Left Regular Band を用いた推移確率行列の固有値と重複度の考察
(組合わせ論的表現論における最近の展開　報告書)

東北大学大学院　理学研究科数学専攻　中川　由宇斗
Tohoku University Graduate School of Science Mathematics
Yuto Nakagawa

1　問題の背景

Ω を有限集合, Ω に値をとる確率変数列を $\{X_n\}_{n\geq 0}$ とする．X_{t+1} における状態が直前の状態 X_t にのみ依存し, それ以前の状態 $\{X_0, \ldots, X_{t-1}\}$ に依存しないとき, 確率変数列 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ が有限**マルコフ連鎖**であるという．$\{X_n\}_{n\geq 0}$ の確率分布を $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ とする．$\{X_n\}_{n\geq 0}$ がマルコフ連鎖であるとき, $|\Omega| \times |\Omega|$ 行列 P が存在して, $\mu_{t+1} = \mu_t P$ とかける．この $|\Omega| \times |\Omega|$ 行列 P を, **確率推移行列 (確率行列)** という．[1] にて, 半群の手法を用いた代数学的なアプローチによる固有値及びその重複度の導出が行われた．本論文では, Tsetlin library の拡張として q 類似を考え, そのマルコフ連鎖に対して, 半群の手法を用いた代数学的なアプローチによる固有値及びその重複度の分析を行った*1．

問題 1. Tsetlin library

$[n]$ 上の確率分布 $\{w_i\}_{i=1}^n$ が与えられているとする*2．本棚に n 冊の異なる種類の本があるときに,「本 i $(1 \leq i \leq n)$ を確率 w_i で取り出し, それを一番左に移動する」という操作を考える．この操作を繰り返して得られる S_n 上のマルコフ連鎖を, **Tsetlin library** という*3.

n = 9 のときの Tsetlin library の状態の変化の具体例

8 を選ぶ	w_8		7	3	5	1	<u>8</u>	9	2	4	6
左端に移動	$\to$	<u>8</u>	7	3	5	1		9	2	4	6
	$\to$		8	7	3	5	1	9	2	4	6

Tsetlin library の固有値は次のようになることが知られている．[1]

定理 2 (Tsetlin library の固有値と重複度 [1])**.** *Tsetlin library* の固有値と重複度は以下のように表される．但し $(X \subset [n])$ とする．

$$\lambda_X = \sum_{i \in X} w_i \qquad , \qquad m_X = (n - |X|)! \sum_{Z=0}^{n-|X|} \frac{(-1)^Z}{Z!} = d_{n-|X|}$$

$d_k := \#\{\sigma \in S_k \mid \forall i \ \sigma_i \neq i\}$ であり, $d_k = k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}$ となる．すなわち, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in S_k$ に対して, 全ての元を動かすような $\sigma \in S_k$ の数であり, **モンモール数**と呼ばれる．

---

*1 q 類似: q を 1 に近づける極限を考えると, 元の形に戻るようなもの.

*2 $[n] := \{1, \ldots .n\}$

*3 $S_n = n$ 次対称群

2　先行研究

定義 3 (半群, LRB, チャンバー, L, supp)**.**

(1) 集合 S 上の演算 $(*)$ が結合則 $((x*y)*z = x*(y*z))$ を満たすとき, $(S,*)$ は**半群**という [*4].

(2) 半群 S が $x^2 = x$, $xyx = xy \quad \forall x, y \in S$ を満たすとき, S は **LRB(Left-Regular Band)** という.

(3) $\forall x \in S,\ cx = c$ を満たす $c \in S$ を**チャンバー**といい, チャンバー全体の集合を C とかく.

(4) S 上の同値関係 $\sim$ を $\ a \sim b \ \Leftrightarrow\ ab = a$ かつ $ba = b\ $ で定義する.

(5) $L = S/\!\sim \quad , \quad \mathrm{supp}: S \twoheadrightarrow S/\!\sim$ と定める.

(6) L 上の順序 $\leq$ を $\ \mathrm{supp}\, x \leq \mathrm{supp}\, y \quad \Leftrightarrow \quad yx = y\ $ で定義する.

(7) $c_Y = \#\{c \in C \mid \mathrm{supp}\, y = Y\ ,\ yc = c\}$ とする.

$C \subset S$ であり, $\forall x \in S, c \in C \to xc \in C$ となる.

定理 4. *(Brown (2000))*[1] *S を単位元を持つ有限の LRB とする．$\{w_x\}$ を S 上の確率分布とする．C 上のマルコフ連鎖を, 確率 w_x で選んだ $x \in S$ を左からかけることによって定義する．このマルコフ連鎖の推移確率行列を P とすると, P は対角化可能である．また, 各 $X \in L$ に対して, 重複度が m_X であるような固有値 λ_X を持つ*[*5]*.*

$$\lambda_X = \sum_{\mathrm{supp}\, y \leq X} w_y \qquad m_X = \sum_{Y \geq X} \mu(X, Y) c_Y$$

3　主定理 1

Tsetlin library の拡張として次の問題を考える.

問題 5. p 色版 Tsetlin library 独立した確率分布 $\{w_i\}_{i \in [n]}$ と $\{c_j\}_{j \in C_p}$ が与えられているとする．色つき置換群 $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) : (a_1, \ldots, a_n) \in S_n$, $b_j \in C_p$ $(1 \leq j \leq n)$ に対し,「確率 w_i で i 番の数字を選び, 確率 c_j で b_i を j に変え, 左端に移動する」というランダム操作を行う．この操作によって得られるマルコフ連鎖を **p 色版 Tsetlin library** という.

p 色版 Tsetlin library は, $(p = 1)$ のとき, 通常の Tsetlin library と同じになるため, Tsetlin library の q 類似といえる.

$n = 8, p = 3$ のときのランダム操作．但し, $(a, 0) = a, (b, 1) = b, (c, 2) = c$ と書く．

w_4		7	3	5	1	$\underline{4}$	2	8	6
数字 4 を選ぶ $\to$	$\underline{4}$	7	3	5	1		2	8	6
色 1 に変える $\to$	$\underline{4}$	7	3	5	1		2	8	6
c_1		4	7	3	5	1	2	8	6

p 色版 Tsetlin library の固有値とその重複度は以下のようになることが分かった.

定理 6 (**主定理 1** p 色版 Tsetlin library の固有値とその重複度)**.** *p 色版 Tsetlin library の固有値とその重複度は以下のようになる．但し, $(X \subset [n])$ とする.*

$$\lambda_X = \sum_{i \in X} w_i \qquad , \qquad m_X = (n - |X|)!\, p^{n-|X|} \sum_{Z=0}^{n-|X|} \frac{(-1)^Z}{Z!\, p^Z} = D_{n-|X|, p}$$

[*4] 単純に S が半群であるという.

[*5] μ は束 L 上のメビウス関数

$D_{k,p} := \#\{\tau \in G_{k,p} \mid \forall i\ \sigma_i \neq i\ \vee\ a_i \neq 0\}$ であり, $D_{k,p} = k!p^k \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!p^j}$ となる. すなわち, $\tau = ((\sigma_1, a_1), \dots, (\sigma_k, a_k)) \in G_{k,p}$ において, 任意の i に対して「$\sigma_i \neq i$ または $a_i \neq 0$ を満たす」ような $\tau \in G_{k,p}$ の数を, **p 色版モンモール数** と呼び, $D_{k,p}$ と書く.

証明. $S' = F_n = \{x \mid x = (x_1, \dots, x_l)\ ,\ 0 \leq l \leq n\}$ とする.

$S = F_{n,p} = \{x = ((x_1, a_1), \dots, (x_l, a_l)) \mid (1 \leq l \leq n)\ ,\ x_i \in [n]\ ,\ x_i \neq x_j\ (i \neq j)\ ,\ a_i \in C_p\}$ とする. また, $l = 0$ のときは $G_{n,q}$ の単位元とし, e とかく. ここで, (x_i, a_i) に対して, a_i を x_i に対する係数と呼ぶことにする. 演算 (*) を次のように定義する.

$$((x_1, a_1), \dots, (x_l, a_l)) * ((y_1, b_1), \dots, (y_m, b_m)) = ((x_1, a_1), \dots, (x_l, a_l), (y_1, b_1), \dots, (y_m, b_m))\%$$

但し, % は「x_i において左に既出ならば, 係数によらず削除する」という意味とする.

$$\text{例}\quad (21) * (35416) = (21354\underline{1}6)\% = (2\underline{1}3546)$$

$(F_{n,p}, *)$ は LRB である. $C = \{((x_1, a_1), \dots, (x_n, a_n))\}$ であり, C と $G_{n,p}$ は 1 対 1 対応する.

S 上の確率分布 $\{w_x\}_{x \in S}$ を $w_x = \begin{cases} w_i c_j & x = ((i,j)) \\ 0 & otherwise \end{cases}$ とする.

確率 w_x で $c \in C$ に左から $x \in S$ をかけるとすれば, p 色版 Tsetlin library を表現できる.

L, supp は下のようになる.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{supp}: S & \twoheadrightarrow & S' & \twoheadrightarrow & L = 2^{[n]} \\ x = ((x_1, j_1), \dots, (x_l, j_l)) & \longmapsto & \dot{x} = (x_1, \dots, x_l) & \longmapsto & \{x_1, \dots, x_l\} \end{array}$$

$x = ((x_1, j_1), \dots, (x_k, j_k)) \in F_{n,p}$ とする. このとき, $X = \mathrm{supp}\, x = \{x_1, \dots, x_k\}$ となる.

$xc = c$ を満たすチャンバー c は,

$$c = ((x_1, j_1), \dots, (x_k, j_k), \overbrace{\cdots}^{\text{残りの } n-k \text{ 個は任意}})$$

の形で表される. $n-k$ 個の, 数の選び方及び係数の取り方が任意であるから, $c_X = (n-k)!p^{n-k} = (n - |X|)!p^{n-|X|}$.

定理 (Brown (2000))[1] を適用すると, p 色版 Tsetlin library の固有値とその重複度は以下のようになる. $(X \subset [n])$

$$\lambda_X = \sum_{supp y \leq X} w_y = \sum_{i \in X} \sum_{j=0}^{p-1} c_j w_i = \sum_{i \in X} w_i$$
$$m_X = \sum_{Y \geq X} \mu(X, Y) c_Y = \sum_{Y \supseteq X} (-1)^{|Y| - |X|} (n - |Y|)! p^{n-|Y|}$$

$\mu(X, Y) = (-1)^{|Y|-|X|}$, 対応する Y は ${}_{n-|X|}C_Z$ 通りあるから,

$$m_X = \sum_{Z=0}^{n-|X|} (-1)^Z ({}_{n-|X|}C_Z)(n - Z - X)! p^{(n-Z-X)}$$
$$= (n - |X|)! p^{n-|X|} \sum_{Z=0}^{n-|X|} \frac{(-1)^Z}{Z! p^Z} = D_{n-|X|, p}$$

$\square$

4　主定理 2

問題 7 (Tsetlin library の q 類似). $V = {\mathbb{F}_q}^n \setminus \{\vec{0}\}$ とする[*6]．V 上の確率分布 $\{w_v\}_{v\in V}$ が与えられているとする．$A = (a_1, \ldots, a_n)$ ($a_i \in V$ ，$a_1, \ldots, a_n$ は一次独立) とする．A 全体の集合と $GL_n(\mathbb{F}_q)$ は 1 対 1 対応である[*7].

$A = (a_1, \ldots, a_n)$ に $b \in V$ を左からかけることを,「$a_i = db + \sum_{j=0}^{i-1} c_j a_j$ ，$d, c_j \in \mathbb{F}_q$ **が成り立つ** a_i **を削除し,** $A' = (b, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in GL_n(\mathbb{F}_q)$ **にする**」と定義する[*8].

確率 w_b でベクトル b を選び, 上の操作を行う．この操作によって得られる $GL_n(\mathbb{F}_q)$ 上のマルコフ連鎖を, **Tsetlin library の** q **類似**と呼ぶ.

Tsetlin library の q 類似の状態の変化の具体例

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\
\overset{w}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} \quad \xrightarrow[\text{ベクトルをもってくる}]{\text{左に非 0 の}} & \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \color{red}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\
\xrightarrow[\text{表せるのを消す}]{\text{既出の元の線形和で}} & \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\
\because \color{red}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (q-1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}
\end{array}$$

Tsetlin library の q 類似の固有値とその重複度は以下のようになることが分かった.

定理 8 (**主定理 2** Tsetlin library の q 類似 の推移確率行列の固有値と重複度). *Tsetlin library の* q *類似の推移確率行列は, 重複度* m_X *であるような固有値* λ_X *を持ち, 次のように表される．但し,* $\langle 0\rangle! = 1$ ，$\langle n\rangle! = q^{\binom{n}{2}} \prod_{k=1}^{n}(q^k - 1)$ $(n \geq 1)$ ，$X = \mathrm{span}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ $(0 \leq k \leq n)$ *である．*[*9].

$$\lambda_X = \sum_{\mathrm{supp}\, y \leq X} w_y = \sum_{v \in X} w_v$$

$$m_X = \langle n - \dim X\rangle! \sum_{j=0}^{n-\dim X} \frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}} q^{\dim X(n-\dim X-j)}}{\langle j\rangle!}$$

証明. $V = {\mathbb{F}_q}^n \setminus \{\vec{0}\}$ とする．$F_n^q = \{(x_1, \ldots, x_l)\ x_i \in V \mid 0 \leq l \leq n\}$ とする．但し, $(x_1, \ldots, x_l)$ は一次独立とする．また, $l = 0$ のときは $F_{n,q}$ の単位元とし, e とかく．演算 $*$ を次のように定義する.

$$(x_1, \ldots, x_l) * (y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)\%$$

但し, % は「左の元の線形和で表せるならば, 削除する」という意味とする.

$$\text{例} \quad \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \color{red}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}\right)\% = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \because \color{red}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} = (q-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$(F_n^q, *)$ は LRB である．$C = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$ であり, C と $GL_n(\mathbb{F}_q)$ は 1 対 1 対応する.

[*6] $\mathbb{F}_q$ は, 位数 q の有限体

[*7] $GL_n(E) :=$ 各元が E の元であるような $n \times n$ 行列における一般線形群 (正則行列全体の集合)

[*8] このような a_i は一意に定まる.

[*9] $\mathrm{span}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} := v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ で張られる空間

S 上の確率分布 $\{w_x\}_{x\in S}$ を $w_x = \begin{cases} w_{v_i} & x=(v_i) \\ 0 & otherwise \end{cases}$ とする.

確率 w_x で $c \in C$ に左から $x \in S$ をかけるとすれば, Tsetlin library の q 類似を表現できる.

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}: S &\twoheadrightarrow & L \subset 2^V \\ x=(x_1,\ldots,x_l) &\longmapsto & \mathrm{supp}\, x = X = \mathrm{span}\{x_1,\ldots,x_l\} \end{aligned}$$

$x=(v_1,\ldots,v_l)$ とする. このとき, $X=\mathrm{supp}\,x=\mathrm{span}\{x_1,\ldots,x_l\}$ となる. $xc=c$ を満たすチャンバー c は,

$$c=(v_1,\ldots,v_l \overbrace{\cdots}^{n-l\text{ 個の適当なベクトル}})$$

の形で表される. c_X は, 一本ずつ順番に本数を考えることによって求められる.

$l+1$ 本目	X の元でない任意のベクトル	q^n-q^l 通り
$l+2$ 本目	X の元及び $(l+1)$ 本目の線形和でない	q^n-q^{l+1} 通り
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n 本目	X の元及び $(l+1),\ldots,(n-1)$ 本目の線形和でない	q^n-q^{n-1} 通り

$$\therefore c_X = \prod_{j=l}^{n-1}(q^n-q^j)$$

$\dim Y = l+k$ $(0\le k\le n-l)$ かつ $Y\supset X$ を満たすような Y は, $[{}_{n-l}C_k]_q$ 通りある[*10]. よって,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-l}[{}_{n-l}C_k]_q F_n(k+l) &= \sum_{k=0}^{n-l}\#\{Y \mid \dim Y = k+l \text{ かつ } X\subset Y\}F_n(k+l) \\ &= \sum_{X\le Y} F_n(\dim Y) \end{aligned}$$

次の式が成り立つことが分かれば, $m_Y = F_n(\dim Y)$ は示せる.

Tsetlin library の q 類似の重複度を求めるための式

$$\sum_{k=0}^{n-l}[{}_{n-l}C_k]_q F_n(k+l) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=l}^{n-1}(q^n-q^j) & (0\le l\le n-1) \\ 1 & (l=n) \end{cases}$$

右辺は, $\dim X = l$ としたときのチャンバーの数 c_X. 左辺は, $\dim Y = k+l$ としたときの $\sum_{Y\ge X} F_n(\dim Y)$. $c_X = \sum_{Y\ge X} m_Y$ より, $m_Y = F_n(\dim Y)$.

上の式を数学的帰納法で証明できる. □

参考文献

[1] K. S. Brown, *Semigroups, rings, and Markov chains*, J. Theoret. Probab. **13** (2000), no. 3, 871–938, DOI 10.1023/A:1007822931408.

[2] W. Y. C. Chen and G.-C. Rota, *q-analogs of the inclusion-exclusion principle and permutations with restricted position*, Discrete Math. **104** (1992), no. 1, 7–22, DOI 10.1016/0012-365X(92)90622-M.

---

*10

$$[{}_nC_k]_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\ ,\ [n]_q! = \prod_{k=1}^{n}[k]_q\quad ,\ [0]_q=0, [n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}$$