Level 2 standard modules for $A_9^{(2)}$ and partition conditions of Kanade-Russell

伊藤 歌那 (東京工業大学情報理工学院、理化学研究所 AIP JRA) *
Kana Ito
Tokyo Institute of Technology, RIKEN AIP

概要

Rogers-Ramanujan 型の恒等式とは Rogers-Ramanujan 恒等式のような形の、Pochhammer 記号を用いて表される無限和と無限積の間の同値性を表す恒等式の総称である。Lepowsky-Wilson による研究以来、アフィン・リー代数の標準加群から RR 型の恒等式及び整数の分割定理が得られるという期待がある。それに関連して、$A_{\mathrm{odd}}^{(2)}$ 型レベル 2 の場合に焦点を当て、標準加群の生成系の主ハイゼンベルグ部分代数に関する真空空間の Z-monomial を用いた表示について説明する。また、$A_9^{(2)}$ 型レベル 2 の場合の Kanade-Russell による分割の条件に沿う形の真空空間の基底の表示についても述べる。主結果は定理 4.1, 6.1 である。本稿の内容は [21] に準拠している。

1 Rogers-Ramanujan 型恒等式とアフィン・リー代数

Rogers-Ramanujan(以下 RR と略記する) 恒等式とは Pochhammer 記号を用いて以下のように表される恒等式のことである。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}.$$

ここで、$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$ に対して Pochhammer 記号は以下のように定義される。

$$(a;q)_n \coloneqq \prod_{i=0}^{n-1}(1-aq^i),\qquad (a_1,\dots,a_k;q)_n\coloneqq (a_1;q)_n\cdots(a_k;q)_n.$$

RR 恒等式は以下の RR 分割定理と同値であることが知られている。

定理 (RR 分割定理)**.**

1. 非負整数 n の分割で隣接するパートの差が 2 以上であるようなもの (つまり、n の分割で R_1 に含まれるもの) の個数は n の分割で $T_{1,4}^{(5)}$ に含まれるものの個数に等しい。
2. 非負整数 n の分割で隣接するパートの差が 2 以上であり最小のパートが 1 ではないようなもの (つまり、n の分割で R_2 に含まれるもの) の個数は n の分割で $T_{2,3}^{(5)}$ に含まれるものの個数に等しい。

* ito.k.bn@m.titech.ac.jp

ここで、整数の分割とは以下で定義する集合 Par の元のことである。

$$\mathrm{Par} \coloneqq \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) \in (\mathbb{Z}_{>0})^l \mid l \geq 0,\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l\}. \tag{1}$$

また、非負整数 n の分割とは $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) \in \mathrm{Par}$ で $|\lambda| \coloneqq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = n$ を満たすものである。$R_1, R_2, T^{(N)}_{p_1,\ldots,p_k} \subset \mathrm{Par}$ は以下のように定義される (ただし、$N \geq 2$, k は正整数であり、p_i $(1 \leq i \leq k)$ は非負整数)。

$$\begin{aligned} R_1 &\coloneqq \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathrm{Par} \mid \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2 \text{ for } 1 \leq i \leq l-1\}, \\ R_2 &\coloneqq \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in R_1 \mid \lambda_l \geq 2\}, \\ T^{(N)}_{p_1,\ldots,p_k} &\coloneqq \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathrm{Par} \mid \text{For each } 1 \leq i \leq l, 1 \leq \exists j \leq k \text{ s.t. } \lambda_i \equiv p_j \bmod N\}. \end{aligned} \tag{2}$$

RR 恒等式と RR 分割定理の同値性は母関数 $\sum_{\lambda \in R_1} q^{|\lambda|}$ 及び $\sum_{\lambda \in R_2} q^{|\lambda|}$ と RR 恒等式の無限和、そして母関数 $\sum_{\lambda \in T^{(5)}_{1,4}} q^{|\lambda|}$, 及び $\sum_{\lambda \in T^{(5)}_{2,3}} q^{|\lambda|}$ と RR 恒等式の無限積を比較することで初等的に確認できる。RR 恒等式に関する歴史や整数分割の詳細については [1], [17] 等を参照されたい。

Lepowsky-Wilson ([11], [12], [13]) は $A^{(1)}_1$ 型レベル 3 の標準加群 $L(2\Lambda_0 + \Lambda_1)$ 及び $L(3\Lambda_0)$ から RR 恒等式を再導出した。RR 恒等式の無限積はそれぞれの標準加群 L の主指標 (つまり主ハイゼンベルグ部分代数に関する真空空間 $\Omega(L)$ の、生成元 d に関する指標) を Lepowsky's numerator formula を用いて求めた結果と一致する。それに対し、無限和はそれぞれの標準加群の真空空間の基底を Z-作用素と呼ばれる頂点作用素の monomial を用いて構成することで導出される。Lepowsky-Wilson による研究以来、各アフィン・リー代数の標準加群を解析することで RR 型恒等式や整数の分割定理が得られるという期待がある。

それに関連して、$A^{(2)}_{\mathrm{odd}}$ 型レベル 2 の場合の真空空間の基底の Z-monomial を用いた表示について考察した。その結果について以下で述べる。

2 $\hat{\mathfrak{g}}(\nu)$ 及び $\tilde{\mathfrak{g}}(\nu)$ の principal realization

アフィン・リー代数の構成に関しては [13], [4] 等を元に principal realization を採用する (cf. [7, chapter 7-8])。

$s \geq 2$ を正整数として、Φ を A_{2s-1} 型のルート系、$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2s-1}\}$ を単純ルートの集合とする。$Q = \bigoplus_{i=1}^{2s-1} \mathbb{Z}\alpha_i$ をルート格子として、Q 上に非退化対称形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $1 \leq i, j \leq 2s-1$ に対して以下のように定める。

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 2 & (\text{if } \ i = j), \\ -1 & (\text{if } \ |i-j| = 1), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

そして、twisted Coxeter automorphism ν を $\nu = \sigma_1 \cdots \sigma_s \sigma$ により与える (cf. [4, §8.2])。ここで、σ は Dynkin diagram automorphism であり、$1 \leq i \leq s$ に対して σ_i は α_i に関する鏡映である。ν の位数は $m = 2(2s-1)$ である (cf. [4, Proposition 8.2(2)])。また、Φ は ν により s 個の軌道に分かれ、

$$\Phi' = \{\beta_i \mid 1 \leq i \leq s-1\} \cup \{\alpha_s\} \tag{3}$$

は完全代表系となる (ただし、$1 \leq i \leq s-1$ に対して $\beta_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i$)。

ω を 1 の原始 m 乗根とし、$\varepsilon : Q \times Q \to \mathbb{C}^\times$ を以下により定める ([4, p.21])。

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = \prod_{p=1}^{m-1} (1 - \omega^{-p})^{\langle \nu^p \alpha, \beta \rangle}.$$

また、$\mathfrak{a} = Q \otimes \mathbb{C}$ と定め、有限次元リー代数 $\mathfrak{g}$ を以下により定める ([4, p.21])。

$$\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{a} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{C} x_\alpha \right), \qquad [\alpha_i, x_\alpha] = \langle \alpha_i, \alpha \rangle x_\alpha, \qquad [x_\alpha, x_\beta] = \begin{cases} \varepsilon(-\alpha, \alpha)\alpha & (\text{if } \langle \alpha, \beta \rangle = -2), \\ \varepsilon(\alpha, \beta) x_{\alpha+\beta} & (\text{if } \langle \alpha, \beta \rangle = -1), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

ここで x_α は $\alpha \in \Phi$ で添字付けられた記号である。この $\mathfrak{g}$ は A_{2s-1} 型の有限次元単純リー代数と同型になる ([4, p.48])。さらに、$\langle \cdot, \cdot \rangle$ と ν を以下の式により Q から $\mathfrak{g}$ へと拡張する ([4, p.22])。

$$\langle \alpha_i, x_\beta \rangle = 0, \qquad \langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \varepsilon(\alpha, \beta) \delta_{\alpha+\beta, 0}, \qquad \nu x_\alpha = x_{\nu\alpha}.$$

無限次元リー代数 $\hat{\mathfrak{g}}(\nu)$ 及び $\tilde{\mathfrak{g}}(\nu)$ を以下により定める。

$$\hat{\mathfrak{g}}(\nu) \coloneqq (\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{(i)} \otimes t^i) \oplus \mathbb{C}c, \qquad \tilde{\mathfrak{g}}(\nu) \coloneqq \hat{\mathfrak{g}}(\nu) \oplus \mathbb{C}d,$$
$$[x \otimes t^i, y \otimes t^j] = [x, y] \otimes t^{i+j} + \frac{1}{m} i \delta_{i+j0} \langle x, y \rangle c, \qquad [c, \tilde{\mathfrak{g}}(\nu)] = \{0\}, \qquad [d, x \otimes t^i] = ix \otimes t^i.$$

$\hat{\mathfrak{g}}(\nu)$ 及び $\tilde{\mathfrak{g}}(\nu)$ は、それぞれ $A_{2s-1}^{(2)}$ 型のアフィン・リー代数及びアフィン・カッツ・ムーディ・リー代数と同型である (cf. [4, Proposition 9.4])。同型射の構成については [4, (9.1)] を参照されたい。$A_{2s-1}^{(2)}$ 型のシュヴァレー生成元の $\hat{\mathfrak{g}}(\nu)$ 上の像を $\{h_i, e_i, f_i \mid 0 \le i \le s\}$ とおき、$\mathfrak{t} = \mathrm{span}\{h_i, d \mid 0 \le i \le s\}$ とする。$0 \le i \le s$ に対して基本ウェイト $\Lambda_i \in \mathfrak{t}^*$ を $\Lambda_i(h_j) = \delta_{ij}$ と $\Lambda_i(d) = 0$ により定め、$\delta \in \mathfrak{t}^*$ を $\delta(h_j) = 0$ $(1 \le j \le s)$, $\delta(d) = 1$ により定める。

主ハイゼンベルグ部分代数 $\hat{\mathfrak{a}}(\nu) \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}(\nu)$ は以下のように定められる (cf. [4, p.5])。

$$\hat{\mathfrak{a}}(\nu) \coloneqq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_{(i)}) \otimes t^i \oplus \mathbb{C}c.$$

L を $\tilde{\mathfrak{g}}(\nu)$-標準加群として、$\Omega(L)$ で L の主ハイゼンベルグ部分代数に関する真空空間、つまり、$\hat{\mathfrak{a}}(\nu)$ の最高ウェイトベクトルの集合とする ([4, p.28])。

$$\Omega(L) = \{v \in L \mid \hat{\mathfrak{a}}_+(\nu) v = \{0\}\}.$$

この $\Omega(L)$ の Z-作用素を用いた生成系、基底の表示について以下で述べる。

3 Z-作用素と真空空間

Z-作用素を構成し、真空空間の Z-monomial を用いて表される生成系に関して説明する。

$p_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{(i)}$ を第 i 射影とする。$x \in \mathfrak{g}$ に対して $x_{(i)} \coloneqq p_i(x)$ と定める。

定義 3.1 ([13, pp.221-222]). L をレベル k の $\tilde{\mathfrak{g}}(\nu)$-標準加群とする。$\alpha \in \Phi$ に対して、$X(\alpha, \zeta), E^{\pm}(\alpha, \zeta, r), Z(\alpha, \zeta, r) \in (\mathrm{End}\ L)\{\zeta, \zeta^{-1}\}$ を以下のように定める。

$$X(\alpha, \zeta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((x_\alpha)_{(n)} \otimes t^n) \zeta^n, \qquad E^{\pm}(\alpha, \zeta) = \exp\left(\pm m \sum_{n \ge 1} (\alpha_{(\pm n)} \otimes t^{\pm n}) \zeta^{\pm n} / nk \right),$$
$$Z(\alpha, \zeta) = E^-(\alpha, \zeta) X(\alpha, \zeta) E^+(\alpha, \zeta).$$

さらに、$i \in \mathbb{Z}$ に対して $Z_i(\alpha)$ を $Z(\alpha, \zeta)$ における ζ^i の係数として定める。つまり、$Z(\alpha, \zeta) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Z_i(\alpha) \zeta^i$ である。

標準加群 L の真空空間 $\Omega(L)$ は以下のような Z-monomial で表される生成系を持つことが知られている (cf. [13, Theorem 7.1])。

$$\{Z_{i_1}(\gamma_1)\cdots Z_{i_l}(\gamma_l)v_L \mid l\geq 0,\ i_j\in\mathbb{Z},\ \gamma_j\in\Phi \text{ for } 1\leq j\leq l\}.$$

さらに $Z(\nu^p\alpha,\zeta)=Z(\alpha,\omega^p\zeta)$ が成り立つことから ([4, Proposition 7.2])、$\gamma_j\in\Phi$ の範囲を Φ' へと制限した

$$\{Z_{i_1}(\gamma_1)\cdots Z_{i_l}(\gamma_l)v_L \mid l\geq 0,\ i_j\in\mathbb{Z},\ \gamma_j\in\Phi' \text{ for } 1\leq j\leq l\}.$$

は $\Omega(L)$ の生成系になる (Φ' は (3) で定めた通り)。そして、 $l>0$ に対して Z^l 上の半順序 $\leq_T$ を次のように定める; $(i_1,\ldots,i_l),(j_1,\ldots,j_l)\in\mathbb{Z}^l$ とするとき、

$$(i_1,\ldots,i_l)\leq_T(j_1,\ldots,j_l)\Leftrightarrow i_{l'}+\cdots+i_l\leq j_{l'}+\cdots+j_l \text{ for } 1\leq l'\leq l.$$

このとき、degree を考えることで、$\Omega(L)$ の生成系における $(i_1,\ldots,i_l)$ の範囲を以下のように制限できる。

$$\{Z_{i_1}(\gamma_1)\cdots Z_{i_l}(\gamma_l)v_L \mid l\geq 0,\ i_j\in\mathbb{Z},\ (i_1,\ldots,i_l)\leq_T(0,\ldots,0),\ \gamma_j\in\Phi' \text{ for } 1\leq j\leq l\}.$$

ここからさらに、$i_j\in\mathbb{Z}$ と $\gamma_j\in\Phi'$ の範囲を絞って整数の分割に沿う形に改めていく。その上で主に、隣接する Z-作用素の交換関係を記述する次の定理を用いる。

定理 3.2 (Generalized commutation relation [13, Theorem 3.10])**.** L をレベル k の標準加群とする。また ζ_1,ζ_2 を可換な変数として、$\alpha,\beta\in\Phi$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\prod_{p\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(1-\omega^{-p}\zeta_1/\zeta_2)^{\langle\nu^p\alpha,\beta\rangle/k}Z(\alpha,\zeta_1)Z(\beta,\zeta_2)-\prod_{p\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(1-\omega^{-p}\zeta_2/\zeta_1)^{\langle\nu^p\beta,\alpha\rangle/k}Z(\beta,\zeta_2)Z(\alpha,\zeta_1)\\&=\frac{1}{m}\sum_{q\in C_{-1}(\alpha,\beta)}\varepsilon(\nu^q\alpha,\beta)Z(\nu^q\alpha+\beta,\zeta_2)\delta(\omega^{-q}\zeta_1/\zeta_2)+\frac{k}{m^2}\langle x_\alpha,x_{-\alpha}\rangle\sum_{q'\in C_{-2}(\alpha,\beta)}(D\delta)(\omega^{-q'}\zeta_1/\zeta_2).\end{aligned}\tag{4}$$

ただし、$i=-1,-2$ に対して $C_i=\{p\in\mathbb{Z}_m \mid \langle\nu^p\alpha,\beta\rangle=i\}$ であり、$\delta(\zeta)$, $(D\delta)(\zeta)$ は以下の通り。

$$\delta(\zeta)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\zeta^i,\qquad (D\delta)(\zeta)=\zeta\frac{d}{d\zeta}\delta(\zeta)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}i\zeta^i.$$

4 $A^{(2)}_{2s-1}$ 型レベル 2 の場合

$A^{(2)}_{2s-1}$ 型の場合、$L((\delta_{0n}+\delta_{1n})\Lambda_0+\Lambda_n)$ の主指標は以下のように表される。

$$\chi((\delta_{0n}+\delta_{1n})\Lambda_0+\Lambda_n)=\frac{(q^{2s+2};q^{2s+2})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\frac{[q^{2n};q^{2s+2}]_\infty}{[q^n;q^{2s+2}]_\infty}.\tag{5}$$

$0\leq n\leq s$ かつ $n\in\mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z}$ の場合には、対応する RR 型恒等式及び分割定理は $A^{(2)}_5$ 型と $A^{(2)}_7$ 型で見つかっており (cf. [8], [2])、$A^{(2)}_9$ 型で Kanade-Russell [9] により予想が立てられている。$A^{(2)}_9$ 型の場合の RR 型恒等式の予想はアフィン・リー代数を介さず Bringmann et al. [3], Rosengren [16] により証明された。そこで、$A^{(2)}_{\text{2s-1}}$ 型の場合に $0\leq n\leq s$ かつ $n\in\mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z}$ の範囲で $L((\delta_{0n}+\delta_{1n})\Lambda_0+\Lambda_n)=L(\delta_{1n}\Lambda_0+\Lambda_n)$ の真空空間の基底の表示について考察した。

定理 4.1 ([21])**.** $A^{(2)}_{2s-1}$ 型レベル 2 の標準加群 $L = L(\delta_{1i}\Lambda_0 + \Lambda_{2i-1} + (i-1)\delta)$ の最高ウェイトベクトルを v_L とする。このとき以下の集合は $\Omega(L)$ のベクトル空間としての生成系になる (ただし、$1 \le 2i-1 \le s$)。

$$\{Z_{i_1} \cdots Z_{i_l} v_L \mid l \ge 0,\ i_1, \ldots, i_l \in \mathbb{Z},\ i_1 \le \cdots \le i_l \le -1\}. \tag{6}$$

ここで、$n \in \mathbb{Z}$ に対して $Z_{2n}(\alpha_1) = Z_{2n},\ Z_{2n-1}(\alpha_s) = Z_{2n-1}$ である。

つまり、A_{2s-1} 型のディンキン図形の端のルートに偶数パートを、中心のルートに奇数パートをそれぞれ当てはめて Z-作用素を定めることで、真空空間 $\Omega(L)$ の生成系を Z-monomial を用いて整数の分割と対応する形で記述できることを意味する。以下でその証明について簡単に述べる。

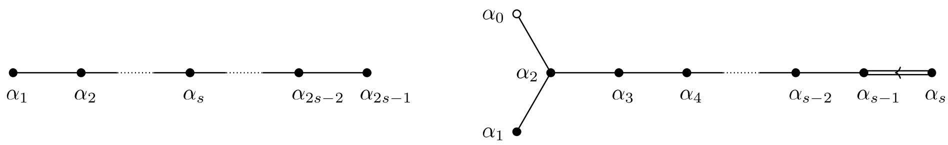

図 1: A_{2s-1} 型及び $A^{(2)}_{2s-1}$ 型のディンキン図形

$A^{(2)}_{2s-1}$ 型の場合、$1 \le 2i-1 \le s$ に対して $L(\delta_{1i}\Lambda_0 + \Lambda_{2i-1} + \frac{i-1}{2}\delta) \subseteq L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_1)$ が成り立つ。このことは結晶基底 $B(\Lambda_0) \otimes B(\Lambda_1)$ からウェイト $\delta_{1i}\Lambda_0 + \Lambda_{2i-1} + \frac{i-1}{2}\delta$ の極大元を見つけることで確かめられる。結晶基底に関しては [5], [6], [10] 等を参考にされたい。なお、$i \in \mathbb{Z}$, $1 \le j \le s-1$, $\beta_j = \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$ に対して $L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_1)$ 上で $Z_{2i+1}(\beta_j) = Z_{2i}(\alpha_s) = 0$ が成り立つ (cf. [8, §3])。$2 \le n \le s-1$, $v \in \Omega(L)$ に対して、$Z_{\mathrm{even}}(\beta_n)v$ は $Z_{\mathrm{even}}(\alpha_1)$ から成る monomial を用いて記述できるので、Z-作用素を $Z_{\mathrm{even}}(\alpha_1) = Z_{\mathrm{even}}$, $Z_{\mathrm{odd}}(\alpha_s) = Z_{\mathrm{odd}}$ により定める。

定義 4.2. $(i_1, \ldots, i_l) \in \mathbb{Z}^l$ $(l \ge 1)$, $n \ge 0$ 及び $v \in \Omega(L)$ に対して、$\tilde{T}(i_1, \ldots, i_l, v)$, $T(i_1, \ldots, i_l, v)$, $S(n, v)$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(i_1, \ldots, i_l, v) &= \{Z_{j_1} \cdots Z_{j_{l'}} v \mid l' < l, \text{ or } (l = l' \text{ and } (i_1, \ldots, i_l) <_T (j_1, \ldots, j_{l'}))\}, \\
T(i_1, \ldots, i_l, v) &= \mathrm{span}(\tilde{T}(i_1, \ldots, i_l, v)) \\
S(n, v) &= \{Z_{i_1} \cdots Z_{i_{l'}} v \mid l' \ge n,\ |\{i_j \in \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z} \mid 1 \le j \le l'\}| = n\}.
\end{aligned}$$

Lepowsky-Wilson [13] や Kanade [8] 等においては、分割の条件に沿わないような $(i_1, \ldots, i_l) \in \mathbb{Z}^l$ に対して $Z_{i_1} \cdots Z_{i_l} v \in T(i_1, \ldots, i_l, v)$ を示すことで、Z-monomial をまず長さによる順序、次に T による順序の順に整理し、分割の条件に沿うように生成系を基底へと狭めていった。しかし、この方法は $A^{(2)}_{\mathrm{odd}}$ 型一般には適用できない。実際 $A^{(2)}_{13}$ 型の場合で、隣接する奇数パート $Z_j Z_{j'}$ で $j > j'$ を満たすものに対して $Z_j Z_{j'} \in T(j, j')$ が成り立たない場合がある。そこで、Z-monomial の中の奇数パートの個数による順序を付け加え整理する。つまり Z-monomial たちをまず奇数の個数による順序、次に長さによる順序、そして T による順序の順に整理する。そのために導入したのが $S(n, v)$ である。定理 3.2 を用いることで $i, j \in \mathbb{Z}$ に対して $Z_i Z_j$ を以下の定理 4.3, 4.4, 4.5 のように整理することができる。

命題 4.3. $v \in \Omega(L)$ とする。$i > i'$ を満たす $i, i' \in 2\mathbb{Z}$ とに対して次が成り立つ。

$$Z_i(\alpha_1) Z_{i'}(\alpha_1) v \in \mathrm{span}(S(0, v) \cap \tilde{T}(i-1, i'+1, v)).$$

命題 4.4. $v \in \Omega(L)$ とする。$i > j$ を満たす $i \in 2\mathbb{Z}$ と $j \in \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ。

$$Z_i(\alpha_1) Z_j(\alpha_s) v \in \mathrm{span}\,(S(1, v) \cap \tilde{T}(i, j, v)).$$

同様に、$j > i$ を満たす $j \in \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z}$ と $i \in 2\mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ。

$$Z_j(\alpha_s)Z_i(\alpha_1)v \in \mathrm{span}\,(S(1,v) \cap \tilde{T}(j,i,v)).$$

命題 4.5. $v \in \Omega(L)$ とする。$j > j'$ を満たす $j, j' \in \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ。

$$Z_j(\alpha_s)Z_{j'}(\alpha_s)v \in \mathrm{span}((S(2,v) \cap \tilde{T}(j,j',v)) \cup S(0,v)).$$

$Z_{i_1}\cdots Z_{i_l}v \in S(n,v)$ とする。このとき $(i_1,\cdots,i_l)$ の中に $i_j > i_{j+1}$ を満たす $i_j, i_{j+1} \in \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z}$ が存在しない場合は、命題 4.3, 4.4 により、$Z_{i_1}\cdots Z_{i_l}v \in \mathrm{span}(S(n,v) \cap \tilde{T}(i_1,\cdots,i_l,v))$ が成り立つ。$i_j > i_{j+1}$ を満たす $i_j, i_{j+1} \in \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z}$ が存在する場合は、命題 4.5 より、$Z_{i_1}\cdots Z_{i_l}v \in \mathrm{span}((S(n,v) \cap \tilde{T}(i_1,\cdots,i_l,v)) \cup S(n-2,v))$ が成り立つ。これにより定理 4.1 が証明される。

注. 定理 4.1 における生成系 (6) は、実際には以下に置き換えられる。

$$\begin{aligned}\{Z_{i_1}\cdots Z_{i_l}v_L \mid\ & l \geq 0,\ i_1,\ldots,i_l \in \mathbb{Z},\ i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq -1,\\ & i_{n+1} - i_n \neq 1 \text{ for } 1 \leq n \leq l-1,\\ & i_{n+1}, i_n \in \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z} \Rightarrow i_{n+1} \neq i_n \text{ for } 1 \leq n \leq l-1\},\end{aligned}$$

つまり、以下の 2 つの分割の条件を加えられる。

1. 隣接する項の差は 1 ではない。
2. 同じ奇数は複数回現れない。

5　$A_5^{(2)}$ 型及び $A_7^{(2)}$ 型レベル 2 の場合

$A_5^{(2)}$ 型の場合には Göllnitz-Gordon(以下 GG と略) 恒等式と Göllnitz 分割定理が得られ、$A_7^{(2)}$ 型の場合には RR 恒等式と RR 分割定理が得られる。

定理 (Göllnitz 分割定理)**.**

1. G_1 に含まれる n の分割の個数は $T^{(8)}_{1,4,7}$ に含まれる n の分割の個数に等しい。
2. G_2 に含まれる n の分割の個数は $T^{(8)}_{3,4,5}$ に含まれる n の分割の個数に等しい。

ここで、n は非負整数で G_1, G_2 は以下のように定められる。Par は (1) で定めた通り整数分割の集合である。

$$\begin{aligned}G_1 = \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_l) \in \mathrm{Par} \mid\ & l \geq 0,\ \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2 \text{ for } 1 \leq i \leq l-1,\\ & \lambda_i, \lambda_{i+1} \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 4 \text{ for } 1 \leq i \leq l-1\},\\ G_2 = \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_l) \in G_1 \mid\ & \lambda_l \leq -3\}.\end{aligned}$$

$A_5^{(2)}$ 型及び $A_7^{(2)}$ 型の場合において定理 4.1 に沿うように、それぞれ Göllnitz 分割定理、RR 分割定理の分割定理に対応する形で真空空間の基底を構成した。定理 5.1, 5.2 の証明は Lepowsky-Wilson [13] や Kanade [8] 等の先行研究と同様に Z-monomial を定理 3.2 を用いて長さによる順序と T による順序で整理することで得られる。なお、それぞれ $\Omega(\Lambda_3)$ の場合の i_l の条件 ($A_5^{(2)}$ 型の場合は $i_l \leq -3$, $A_7^{(2)}$ 型の場合は $i_l \leq -2$) は主指標から従う。基底であることはそれぞれの恒等式 (GG 恒等式及び RR 恒等式) から直接従う。

定理 5.1 ([21]). $A_5^{(2)}$ 型の場合を考える。$n \in \mathbb{Z}$ に対して $Z_{2n-1} = Z_{2n-1}(\alpha_3)$, $Z_{2n} = Z_{2n}(\alpha_1)$ と定め、v_Λ を $L(\Lambda)$ の最高ウェイトベクトルとする。このとき $\Omega(L(\delta_{1i}\Lambda_0 + \Lambda_{2i-1}))$ は以下の集合を基底として有する $(i = 1, 2)$。

$$\{Z_{i_1} \cdots Z_{i_l} v_{\delta_{1i}\Lambda_0 + \Lambda_{2i-1}} \mid l \geq 0,\ (-i_1, \ldots, -i_l) \in G_i\}.$$

定理 5.2 ([21]). $A_7^{(2)}$ 型の場合を考える。$n \in \mathbb{Z}$ に対して $Z_{2n-1} = Z_{2n-1}(\alpha_4)$, $Z_{2n} = Z_{2n}(\alpha_1)$ と定め、v_Λ を $L(\Lambda)$ の最高ウェイトベクトルとする。このとき $\Omega(L(\delta_{1i}\Lambda_0 + \Lambda_{2i-1}))$ は以下の集合を基底として有する $(i = 1, 2)$。ただし、R_i は (2) で定めた通り。

$$\{Z_{i_1} \cdots Z_{i_l} v_{\delta_{1i}\Lambda_0 + \Lambda_{2i-1}} \mid l \geq 0,\ (-i_1, \ldots, -i_l) \in R_i\}.$$

$A_5^{(2)}$, $A_7^{(2)}$ 型の場合についてはそれぞれ Kanade [8], Bos-Misra [2] による先行研究があるが、定理 5.1 及び定理 5.2 は $Z_{\mathrm{even}}(\alpha_1)$ 及び $Z_{\mathrm{odd}}(\alpha_s)$ を Z-作用素として採ったという点で異なっている $(s = 3, 4)$。

6 $A_9^{(2)}$ 型レベル 2 の場合

Kanade-Russell [9, §3.1] は $A_9^{(2)}$ 型レベル 2 の場合に以下のような整数分割定理の予想を立てた。

1. K_1 に含まれる n の分割の個数は $T_{1,4,6,8,11}^{(12)}$ に含まれる n の分割の個数に等しい。
2. K_2 に含まれる n の分割の個数は $T_{2,3,4,8,9,10}^{(12)}$ に含まれる n の分割で 12 を法として 3 もしくは 9 と合同なパートは最大一度しか現れないものの個数に等しい。
3. K_3 に含まれる n の分割の個数は $T_{4,5,6,7,8}^{(12)}$ に含まれる n の分割の個数に等しい。

ただし、n は非負整数であり、$(K,)K_1, K_2$ and K_3 は以下のように定められる。Par は (1) で定めた通り整数分割の集合である。

$$\begin{aligned}
K = \{&(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathrm{Par} \mid l \geq 1,\ \lambda_i - \lambda_{i+1} \neq 1 \text{ for } 1 \leq i \leq l-1,\\
&\lambda_i \in \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z} \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_{i+1} \text{ for } 1 \leq i \leq l-1,\\
&\text{if } \lambda_{i+1} \in 2\mathbb{Z} \text{ appears more than once, then } \lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 4 \text{ for } 2 \leq i \leq l-2\ \ (*)\},\\
K_1 = \{&(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in K \mid (\lambda_{l-1}, \lambda_l) \neq (2, 2)\},\\
K_2 = \{&(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in K \mid \lambda_l \geq 2\},\\
K_3 = \{&(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in K \mid \lambda_l \geq 4\}.
\end{aligned}$$

$A_9^{(2)}$ 型の場合についても定理 4.1 に沿うように、Kanade-Russell による分割の条件に対応する形で真空空間の基底を構成した。定理 6.1 の証明も Z-monomial を長さによる順序と T による順序で整理することで得られる。

定理 6.1 ([21]). $A_9^{(2)}$ 型の場合を考える。$n \in \mathbb{Z}$ に対して $Z_{2n-1} = Z_{2n-1}(\alpha_5)$, $Z_{2n} = Z_{2n}(\alpha_1)$ と定め、v_Λ を $L(\Lambda)$ の最高ウェイトベクトルとする。このとき、$\Omega(L(\delta_{1i}\Lambda_0 + \Lambda_{2i-1}))$ は以下の集合を基底として有する $(i = 1, 2, 3)$。

$$\{Z_{i_1} \cdots Z_{i_l} v_\Lambda \mid l \geq 0,\ (-i_1, \ldots, -i_l) \in K_i\}.$$

定理 6.1 の証明の難点は集合 K の中の条件 $(*)$ であり、2 つ離れた項の関係性を記述する必要があった。この場合については、$Z_{\mathrm{even}}(\alpha_1 + \alpha_2) = Z_{\mathrm{even}}(\beta_2)$ を $Z_{\mathrm{even}}(\alpha_1)Z_{\mathrm{even}}(\alpha_1)$ を用いて書き直すことで解消した。

条件 $(*)$ を解決するためには $i \in 2\mathbb{Z}$ に対して以下の各条件を確認する必要がある。

$$\begin{aligned}&Z_iZ_iZ_i \in T(i,i,i), \qquad Z_iZ_iZ_{i+2} \in T(i,i,i+2), \qquad Z_{i-2}Z_iZ_i \in T(i-2,i,i),\\ &Z_iZ_iZ_{i+3} \in T(i,i,i+3), \qquad Z_{i-3}Z_iZ_i \in T(i-3,i,i).\end{aligned}$$

この中で例えば $Z_iZ_iZ_i \in T(i,i,i)$ については、定理 3.2 を用いてまず $d(i)Z_i(\alpha_1)Z_i(\alpha_1) - Z_{2i}(\beta_2) \in T(i,i)$ を示し ($d(i) \neq 0$ は i による定数)、$Z_i(\alpha_1)Z_{2i}(\beta_2) \in T(i,i,i)$ を示して証明した。なお、2 つ以上離れた項の関係性の記述については、[14] や [20] にも前例があるので参照されたい。

7 今後の展望

最後に簡単に、今後の展望について述べる。$A_{11}^{(2)}$ 型レベル 2 の場合、(5) から導出される主指標は $A_2^{(2)}$ 型レベル 4 の場合に導出される主指標と一致する。そして、$A_2^{(2)}$ 型レベル 4 の場合には Nandi [15, pp.3-4] が対応する分割 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ たちの条件を以下のように予想した。Nandi による分割定理の予想自体は Takigiku-Tsuchioka [18] により証明された。定理 4.1 に合わせて $A_{11}^{(2)}$ 型の場合でも $Z_{\mathrm{even}}(\alpha_1)$ と $Z_{\mathrm{odd}}(\alpha_6)$ を用いて、この Nandi による分割条件の予想に沿うように真空空間の基底の表示を得られるのではと考えている。

1. $\lambda_i - \lambda_{i+1} \neq 1$ for $1 \leq i \leq l-1$,
2. $\lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 3$ for $1 \leq i \leq l-2$,
3. $\lambda_i - \lambda_{i+2} = 3 \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ for $1 \leq i \leq l-2$,
4. $(\lambda_i - \lambda_{i+2} = 3$ and $\lambda_i \notin 2\mathbb{Z}) \Rightarrow \lambda_{i+1} \neq \lambda_{i+2}$ for $1 \leq i \leq l-2$,
5. $(\lambda_i - \lambda_{i+2} = 4$ and $\lambda_i \notin 2\mathbb{Z}) \Rightarrow (\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ and $\lambda_{i+1} \neq \lambda_{i+2})$ for $1 \leq i \leq l-2$,
6. $(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \ldots, \lambda_{l-1} - \lambda_l) \neq (3, 2^*, 3, 0)$. (ここで、$2^*$ は 2 の 0 個以上の列を表す。)

また、Takigiku-Tsuchioka [19] は $A_{13}^{(2)}$ の場合に対応する RR 型恒等式について予想を立てた。$A_{\mathrm{odd}}^{(2)}$ 型レベル 2 の場合でさらに大きい奇数に対して、対応のある RR 型恒等式や分割定理が得られることが期待される。

謝辞

2022 年度 RIMS 共同研究「組合せ論的表現論における最近の展開」において講演の機会をいただき、代表者の池田岳先生、並びに関係者の皆様に御礼申し上げます。なお、本研究は理化学研究所の JRA のプログラムによる支援を受けております。

参考文献

[1] G. E. Andrews: The theory of partitions. *Addison-Wesley, Reading.* (1976)

[2] M. K. Bos, K. C. Misra: Level two representations of $A_7^{(2)}$ and Rogers-Ramanujan identities. *Comm. Algebra.* 22(10), 3965-3983 (1994)

[3] K. Bringmann, C. Jennings-Shaffer, K. Mahlburg: Proofs and reductions of various conjectured partition identities of Kanade and Russell. *Jour. Reine Angew. Math.* vol.2020, no.766, pp.109-135 (2020)

[4] L. Figueiredo: Calculus of principally twisted vertex operators. *Mem. Amer. Math. Soc.* 371 (1987)

[5] J. Hong, S. J. Kang: *Introduction to quantum groups and crystal bases*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 42, American Mathematical Society, Providence, RI (2002)

[6] J. C. Jantzen: *Lectures on quantum groups*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI (1996)

[7] V. Kac: Infinite-Dimensional Lie Algebras. *Cambridge University Press* (1990)

[8] S. Kanade: Structure of certain level 2 standard modules for $A_5^{(2)}$ and the Göllnitz-Gordon identities. *Ramanujan J.* 45, 873-893 (2018)

[9] S. Kanade and M. C. Russell: Staircases to analystic sum-sides for many new integer partition identities of Rogers-Ramanujan type. *Electron. J. Combin.* 26, no 1, Paper1.6, 33pp (2019)

[10] M. Kashiwara: *Bases cristallines des groupes quantiques*, Edited by Charles Cochet, Cours Spécialisés 9, Société Mathématique de France (2002)

[11] J. Lepowsky, R. L. Wilson: Construction of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. *Comm. Math. Phys.* 62, 43-53 (1978)

[12] J. Lepowsky, R. L. Wilson: A Lie Theoretic interpretation and proof of the Rogers-Ramanujan identities. *Adv. Math.* 45, 21-72 (1982)

[13] J. Lepowsky, R. L. Wilson: The structure of standard modules, I: Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities. *Invent. Math.* 77, 199-290 (1984)

[14] J. Lepowsky, R. L. Wilson: The structure of standard modules, II: The case $A_1^{(1)}$, principal gradation *Invent. Math.* 79, 417-442 (1985)

[15] D. Nandi: Partition identities arising from the standard $A_2^{(2)}$-modules of level 4. *Ph.D. Thesis* (Rutgers University) (2014)

[16] H. Rosengren: Proofs of some partition identities conjectured by Kanade and Russell. *Ramanujan J.* (2021)

[17] A. V. Sills: An Invitation to the Rogers Ramanujan Identities, *CRS Press* (2018)

[18] M. Takigiku, S. Tsuchioka: A proof of conjectured partition identities of Nandi, *Amer. J. Math.* to appear

[19] M. Takigiku, S. Tsuchioka: Andrews-Gordon type series for the level 5 and 7 standard modules of the affine Lie algebra $A_2^{(2)}$. *Proc. Amer. Math. Soc.* 149, 2763-2776 (2021)

[20] M. Tamba: Level two standard $D_{l+1}^{(2)}$-modules. *J. Algebra* 166, no. 3, 651-666 (1994)

[21] K. Ito: Level 2 standard modules for $A_9^{(2)}$ and partition conditions of Kanade-Russell, arXiv:2211.03652 [math.RT]