

Poset structure concerning cylindric diagrams

岡山大学大学院教育学研究科 仲田 研登

Kento Nakada,

Graduate School of Education, Okayama University

岡山大学大学院自然科学研究科 鈴木 武史

Takeshi Suzuki,

Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

豊澤 由貴

Yoshitaka Toyosawa

1 導入

無限個のセルからなる Young 図であって、あるベクトルによる平行移動で不変なものを周期的 Young 図といい、その円筒上への射影の像を巡回的 Young 図 (cylindric Young diagram) という。

Young に関する組合せ論と対称群の通常表現の関係はよく知られているが、巡回的 Young 図は対称群の特別なクラスのモジュラー表現と関係する ([1])。また、skew Young 図と退化アフィン Hecke 代数についても同様の対応が知られている ([7])。

組合せ論的には、巡回的 Young 図は Strayer ([10, 11]) や Proctor が提唱する無限 (局所有限) d -complete poset と呼ばれるクラスに属している。有限 d -complete poset については Proctor ([4, 5]) や Stembridge ([8, 9]) 等により、その構造が付随するルート系や Weyl 群を用いて研究されている。本稿では、巡回的 Young 図に対して、これらの結果を拡張することを目指す。我々のアプローチにおいて基本的な道具となるのが色付きフック長である。セル x に対して、色付きフック長 $\mathbf{h}(x)$ は x のフックとそのコンテンツから定まる正ルートとして定義され、写像 \mathbf{h} は巡回的 Young 図から正ルートの集合への埋め込みとなっている。我々はこの像及びその半順序構造を $A^{(1)}$ 型のルート系および Weyl 群を用いて記述する。

本稿の構成は以下のとおりである。2 節では、古典的な Young 図の半順序構造の色付きフック長を用いた記述について概観する。3 節で巡回的 Young 図及び巡回的 skew Young 図を定義する。4 節で巡回的 Young 図 λ の色付きフック長 \mathbf{h} を導入し、像 $\mathbf{h}(\lambda)$ を決定す

る. さらに, 5 節でその半順序構造の記述を与える. 6 節では, 巡回的 Young 図に対する上記の結果が 2 節で述べた古典的結果を復元することを見る. 7 節では, 与えられた巡回的 Young 図 λ に対し, λ に含まれる巡回的 skew Young 図 (順序フィルター) 全体の集合について, その半順序構造を Weyl 群の言葉で記述する.

本稿中で省略した証明の詳細等に関してはプレプリント [3] を参照されたい.

2 古典的な Young 図の半順序構造

\mathbb{Z}^2 の 2 点 $(a, b), (a', b')$ に対して, 整数として $a \geq a'$ かつ $b \geq b'$ を満たすとき, $(a, b) \leq (a', b')$ と書く. 関係 \leq は \mathbb{Z}^2 上の半順序を定める.

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ を分割とする. 分割 λ の (古典的な) Young 図

$$\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq a \leq m, 1 \leq b \leq \lambda_a\}$$

を同じ記号 λ で表すことにする. Young 図 λ も上の半順序 \leq により半順序集合とみなす.

$N = \lambda_1 + m - 1$ と置き, 以下の記号および用語を準備する:

- 写像 $\mathbf{c} : \lambda \rightarrow [1, N]$ を $\mathbf{c}(a, b) = b - a + m$ で定める. これを (a, b) のコンテンツ (**content**), または色 (**color**) という.
- λ の部分集合 $\Gamma := \{\min \mathbf{c}^{-1}(i) \mid i \in \mathbf{c}(\lambda)\}$ をボトム集合 (**bottom set**) という. $N = |\Gamma|$ である. 例 2.2 で見るように, Γ を A_N 型の Dynkin 図の頂点集合とみなし, 以下, \bar{R} 及び $\bar{W} (= \mathfrak{S}_{N+1})$ をそれぞれ A_N 型のルート系及び Weyl 群とする.
- $x \in \lambda$ に対して, x のフック $H(x)$ とコフック $CoH(x)$ を

$$\begin{aligned} H(x) &= \{x\} \cup \{x + (k, 0) \in \lambda \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \cup \{x + (0, k) \in \lambda \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}, \\ CoH(x) &= \{x\} \cup \{x + (k, 0) \in \lambda \mid k \in \mathbb{Z}_{\leq -1}\} \cup \{x + (0, k) \in \lambda \mid k \in \mathbb{Z}_{\leq -1}\} \end{aligned}$$

で定め, また x の色付きフック長 (**colored hook length**) $\mathbf{h}(x)$ と色付きコフック長 (**colored cohook length**) $\mathbf{coh}(x)$ をそれぞれ

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{x \in H(x)} \alpha_{\mathbf{c}(x)}, \quad \mathbf{coh}(x) = \sum_{x \in CoH(x)} \alpha_{\mathbf{c}(x)}$$

で定義する. $\mathbf{h}(x)$ と $\mathbf{coh}(x)$ は正ルートである.

- Grassmann 置換 $w_\lambda \in \bar{W}$ を, 右の列から順に下から上にコンテンツを並べたワード i_1, i_2, \dots, i_n に対して, $w_\lambda := s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_n}$ で定める. (例 2.2 参照.)

注意 2.1. 色付きフック長は Nakada [2] や Proctor [6] によって多変数版のフック長として導入されている.

例 2.2. $\lambda = (4, 4, 3)$ とすると, 各マス目に対応するコンテンツは図 1 (1) のようになる. この Young 図に付随する Dynkin 図は A_6 型である. λ のマス目 $(2, 2)$ のフック $H(2, 2)$ 及びコフック $CoH(2, 2)$ は図 1 (3) 及び (4) のようになり, 色付きフック長, 及びコフック長はそれぞれ

$$\mathbf{h}(2, 2) = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \quad \mathbf{coh}(2, 2) = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

である. また, $w_\lambda = s_5 s_6 \cdot s_3 s_4 s_5 \cdot s_2 s_3 s_4 \cdot s_1 s_2 s_3 \in \mathfrak{S}_7$ である.

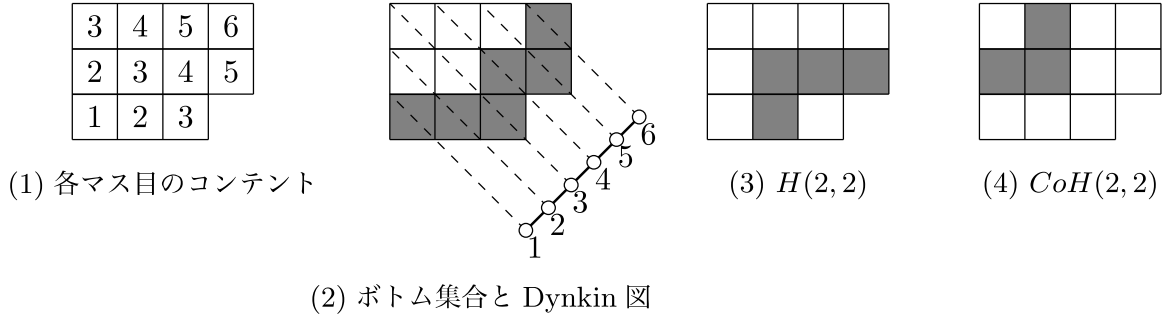


図 1

ここで, Young 図 λ の半順序構造について考える. $w \in \bar{W}$ に対して, $\bar{R}(w) := \bar{R}_+ \cap w^{-1}\bar{R}_-$ と定め, これを w の転倒集合 (**inversion set**) という. 対応 $x \mapsto \mathbf{h}(x)$ 及び $x \mapsto \mathbf{coh}(x)$ はそれぞれ λ から $\bar{R}(w_\lambda)$ 及び $\bar{R}(w_\lambda^{-1})$ への全単射を与えることが示される.

\bar{R} 上標準的順序 (ordinary order) $<^{or}$ を,

$$\alpha <^{or} \beta \iff \beta - \alpha \text{ が単純ルートの和で書ける}$$

により定義し, 転倒集合 $\bar{R}(w)$ を \leq^{or} により半順序集合とみなす.

定理 2.3. 写像 $\mathbf{coh} : \lambda \rightarrow \bar{R}(w_\lambda^{-1})$ は順序反同型を与える. すなわち, $x, y \in \lambda$ に対して,

$$x < y \iff \mathbf{coh}(y) <^{or} \mathbf{coh}(x)$$

が成り立つ.

注意 2.4. この定理は一般の (有限の) d -complete poset に対して Stembridge により得られている [9, Theorem 5.5].

例 2.5. $\lambda = (3, 2)$ として, \mathbf{h} および \mathbf{coh} の対応を図示したものが図 2 である. $\bar{R}(w_\lambda^{-1})$ の Hasse 図を見ると, 辺で結ばれている 2 元の差は単純ルートになっていることがわかる. (一方で, \mathbf{h} の対応については一般にはそうはなっていない.)

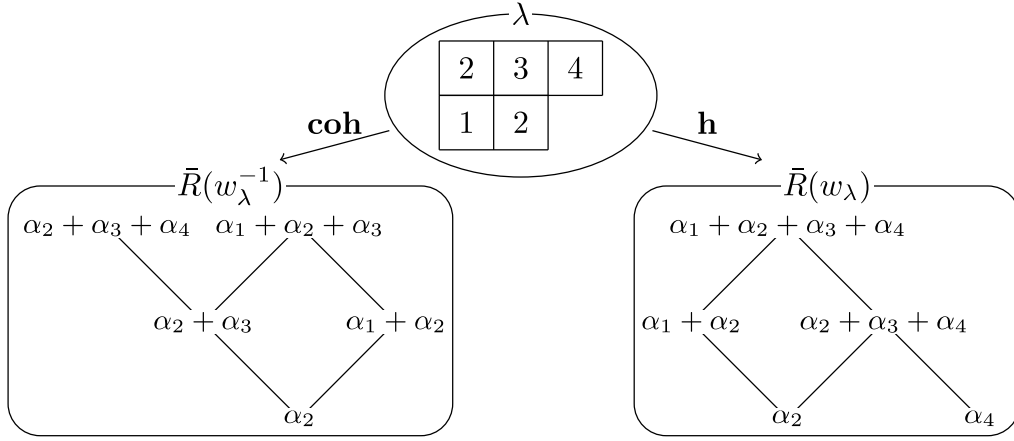


図2 $\lambda = (3, 2)$ の Young 図における半順序構造

3 巡回的 Young 図

$m, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する.

定義 3.1. (1) 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ であつて,

$$\lambda_1 - \lambda_m \leq \ell$$

を満たすものの全体を $\mathcal{P}_{m, \ell}$ で表す.

(2) $\lambda \in \mathcal{P}_{m, \ell}$ に対して,

$$\begin{aligned} \lambda &= \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq a \leq m, b \leq \lambda_a\}, \\ \dot{\lambda} &= \pi(\lambda) \end{aligned}$$

で定める. ただし, π は \mathbb{Z}^2 から円筒 $\mathcal{C}_{m, \ell} := \mathbb{Z}^2 / (m, -\ell)\mathbb{Z}$ への自然な射影とする. $\dot{\lambda}$ を巡回的 Young 図 (cylindric Young diagram) という.

(3) $\lambda \supset \mu$ となる $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{m, \ell}$ に対して,

$$\dot{\lambda} / \dot{\mu} = \dot{\lambda} \setminus \dot{\mu}, \quad \lambda / \mu = \lambda \setminus \mu$$

で定める. $\dot{\lambda} / \dot{\mu}$ を巡回的 skew Young 図という.

注意 3.2. 本稿で巡回的 Young 図を描くときは, 図3のように \mathbb{Z}^2 の上に描くが, 定義により, $(m, -\ell)$ を平行移動したマス目を同一視しているので, $(1, b)$ と $(m, b - \ell)$ ($b \in \mathbb{Z}$) は隣接していることに注意する.

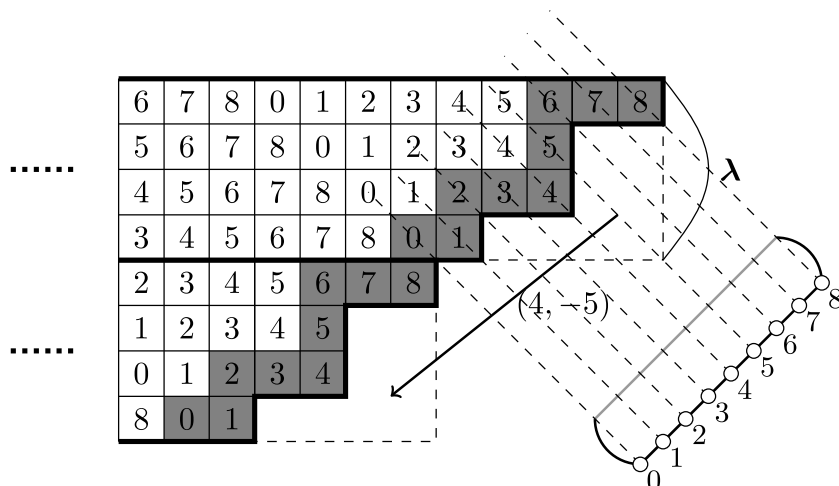


図3 $\lambda = (5, 3, 3, 1) \in \mathcal{P}_{4,5}$ に対応する巡回的 Young 図とその上のコンテンツ及びボトム集合.

条件 $m, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ のもとで, 円筒 $\mathcal{C}_{m,\ell}$ 上の半順序 \leq が \mathbb{Z}^2 上の半順序から自然に誘導される. すなわち, $x, y \in \mathcal{C}_{m,\ell}$ に対して, $x \leq y$ とは,

$$\text{ある } \tilde{x} \in \pi^{-1}(x), \tilde{y} \in \pi^{-1}(y) \text{ であって, } \mathbb{Z}^2 \text{ で } \tilde{x} \leq \tilde{y} \text{ となるものが存在する}$$

ことを意味する.

注意 3.3. 任意の巡回的 Young 図 $\dot{\lambda}$ は円筒 $\mathcal{C}_{m,\ell}$ の順序フィルターである. また, $\dot{\mu} \subset \dot{\lambda}$ なる巡回的 Young 図 $\dot{\mu}$ は $\dot{\lambda}$ の順序フィルターであり, 巡回的 skew Young 図 $\dot{\lambda}/\dot{\mu}$ は $\dot{\lambda}$ の順序イデアルである.

古典的な Young 図と同様に巡回的 Young 図についてもコンテンツやボトム集合が定義できる.

定義 3.4. $\dot{\lambda}$ を $\mathcal{C}_{m,\ell}$ の巡回的 Young 図とする.

- (1) 写像 $\mathbf{c} : \dot{\lambda} \rightarrow \mathbb{Z}/(m+\ell)\mathbb{Z}$ を $\mathbf{c}(\pi(a, b)) = b - a + m \pmod{m+\ell}$ で定める. $\mathbf{c}(\pi(a, b))$ を $\pi(a, b) \in \dot{\lambda}$ のコンテンツ (**content**) という.
- (2) $\dot{\lambda}$ の部分集合 $\Gamma := \{\min \mathbf{c}^{-1}(i) \mid i \in \mathbb{Z}/(m+\ell)\mathbb{Z}\}$ をボトム集合 (**bottom set**) という. (例は図3を見ていただきたい.)

4 巡回的 Young 図上の色付きフック長と転倒集合

$m, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定し, $\kappa = m + \ell$ と置く. $\mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}$ を $\{0, 1, \dots, \kappa - 1\}$ と同一視する.

$\dot{\lambda}$ のボトム集合 Γ は $A_{m+\ell-1}^{(1)}$ 型の Dynkin 図とみなすことができる.

\mathfrak{h} を $\hat{\mathfrak{sl}}_{\kappa}(\mathbb{C})$ の Cartan 部分代数とし, \mathfrak{h}^* をその双対空間とする. ここで, $A_{m+\ell-1}^{(1)}$ 型の

ルート系に関する記号を次のように準備する：

- $R = R^{\text{re}} \subset \mathfrak{h}^* : A_{m+\ell-1}^{(1)}$ 型のルート系.
- $R^\vee \subset \mathfrak{h} : A_{m+\ell-1}^{(1)}$ 型のコルート系.
- $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa-1}\} : \text{単純ルート系}.$
- $\Pi^\vee = \{\alpha_0^\vee, \alpha_1^\vee, \dots, \alpha_{\kappa-1}^\vee\} : \text{単純コルート系}.$
- $\delta := \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{\kappa-1} \in \mathfrak{h}^* : \text{ヌルルート}.$
- $\varpi_0, \varpi_1, \dots, \varpi_{\kappa-1} \in \mathfrak{h}^* : \text{基本ウェイト}.$ すなわち, $\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$ を満たす.
- $W = \langle s_0, s_1, \dots, s_{\kappa-1} \rangle : A_{m+\ell-1}^{(1)}$ 型の Weyl 群. ここで, $s_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ は $s_i(\zeta) = \zeta - \langle \zeta, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$ で定まる単純鏡映. ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{Z}$ は自然なペアリングとする.

次はよく知られている：

命題 4.1. 群 W は次の基本関係式を持つ：

$$s_i^2 = 1, \quad (4.1)$$

$$s_i s_j = s_j s_i \quad (i - j \not\equiv 0, \pm 1 \pmod{\kappa}), \quad (4.2)$$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}. \quad (4.3)$$

巡回的 Young 図 $\overset{\circ}{\lambda}$ における色付きフック長を次のように考える.

定義 4.2. $x \in \overset{\circ}{\lambda}$ に対して, $\overset{\circ}{\lambda}$ の部分集合 $\text{Arm}(x)$ と $\text{Leg}(x)$ を

$$\text{Arm}(x) = \{x + (k, 0) \in \overset{\circ}{\lambda} \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\},$$

$$\text{Leg}(x) = \{x + (0, k) \in \overset{\circ}{\lambda} \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$$

で定め, x の色付きフック長 (colored hook length) $\mathbf{h}(x)$ を

$$\mathbf{h}(x) = \alpha_{\mathbf{c}(x)} + \sum_{y \in \text{Arm}(x)} \alpha_{\mathbf{c}(y)} + \sum_{y \in \text{Leg}(x)} \alpha_{\mathbf{c}(y)}$$

で定義する.

例 4.3. $m = 4, \ell = 5$ とし, $\lambda = (5, 3, 3, 1)$ とする. $x = \pi(2, -4)$ とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x) &= \alpha_7 + (\alpha_8 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + (\alpha_6 + \alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) \\ &= \delta + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \end{aligned}$$

となる. (図 4 を参照のこと)

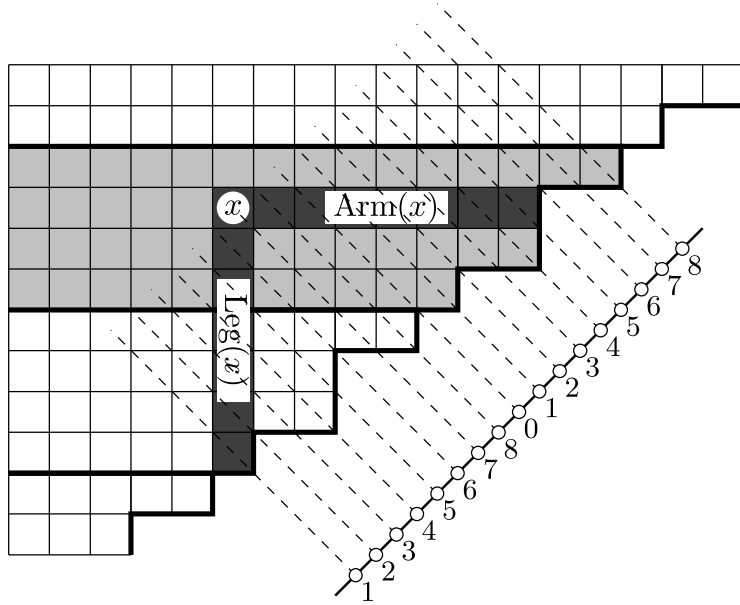


図4 $m = 4$, $\ell = 5$ とし, $\lambda = (5, 3, 3, 1)$ とするときの $x = \pi(2, -4)$ におけるフック.

注意 4.4. (1) $\text{Arm}(x)$ と $\text{Leg}(x)$ が交わることがあるので, 2 節で導入した古典的な Young 図のフック $H(x)$ の意味では多重集合を考えている. すなわち, 巡回的 Young 図における色付きフック長は重複も含めた“長さ”になっている.

(2) 巡回的 skew Young 図上の標準盤の個数についてのフック公式の予想が [12, 13] で提示されている. ただし, x のフック長は $|H(x)| = |\text{Arm}(x)| + |\text{Leg}(x)| + 1$ で与えられている.

注意 4.5. 図 4 を見れば判るように, 2 節で導入したようなコフック $\text{CoH}(x)$ を巡回的 Young 図で考えると, 上や左に無限に伸び, またその色付きコフック長 $\text{coh}(x)$ は単純ルートの無限和になってしまう.

先に述べたように, 古典的 Young 図 λ において, 各マス目の色付きフック長は λ に対応する Grassmann 置換の転倒集合 $\bar{R}(w_\lambda)$ の元であった. 巡回的 Young 図の意味での色付きフック長がどのような集合として記述できるのかをこの節の残り述べる.

定義 4.6. (1) 巡回的 Young 図 $\dot{\lambda}$ に対して, $\dot{\lambda}$ の標準盤 (standard tableau) (または線型拡張 (linear extension)) とは, 全単射 $t: \dot{\lambda} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}$ であって, $x < y \implies t(x) < t(y)$ を満たすものをいう. $\dot{\lambda}$ の標準盤全体を $\text{ST}(\dot{\lambda})$ と書く.

(2) 巡回的 skew Young 図 $\dot{\lambda}/\dot{\mu}$ ($|\dot{\lambda}/\dot{\mu}| = n$) に対して, $\dot{\lambda}/\dot{\mu}$ の標準盤 (standard tableau) とは, 全単射 $t: \dot{\lambda}/\dot{\mu} \rightarrow [1, n]$ であって, $x < y \implies t(x) < t(y)$ を満たすものをいう. $\dot{\lambda}/\dot{\mu}$ の標準盤全体を $\text{ST}(\dot{\lambda}/\dot{\mu})$ と書く.

$x \in \dot{\lambda}$ に対して, 簡単のため次の記法を用いる:

$$\alpha(x) := \alpha_{\mathbf{c}(x)}, \quad s(x) := s_{\mathbf{c}(x)}$$

定義 4.7. $\mathbf{t} \in \text{ST}(\dot{\lambda})$ とする. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $w_{\dot{\lambda}, \mathbf{t}}[n] \in W$ を

$$w_{\dot{\lambda}, \mathbf{t}}[n] := s(\mathbf{t}^{-1}(1))s(\mathbf{t}^{-1}(2)) \cdots s(\mathbf{t}^{-1}(n))$$

で定める. また, $w_{\dot{\lambda}, \mathbf{t}}[0] := e$ とする.

$w \in W$ に対して, 転倒集合は $R(w) := R_+ \cap w^{-1}R_-$ であった. すると, 次のことが示せる.

命題 4.8. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して,

$$R(w_{\dot{\lambda}, \mathbf{t}}[n]) = \{\mathbf{h}(x) \mid x \in \mathbf{t}^{-1}([1, n])\}$$

が成り立つ.

定義 4.9. 巡回的 skew Young 図 $\dot{\lambda}/\dot{\mu}$ に対して, $\dot{\lambda}/\dot{\mu} = \mathbf{t}^{-1}[1, n]$ となる $\mathbf{t} \in \text{ST}(\dot{\lambda})$ を取って,

$$w_{\dot{\lambda}/\dot{\mu}} := w_{\dot{\lambda}, \mathbf{t}}[n]$$

と定める.

次に, $R(w_{\dot{\lambda}}) \subset R_+$ を

$$R(w_{\dot{\lambda}}) := \bigcup_{n \geq 1} R(w_{\dot{\lambda}, \mathbf{t}}[n])$$

で定める. 命題 4.8 より,

$$R(w_{\dot{\lambda}}) = \{\mathbf{h}(x) \mid x \in \dot{\lambda}\}$$

と書ける. 特に, $R(w_{\dot{\lambda}})$ は \mathbf{t} に依らない. そして, 次のことがいえる.

定理 4.10. 対応 $x \mapsto \mathbf{h}(x)$ は全単射 $\mathbf{h} : \dot{\lambda} \rightarrow R(w_{\dot{\lambda}})$ を与える.

注意 4.11. 一般に, $w \in W$ に対して, $R(w)$ は w の簡約表示 $s_{i_1}s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ に対して,

$$R(w) = \{\alpha_{i_1}, s_{i_1}\alpha_{i_2}, \dots, s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}\alpha_{i_r}\} = \{s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}\alpha_{i_k} \mid k \in [1, r]\}$$

と書ける. このことから, $R(w_{\dot{\lambda}})$ は, 半無限ワード (これは, もはや W の元ではない)

$$w_{\dot{\lambda}} = w_{\dot{\lambda}, \mathbf{t}} = s(\mathbf{t}^{-1}(1))s(\mathbf{t}^{-1}(2))s(\mathbf{t}^{-1}(3)) \cdots$$

の“転倒集合” と思うことができる.

ここで, $R(w_{\dot{\lambda}})$ のもう一つの表示を述べる. $\dot{\lambda}$ のボトム集合 Γ で, 極大なものの全体を Γ_{\max} , 極小なもの全体を Γ_{\min} で表すことにする. また, $b_i := \min \mathbf{c}^{-1}(i) \in \Gamma$ ($i \in [0, \kappa - 1]$) と置く.

定義 4.12. $\zeta_{\dot{\lambda}} \in \mathfrak{h}^*$ を,

$$\zeta_{\dot{\lambda}} = \sum_{i=0}^{\kappa-1} a_i \varpi_i$$

で定める. ただし,

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{if } b_i \in \Gamma_{\max} \\ -1 & \text{if } b_i \in \Gamma_{\min} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする.

この整ウエイト $\zeta_{\dot{\lambda}}$ は前支配的 (pre-dominant) である. すなわち,

$$\langle \zeta_{\dot{\lambda}}, \alpha^\vee \rangle \geq -1 \quad \forall \alpha^\vee \in R_+^\vee$$

を満たす.

命題 4.13. $R(w_{\dot{\lambda}})$ は

$$R(w_{\dot{\lambda}}) = \{\alpha \in R_+ \mid \langle \zeta_{\dot{\lambda}}, \alpha^\vee \rangle = -1\}$$

と書ける. 特に, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $w_{\dot{\lambda}, t}[n]$ は $\zeta_{\dot{\lambda}}$ -“pluscule” である. すなわち,

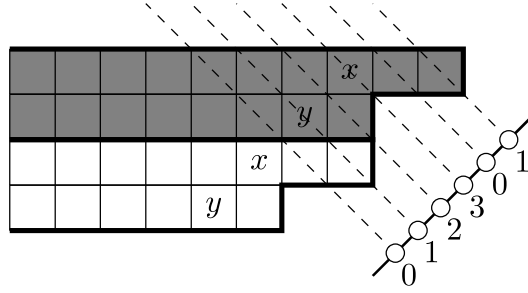
$$\langle \zeta_{\dot{\lambda}}, s(t^{-1}(1))s(t^{-1}(2)) \cdots s(t^{-1}(k-1))\alpha^\vee(t^{-1}(k)) \rangle = -1 \quad \forall k \in [1, n]$$

が成り立つ. また, $w_{\dot{\lambda}, t}[n]$ は fully commutative である. すなわち, $w_{\dot{\lambda}, t}[n]$ の任意の簡約表示は命題 4.1 (4.2) の形の関係式のみで移り合う.

5 巡回的 Young 図の半順序構造

巡回的 Young 図 $\dot{\lambda}$ に半順序構造を導入し, 写像 \mathbf{h} が $\dot{\lambda}$ から $R(w_{\dot{\lambda}})$ への全単射を与えることを見てきた. 次の例で見られるように, $R(w_{\dot{\lambda}})$ の標準的順序 \leq^{or} における半順序構造は $\dot{\lambda}$ と順序同型でないことに注意する:

例 5.1. $\lambda = (4, 2)$, $m = 2$, $\ell = 2$ とする. $x = \pi(1, 2)$, $y = \pi(2, 1) \in \dot{\lambda}$ とすると, x, y は比較不可能である. 一方, $\mathbf{h}(x) = \delta + \alpha_1$, $\mathbf{h}(y) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ なので, これは $\mathbf{h}(y) <^{\text{or}} \mathbf{h}(x)$ である.



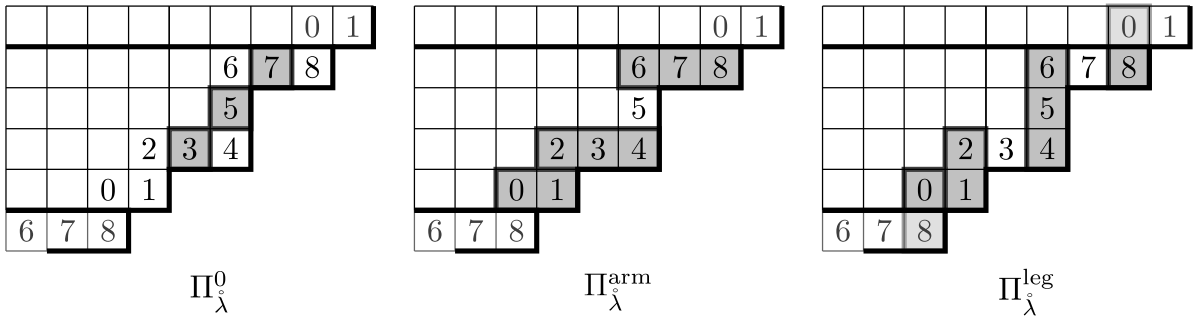
我々は $(\dot{\lambda}, \leq) \cong (R(w_{\dot{\lambda}}), \trianglelefteq)$ となるような新しい半順序 \leq を導入する.

定義 5.2. R_+ の部分集合 $\Pi_{\dot{\lambda}}^0$, $\Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{arm}}$, $\Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{leg}}$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \Pi_{\dot{\lambda}}^0 &= \{\alpha(x) \mid x \in \Gamma \setminus (\Gamma_{\max} \sqcup \Gamma_{\min})\}, \\ \Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{arm}} &= \left\{ \alpha(x) + \sum_{y \in \text{Arm}(x)} \alpha(y) \mid x \in \Gamma_{\max} \right\}, \\ \Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{leg}} &= \left\{ \alpha(x) + \sum_{y \in \text{Leg}(x)} \alpha(y) \mid x \in \Gamma_{\max} \right\}. \end{aligned}$$

例 5.3. $\ell = 5$, $m = 4$, $\lambda = (5, 3, 3, 1)$ のとき, 対応する $\Pi_{\dot{\lambda}}^0$, $\Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{arm}}$, $\Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{leg}}$ は次のようになる:

$$\begin{aligned} \Pi_{\dot{\lambda}}^0 &= \{\alpha_3, \alpha_5, \alpha_7\}, \\ \Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{arm}} &= \{\alpha_0 + \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8\}, \\ \Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{leg}} &= \{\alpha_0 + \alpha_8, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6\}. \end{aligned}$$



定義 5.4. $\alpha, \beta \in R(w_{\dot{\lambda}})$ に対して,

$$\beta - \alpha \text{ が } \Pi_{\dot{\lambda}} := \Pi_{\dot{\lambda}}^0 \sqcup \Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{arm}} \sqcup \Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{leg}} \text{ の元の和で書ける}$$

とき, $\alpha \triangleleft \beta$ と書く.

定理 5.5. 写像

$$\mathbf{h} : (\dot{\lambda}, \leq) \rightarrow (R(w_{\dot{\lambda}}), \trianglelefteq)$$

は順序同型である.

これにより, 巡回的 skew Young 図 $\dot{\lambda}/\dot{\mu}$ に関して, 次が得られる:

系 5.6. 写像 $\mathbf{h} : (\dot{\lambda}/\dot{\mu}, \leq) \rightarrow (R(w_{\dot{\lambda}/\dot{\mu}}), \trianglelefteq)$ は順序同型である.

命題 5.7. $R(w_{\dot{\lambda}})$ (及び $R(w_{\dot{\lambda}/\dot{\mu}})$) 上の半順序 \trianglelefteq は以下で定める半順序 $\trianglelefteq^{\text{tc}}$ 及び \leq^{hp} と一致する:

定義 5.8. $R(w_{\dot{\lambda}})$ 上の半順序 $\trianglelefteq^{\text{tc}}$ を関係

$$\alpha \triangleleft^{\text{tc}} \beta \text{ whenever } \beta - \alpha \in \Pi_{\dot{\lambda}}$$

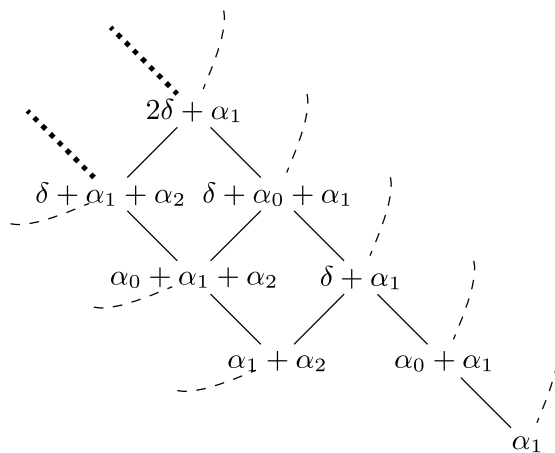
の推移閉包として定義する.

定義 5.9. $R(w_{\dot{\lambda}})$ 上の半順序 \leq^{hp} を関係

$$\alpha \leq^{\text{hp}} \beta \text{ whenever } \alpha \leq^{\text{or}} \beta \text{ and } \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \neq 0$$

の推移閉包として定義する.

例 5.10. $\lambda = (4, 2)$, $m = 2$, $\ell = 2$ とすると, $\Pi_{\dot{\lambda}}^0 = \{\alpha_0, \alpha_2\}$, $\Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{arm}} = \{\alpha_3 + \alpha_0 + \alpha_1\}$, $\Pi_{\dot{\lambda}}^{\text{leg}} = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$ となり, $(R(w_{\dot{\lambda}}), \trianglelefteq) \cong (R(w_{\dot{\lambda}}), \trianglelefteq^{\text{tc}}) \cong (R(w_{\dot{\lambda}}), \leq^{\text{hp}})$ の Hasse 図は下の図のようになる:



例 5.1 では, 標準的順序で $\mathbf{h}(y) <^{\text{or}} \mathbf{h}(x)$ であったが, $\mathbf{h}(y) - \mathbf{h}(x) = \alpha_1 + \alpha_3$ は $\Pi_{\dot{\lambda}}$ の元の和で書けないので, 比較不可能である.

6 古典的な Young 図への適用

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ を $\lambda \supset \mu$ となるような分割とする. 定義 3.1 の記法の下で, 古典的な skew Young 図 λ/μ は \mathbb{Z}^2 の部分集合として,

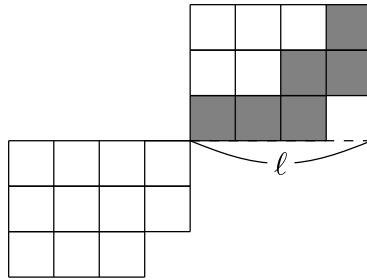
$$\lambda/\mu = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \in [1, m], b \in [\mu_a + 1, \lambda_b]\}$$

と書ける. 特に, “普通の” Young 図 λ は特別な skew Young 図 λ/ϕ ($\phi = (0, 0, \dots, 0)$) とみなせる.

$\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を $\ell \geq \lambda_1 - \mu_m$ となるように取る. すると, $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{m, \ell}$ で, skew Young 図 λ/μ は半順序集合として巡回的 Young 図 $\pi(\lambda/\mu) = \dot{\lambda}/\dot{\mu}$ と同型になる. ここで, コンテントを

$$\mathbf{c}(a, b) = b - a + m - \mu_m$$

と定義し直すと, $\mathbf{c}(\lambda/\mu) \subset [1, \kappa - 1]$ となり, $w_{\lambda/\mu, t} \in \bar{W}$, $R(w_{\lambda/\mu}) \subset \bar{R}$ となる. ただし, \bar{W} 及び \bar{R} はそれぞれ $A_{\kappa-1}$ 型の Weyl 群及びルート系とする.



系 5.6 と合わせると, 次を得る:

命題 6.1. 写像 $\mathbf{h} : \lambda/\mu \rightarrow R(w_{\lambda/\mu})$ は順序同型である.

写像 $\iota : R(w_\lambda) \rightarrow R(w_\lambda^{-1})$ を $\iota(\alpha) = -w_\lambda^{-1}\alpha$ で定める. 定理 2.3 の同型と定理 5.5 の同型との関係は次の通り:

命題 6.2. ι は $(R(w_\lambda), \trianglelefteq)$ と $(R(w_\lambda^{-1}), \leq^{\text{or}})$ の間の順序反同型で, さらに, $\iota \circ \mathbf{h} = \mathbf{coh}$. すなわち, 以下の図式が可換:

$$\begin{array}{ccc} (\lambda/\phi, \leq) & \xrightarrow{\mathbf{h}} & (R(w_\lambda), \trianglelefteq) \\ \mathbf{coh} \downarrow & & \swarrow \iota \\ (R(w_\lambda^{-1}), \leq^{\text{or}})^{\text{op}} & & \end{array}$$

ただし, $(R(w_\lambda^{-1}), \leq^{\text{or}})^{\text{op}}$ は $(R(w_\lambda^{-1}), \leq^{\text{or}})$ の順序を逆転させて得られる半順序集合とする.

7 巡回的 skew Young 図と Bruhat 順序

これまで、巡回的 Young 図の半順序構造について論じてきたが、巡回的 Young 図 $\overset{\circ}{\lambda}$ に含まれる skew Young 図全体のなす集合 $\mathcal{J}(\overset{\circ}{\lambda})$ の半順序構造について考える。

まず、古典的な結果を述べる。 λ を古典的な Young 図とし、 $\mathcal{J}(\lambda)$ を λ に含まれる skew Young 図 (または、 λ の順序イデアル) 全体の集合とする。 $\mathcal{J}(\lambda)$ は包含関係 \subset に関して半順序集合とみなす。 $w \in W$ に対して、 Bruhat 区間 $[e, w] := \{v \in W \mid e \preceq v \preceq w\}$ を定義する。ただし、 \preceq は弱右 Bruhat 順序を表す。

命題 7.1. 写像 $\lambda/\mu \mapsto w_{\lambda/\mu}$ は $(\mathcal{J}(\lambda), \subset)$ から $([e, w], \preceq)$ への順序同型を与える。

例 7.2. $\lambda = (3, 2)$ とすると、 $w_\lambda = s_4 s_2 s_3 s_1 s_2$ となり、 $\mathcal{J}(\overset{\circ}{\lambda})$ と $[e, w_\lambda]$ の Hasse 図は図 5 のようになる。

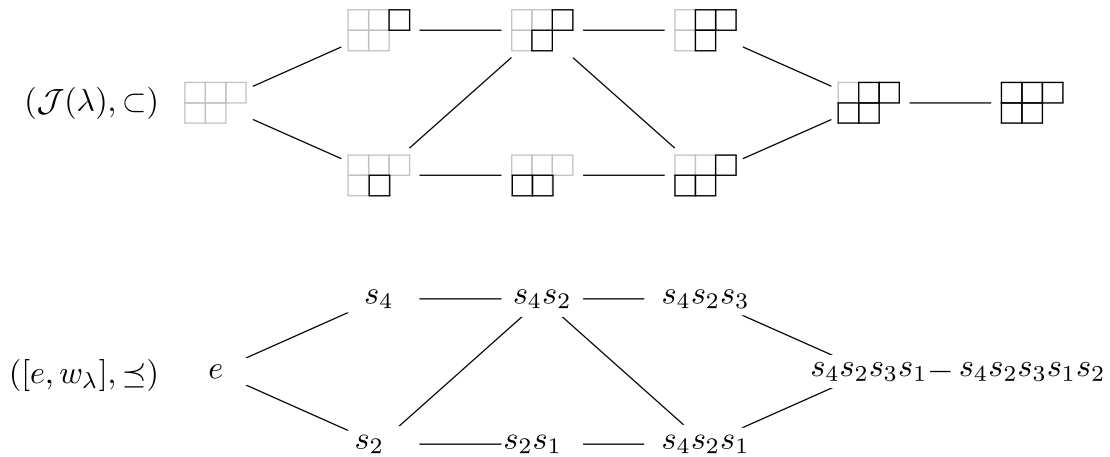


図 5 $\lambda = (3, 2)$ に対する $\mathcal{J}(\lambda)$ と $[e, w_\lambda]$ の Hasse 図.

$\overset{\circ}{\lambda}$ を巡回的 Young 図とし、 $\overset{\circ}{\lambda}$ に含まれる skew Young 図全体の集合 $\mathcal{J}(\overset{\circ}{\lambda})$ を包含関係 \subset に関して半順序集合とみなす。 $t \in \text{ST}(\overset{\circ}{\lambda})$ をとり、 Bruhat 区間 $[e, w_{\overset{\circ}{\lambda}}]$ を

$$[e, w_{\overset{\circ}{\lambda}}] := \bigcup_{n \geq 0} [e, w_{\overset{\circ}{\lambda}, t}[n]]$$

で定める。 $[e, w_{\overset{\circ}{\lambda}}]$ は t に依らないことを示せる。すると、次のことが示せる：

定理 7.3. 写像 $\overset{\circ}{\lambda}/\overset{\circ}{\mu} \mapsto w_{\overset{\circ}{\lambda}/\overset{\circ}{\mu}}$ は $(\mathcal{J}(\overset{\circ}{\lambda}), \subset)$ から $([e, w_{\overset{\circ}{\lambda}}], \preceq)$ への順序同型を与える。

また、 $[e, w_{\overset{\circ}{\lambda}}]$ は次のように書くことができる：

命題 7.4. $[e, w_\lambda)$ は ζ_λ -pluscule 元全体の集合として書ける. すなわち,

$$[e, w_\lambda) = \{w \in W \mid \langle \zeta_\lambda, \alpha^\vee \rangle = -1 \forall \alpha \in R(w)\}.$$

8 最後に

本稿は 2022 年 11 月に行われた RIMS 共同研究 (公開型) 「組合せ論的表現論における最近の展開」での講演内容が基になっている. 講演の機会を与えてくださった池田岳先生にこの場を借りて感謝する.

参考文献

- [1] A. Kleshchev, *Completely splittable representations of symmetric groups*, J. Algebra **181** (1996), no. 2, 584–592.
- [2] K. Nakada, *Colored hook formula for a generalized Young diagram*, Osaka J. Math. **45** (2008), no. 4, 1085–1120.
- [3] K. Nakada, T. Suzuki, and Y. Toyosawa, *Poset structure concerning cylindric diagrams*, arXiv:2302.01774.
- [4] R. A. Proctor, *Dynkin diagram classification of λ -minuscule Bruhat lattices and of d -complete posets*, J. Algebraic Combin. **9** (1999), no. 1, 61–94.
- [5] R. A. Proctor, *Minuscule elements of Weyl groups, the numbers game, and d -complete posets*, J. Algebra **213** (1999), no. 1, 272–303.
- [6] R. A. Proctor, *d -complete posets generalize Young diagrams for the hook product formula: partial presentation of proof*, RIMS Kôkyûroku **1913** (2014), 120–140.
- [7] O. Ruff, *Completely splittable representations of symmetric groups and affine Hecke algebras*, J. Algebra **305** (2006), no. 2, 1197–1211.
- [8] J. R. Stembridge, *On the fully commutative elements of Coxeter groups*, J. Algebraic Combin. **5** (1996), no. 4, 353–385.
- [9] J. R. Stembridge, *Minuscule elements of Weyl groups*, J. Algebra **235** (2001), no. 2, 722–743.
- [10] M. C. Strayer, *Unified characterizations of minuscule Kac–Moody representations built from colored posets*, Electronic J. Comb. **27** (2020), no. 2, #P2.42.
- [11] M. C. Strayer, *Classifications of Γ -colored d -complete posets and upper P -minuscule Borel representations*, Electronic J. Comb. **28** (2021), no. 1, #P1.15.
- [12] T. Suzuki and Y. Toyosawa, *巡回的標準盤の数え上げに関する公式について*, RIMS Kôkyûroku **2127**, 66–78.

- [13] T. Suzuki and Y. Toyosawa, *On hook formulas for cylindric skew diagrams*, Math J. Okayama Univ. **64** (2022), 191–213.