130.

[2] P. Batra, H. Yamane, Centers of Generalized Quantum Groups, J. Pure Appl. Algebra 222 (2018), no. 5, 1203-1241

[3] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, Allan R. Wilks, Gray Codes for Reflection Groups, Graphs and Combinatorics 5 (1989) 315-325.

[4] I. Heckenberger, The Weyl groupoid of a Nichols algebra of diagonal type, Invent. Math. 164(1) (2006) 175-188.

[5] M. Cuntz, I. Heckenberger, Finite Weyl groupoids, J. Reine Angew. Math. 702 (2015), 77-108.

[6] I. Heckenberger, Nichols algebras, ECNU Shanghai, July 2008 http://www.mi.uni-koeln.de/ iheckenb/na.pdf

[7] I. Heckenberger, Classification of arithmetic root systems, Adv. Math. 220(1) (2009) 59-124.

[8] I. Heckenberger, Lusztig isomorphisms for Drinfel'd doubles of bosonizations of Nichols algebras of diagonal type, J. Algebra 323 (2010) 2130-2182.

[9] I. Heckenberger, H.J. Schneider, Hopf algebras and root systems. Mathematical Surveys and Monographs, 247. American Mathematical Society, Providence, RI, 2020, ISBN: 978-1-4704-5232-2

[10] I. Heckenberger, H. Yamane, A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto's theorem, Math. Z. 259 (2008), no. 2, 255-276,

[11] I. Heckenberger, H. Yamane, Drinfel'd doubles and Shapovalov determinants, Rev. Un. Mat. Argentina 51 (2010), no. 2, 107-146.

[12] V. Kharchenko, A quantum analogue of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem, Algebra Log. 38(4) (1999) 259-276.

[13] V. Kharchenko, Quantum Lie theory: A multilinear approach, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2150, Springer, Cham, 2015.

[14] I. Pak, R. Radoicic, Hamiltonian paths in Cayley graphs, Discrete Mathematics 309 (2009) 5501-5508

[15] H. Yamane, Generalized root systems and the affine Lie superalgebra $\mathrm{G}^{(1)}(3)$, So Paulo J. Math. Sci. 10 (2016), no. 1, 9-19.

[16] H. Yamane, Hamilton circuits of Cayley graphs of Weyl groupoids of generalized quantum groups, Toyama Math. J. 43 (2022) 1-76

Faculty of Science, Academic Assembly,
University of Toyama 3190 Gofuku,
Toyama 930-8555, Japan
E-mail address: hiroyuki@sci.u-toyama.ac.jp

〒930-8555　富山県富山市五福 3190 富山大学学術研究部理学系