旗多様体上の同変積分と Grothendieck polynomial

大阪公立大学/京都大学　大川　領 *

Osaka Metropolitan University / Kyoto University　Ryo Okawa

概要

旗多様体, とくにグラスマン多様体上の同変積分を考える. 望月拓郎氏の壁超え公式の理論に触発された計算手法により, 同変積分についての留数公式を与える. とくに, 積分する K 理論のクラスをうまく設定することで Grothendieck polynomial の行列式公式を得る.

1　導入

旗多様体 $\{F_\bullet \mid F_m \subset \cdots \subset F_1 \subset W\}$ に対角トーラスから誘導される作用を考える. このとき同変積分がトーラス作用の固定点における指標の足し上げにより定義される. 本報告では, この同変積分に関する留数公式を導出する. 証明のために, 旗多様体を幾何学的不変式論による商空間と捉えて, 壁越え現象を利用する. これは, 望月拓郎氏の壁超え公式の理論 [10] に触発されて考えた計算手法である.

以下では, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数多様体を考える. この節の残りで, 記号の準備と基本となる局所化公式について説明する.

1.1　記号の準備

滑らかな代数多様体 M 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し, $\mathcal{E}$ の双対を $\mathcal{E}^\vee = \bigsqcup_{p\in M} \mathrm{Hom}(\mathcal{E}|_p, \mathbb{C})$ とあらわす. また, $\wedge_{-1}\mathcal{E} = \sum(-1)^\ell \wedge^\ell \mathcal{E}$, という記号を用いる. ここで $\wedge^\ell\mathcal{E}$ は, $\mathcal{E}$ の ℓ 次の外積とする.

とくに接束 TM の双対, つまり余接束 $T^*M = (TM)^\vee$ をとると, M がコンパクトなとき $\mathbb{R}\Gamma(M, \wedge_{-1}T^*M) = \chi(M) \in K(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}$ はオイラー数である. 以下ではパラメータ t に対して $\wedge_{-t}\mathcal{E} = \wedge_{-1}(\mathcal{E}\otimes t)$ という記号も用いる. 次の小節ではトーラス作用の局所化公式による積分を導入し, コンパクトでない場合も含めて M の K 理論的オイラー数 $\chi_t(M)$ を定める.

自然数 n に対して $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく. 階数 n のベクトル束 $\mathcal{E}$ と部分集合 $I \subset [n]$ に対して, $Fl(\mathcal{E}, I)$ で各点 $x \in M$ における $\mathcal{E}$ のファイバー $\mathcal{E}_x$ の旗 $F_\bullet = (F_1 \subset \cdots \subset F_m)$ で $\{\dim F_1, \ldots, \dim F_m\} = I$ をみたすもの全体がなす M 上の旗束を表す. ここで $m = |I|$ とした.

少し紛らわしいが $[n]_t = 1 + t + \cdots + t^{n-1}$ とおく. また次の記号を用いる.

$$\binom{n}{m}_t = \frac{[n]_t[n-1]_t\cdots[n-m+1]_t}{[m]_t[m-1]_t\cdots[1]_t}$$

* email: ohkawa.ryo@gmail.com

本報告集の作成にあたり, 今野均氏, 茂木康平氏, 吉田豊氏と有益な議論をしました. 特に茂木氏からは [4] 等の有益な情報を多くいただきました. ここに感謝を記します.

1.2　局所化公式

代数的トーラス $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^s$ の作用を持つ滑らかな代数多様体 M に対し, $\mathbb{T}$ 同変 K 群 $K_{\mathbb{T}}(M)$ を考える．例えば $M = \mathrm{pt}$ の場合, ウエイト分解による同型 $K_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}[t_1^{\pm}, \ldots, t_s^{\pm}]$ がある．ここで座標 $(t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^s$ に関するウエイト空間 $\mathbb{C}_{t_1^{i_1} \cdots t_s^{i_r}}$ が単項式 $t_1^{i_1} \cdots t_s^{i_r}$ に対応する．以下 $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_s)$ とおく．つぎの事実は, [7], [13] からしたがう．

事実 1.1. 固定点集合 $M^{\mathbb{T}}$ の埋め込み $\iota\colon M^{\mathbb{T}} \to M$ について以下が成り立つ．
(0) 押し出し ι_* はつぎの同型を与える．

$$\iota_*\colon K_{\mathbb{T}}(M^{\mathbb{T}}) \otimes_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}^{\pm}]} \mathbb{Q}(\boldsymbol{t}) \cong K_{\mathbb{T}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}^{\pm}]} \mathbb{Q}(\boldsymbol{t})$$

(1) 固定点集合は部分多様体 $M_{\mathfrak{J}}$ の直和 $M^{\mathbb{T}} = \bigsqcup_{\mathfrak{J}} M_{\mathfrak{J}}$ に分解する．
(2) $N_{\mathfrak{J}}$ を $M_{\mathfrak{J}} \subset M$ の法束とする．このとき $\gamma \in K_{\mathbb{T}}(K)$ に対して以下が成り立つ．

$$(\iota_*)^{-1}\gamma = \sum_{\mathfrak{J}} \frac{\gamma|_{M_{\mathfrak{J}}}}{\wedge_{-1}(N_{\mathfrak{J}})^{\vee}}$$

以下では固定点集合 $M^{\mathbb{T}}$ は有限集合と仮定する．M がコンパクトな場合, $\Pi\colon M \to \mathrm{pt}$ と $\Pi_{\mathfrak{J}}\colon M_{\mathfrak{J}} \to \mathrm{pt}$ に対し次の可換図式がある．

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathbb{T}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}^{\pm}]} \mathbb{Q}(\boldsymbol{t}) \arrow[r, "(\iota_*)^{-1}", "\cong"'] \arrow[d, "\Pi_*"'] & K_{\mathbb{T}}(M^{\mathbb{T}}) \otimes_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}^{\pm}]} \mathbb{Q}(\boldsymbol{t}) \arrow[d, "\sum_{\mathfrak{J}} \Pi_{\mathfrak{J}*}"] \\
K_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt}) \otimes_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{t}^{\pm}]} \mathbb{Q}(\boldsymbol{t}) \arrow[r, equal] & \mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_s)
\end{tikzcd}$$

したがって, 局所化公式により以下をえる．

$$\mathbb{R}\Gamma(M, \mathcal{E}) = \sum_{\mathfrak{J}} \frac{\Pi_{\mathfrak{J}*}(\mathcal{E}|_{M_{\mathfrak{J}}})}{\wedge_{-1}(N_{\mathfrak{J}})} \tag{1}$$

M がコンパクトでなくても (1) の右辺は意味を持つので, $\alpha \in K_{\mathbb{T}}(M)$ に対し M 上の同変積分をつぎで定める．

$$\int_M \alpha = \sum_{\mathfrak{J}} \Pi_{\mathfrak{J}*} \frac{\alpha|_{M_{\mathfrak{J}}}}{\wedge_{-1}(N_{\mathfrak{J}})}$$

留数公式を導出する過程では, $\mathbb{T}$ 同変な固有射 $M_1 \to M_2$ に対する同様の可換図式を利用する．

K 理論的オイラー数を定義するために, 新たな代数的トーラス $\mathbb{C}_t^*$ と同変パラメータ $t \in \mathbb{C}_t^*$ を導入する．このトーラス $\mathbb{C}_t^*$ を M に自明に作用させ, ウエイト空間 t をテンソルした同変ベクトル束 $TM \otimes t$ を考える．このとき $K_{\mathbb{T} \times \mathbb{C}_t^*}(pt) = \mathbb{Z}[t_1^{\pm}, \ldots, t_s^{\pm}, t^{\pm}]$ の商体 $\mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_s, t)$ の元として, K 理論的オイラー数 $\chi_t(M)$ を次で定める．

$$\chi_t(M) = \int_M \wedge_{-1}(T^*M \otimes t) = \int_M \wedge_{-t}(T^*M)$$

2　旗多様体上の同変積分に関する留数公式

本節では旗多様体上の同変積分を記述する留数公式について述べる.

2.1　旗多様体

ベクトル空間 $W = \mathbb{C}^r$ を一つ固定し, W 内の部分空間がなす旗多様体

$$Fl(W, \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}) = \{F_\bullet = (F_1 \supset \cdots \supset F_m)\}$$

を考える. ここで, $r > d_1 > d_2 > \cdots > d_m \geq 1$ はすべて整数とする.

壁越え現象を利用して, 旗多様体間の射影

$$Fl(W, \{d_1, \ldots, d_m\}) \to Fl(W, \{d_1, \ldots, d_{m-1}\}), \quad (F_1 \supset \cdots \supset F_m) \mapsto (F_1 \supset \cdots \supset F_{m-1}) \tag{2}$$

の押し出しを計算する. そのため, まず旗多様体 $Fl(W, \{d_1, \ldots, d_m\})$ を以下のように商空間 $M(W, V)$ として構成する. ベクトル空間 $V_0 = W,\ V_1 = \mathbb{C}^{d_1},\ V_2 = \mathbb{C}^{d_2},\ \ldots,\ V_m = \mathbb{C}^{d_m}$ から次数付きベクトル空間 $V = \bigoplus_{k=1}^{m} V_k$ と群 $G = \prod_{k=1}^{m} \mathrm{GL}(V_k)$ をとり, 自然な G 作用による商空間 $M(W, V) = \prod_{k=1}^{m} \mathrm{Hom}^{\mathrm{inj}}(V_k, V_{k-1})/G$ を考える. ここで, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{inj}}(V_k, V_{k-1}) = \{b_k \in \mathrm{Hom}(V_k, V_{k-1}) \mid b_k$ は単射 $\}$ とした.

$M(W, V)$ の元を代表する写像の列 $W = V_0 \xleftarrow{b_1} V_1 \xleftarrow{b_2} \cdots \xleftarrow{b_m} V_m$ に対して, 旗 $F_\bullet = (\operatorname{im} b_1 \supset \operatorname{im}(b_1 b_2) \supset \cdots \supset \operatorname{im}(b_1 \cdots b_m))$ を対応させることで, 同型写像 $M(W, V) \cong Fl(W, \{d_1, \ldots, d_m\})$ が与えられる. また, 射影 (2) を $\Pi\colon M(W, V) \to M(W, V/V_m),\quad (b_k)_{k=1}^m \mapsto (b_k)_{k=1}^{m-1}$ と表す. ここで, $V/V_m = \bigoplus_{k=1}^{m-1} V_k$ を次数付きベクトル空間と考える.

つぎに $M(W, V)$ へのトーラス作用を定める. まず $\mathrm{GL}(W)$ の $M(W, V)$ への自然な作用を考える. 基底 $W = \mathbb{C}\boldsymbol{w}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{w}_r$ を一つ固定し, 対角トーラスとしての埋め込み $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^r \subset \mathrm{GL}(W)$ により $\mathbb{T}$-作用を考える. このとき, $\mathbb{T}$ 同変 K 群の射影による押出し $\Pi_*\colon K_{\mathbb{T}}(M(W, V)) \to K_{\mathbb{T}}(M(W, V/V_m))$ を積分記号 $\int_{M(W,V)}$ で表す.

2.2　グラスマン多様体（$m = 1, d_1 = d$）

例として $m = 1$ の場合を考えると $M(W, V) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{inj}}(V, W)/\mathrm{GL}(V)$ はグラスマン多様体である. 以下では $d = \dim V$ とし, $M(r, d) = M(W, V)$ とも書く.

固定した基底 $W = \mathbb{C}\boldsymbol{w}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{w}_r$ をもちいて固定点集合 $M(W, V)^{\mathbb{T}}$ を記述する. 部分集合 $I \subset \{1, \ldots, r\}$ に対して $W_I = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}\boldsymbol{w}_I$ とおくと, グラスマン多様体の点 $P_I = (W \supset W_I)$ が定まる. 固定点集合は, $M(W, V)^{\mathbb{T}} = \{P_I \mid |I| = d\}$ となり $\binom{r}{d}$ 個の点からなる.

2.3　留数公式

$\mathrm{GL}(V_m)$ 表現 E に対し, $M(W,V)$ 上のベクトル束 $\mathcal{E} = \prod_{k=1}^{m} \mathrm{Hom}^{\mathrm{inj}}(V_k, V_{k-1}) \times E/G$ を定める．とくに普遍部分束 $\mathcal{V}_\ell = \prod_{k=1}^{m} \mathrm{Hom}^{\mathrm{inj}}(V_k, V_{k-1}) \times V_\ell/G$ （$\ell = 1, 2, \ldots, m$）がえられる．

d_m 変数対称多項式 $f(x)$ を基本対称式 $e_1(x), \ldots, e_{d_m}(x)$ により $f(x) = g(e_1(x), e_2(x), \ldots, e_{d_m}(x))$ と表す．このとき同変 K 理論類 $f(\mathcal{V}_m) = g\left(\wedge^1(\mathcal{V}_m), \wedge^2(\mathcal{V}_m), \ldots, \wedge^{d_m}(\mathcal{V}_m)\right)$ について [19, (4)] を再導出する．

定理 2.1.

$$\int_{M(W,V)} f(\mathcal{V}_m) = \operatorname*{Res}_{u_1 \cdots u_{d_m} = 0,\infty} \frac{f(u_1, \ldots, u_{d_m}) \cdot \prod_{1 \le i \ne j \le d_m} (1 - u_i/u_j)}{d_m! \cdot \prod_{i=1}^{d_m} \wedge_{-1}\left(u_i \otimes \mathcal{V}_{m-1}^\vee\right)} \cdot \frac{du_1 \cdots du_{d_m}}{u_1 \cdots u_{d_m}}$$

ここで $\operatorname*{Res}_{u_1 \cdots u_{d_m} = 0,\infty} = \operatorname*{Res}_{u_1 = 0,\infty} \circ \cdots \circ \operatorname*{Res}_{u_m = 0,\infty}$ および $\operatorname*{Res}_{u = 0,\infty} = \operatorname*{Res}_{u=0} + \operatorname*{Res}_{u=\infty}$ とした．

例として $m = 1, d_1 = 1, f(x) = x^\ell$ の場合に定理を適用する．このとき $M(W,V) = \mathbb{P}(W)$ で, $\operatorname*{Res}_{u=0,\infty} \frac{u^\ell}{\wedge_{-1}(u \otimes \mathcal{W}^\vee)} \cdot \frac{du}{u} = \mathbb{R}\Gamma(\mathbb{P}(W), \mathcal{O}(-\ell))$ となる．従って, 一般に以下をえる．

$$\operatorname*{Res}_{u=0,\infty} \frac{u^\ell}{\wedge_{-1}(u \otimes \mathcal{V}_{m-1}^\vee)} \cdot \frac{du}{u} = \begin{cases} h_{-\ell}(\mathcal{V}_{m-1}^\vee) & \ell \le 0 \\ 0 & 0 < \ell < d_{m-1} \\ (-1)^{d_{m-1}-1} \cdot \det(\mathcal{V}_{m-1}) \cdot h_{\ell - d_{m-1}}(\mathcal{V}_{m-1}) & \ell \ge d_{m-1} \end{cases} \tag{3}$$

ここで $h_m = h_m(x)$ は次数 m の完全対称多項式である．

§3 では, 望月拓郎氏の壁越え公式 [10] に触発された手法で, 留数公式を証明する．その応用として, §4 では χ_t の計算や, Grothendieck polynomial の行列式公式を導出する．

3　留数公式の証明

以下では簡単のためグラスマン多様体（$m = 1$）に限定する．前節までと同様に $W = \mathbb{C}^r$ とし, $V = \mathbb{C}^d$ とおく．また商空間 U/G 上のトートロジカル束 $\mathcal{V} = U \times V/G, \mathcal{W} = U/G \times W$ を全て同じ記号 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ で表すことにする．

3.1　補強マスター空間

補強マスター空間を導入するために以下のアフィン空間を考える．

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}(W,V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$$
$$\widetilde{\mathbb{M}} = \widetilde{\mathbb{M}}(W,V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \times Fl(V, \{d-1\})$$
$$\hat{\mathbb{M}} = \hat{\mathbb{M}}(W,V) = \widetilde{\mathbb{M}} \times \det V^\vee$$

ここで旗多様体 $Fl(V,\{d-1\})$ の元は, $V=\mathbb{C}^d$ の $(d-1)$ 次元部分空間 V' である. 補強マスター空間は $\hat{\mathbb{M}}$ の安定開集合 $\hat{\mathbb{M}}^{ss}$ をとり, $G=\mathrm{GL}(V)$ による商空間を取ることにより得られる.

開集合 $\hat{\mathbb{M}}^{ss}$ を以下のように定める：

$$(b,V',\rho)\in\hat{\mathbb{M}}^{ss} \iff \begin{cases} b|_{V'} \text{ は単射, かつ} \\ \rho\neq 0, \text{ または}, b \text{ は単射 (つまり } \rho=0 \implies b \text{ は単射)} \end{cases}$$

そして補強マスター空間 $\mathcal{M}=\hat{\mathbb{M}}^{ss}/\mathrm{GL}(V)$ を考える.

命題 3.1. $\mathcal{M}=\hat{\mathbb{M}}^{ss}/G$ は滑らかである.

証明 V の基底 $\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_d$ を固定し $V_0'=\langle\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_{d-1}\rangle$ とおく. $\hat{\mathbb{M}}^{ss}$ の元 (b,V_0',ρ) で $\begin{bmatrix} b(\boldsymbol{f}_1) & \cdots & b(\boldsymbol{f}_d)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_r\end{bmatrix}$ と書いた時に,

$$\boldsymbol{b}_{i_1}=(1,0,\dots,0),\dots,\boldsymbol{b}_{i_{n-1}}=(0,\dots,0,1,0) \tag{4}$$

をみたすものたちの $\mathrm{GL}(V)$ 軌道のなす $\mathcal{M}$ の開集合 U を考える. このとき $g\in\mathrm{GL}(V)$ で, V_0' と (4) を保つものは $g=\begin{bmatrix}E_{n-1} & \\ & *\end{bmatrix}$ のみである. さらに $\rho=1$ または $\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{e}_n$（$j\neq i_1,\dots,i_{n-1}$）を保つなら $g=E_n$ となる. よって U は座標近傍の和集合となることがわかる. □

3.2 $\mathbb{C}_u^*$-作用

$\mathcal{M}=\hat{\mathbb{M}}^{ss}/\mathrm{GL}(V)$ への $\mathbb{C}_u^*$-作用を以下でさだめる

$$[b,V',\rho]\mapsto[b,V',u\cdot\rho].$$

このとき $\mathbb{C}_u^*$-固定点集合 $\mathcal{M}^{\mathbb{C}_u^*}$ は

$$\mathcal{M}_+=\{\rho=0\}\cong Fl(\mathcal{V},\{d-1\}),\quad \mathcal{M}_{exc}=\Big\{[b,V',\rho=1]\in\mathcal{M}\ \Big|\ \mathrm{rk}\, b<d\Big\}$$

という二つの成分の直和 $\mathcal{M}^{\mathbb{C}_u^*}=\mathcal{M}_+\sqcup\mathcal{M}_{exc}$ になる. ここで $\mathcal{M}_+$ は $\mathbb{C}_u^*$-作用の定義から固定点集合に含まれるのが明らかである. 一方, $\rho=1$ の状況では $\mathrm{GL}(V)$ 軌道 $[b,V',\rho=1]$ が $\mathbb{C}_u^*$ 作用の固定点であることと, (b,V') が非自明な安定化部分群を持つこととは同値である. これは図 1 からみて取れる. 従って, 上記の $\mathcal{M}_{exc}$ の記述をえる.

命題 3.2. 以下の同型が成立する.

$$\mathcal{M}_{exc}\cong M(W,V_\flat)=M(r,d-1)$$

ここで $\dim V_\flat=d-1$ とし直和分解 $V=V_\flat\oplus V_\sharp$ を固定した.

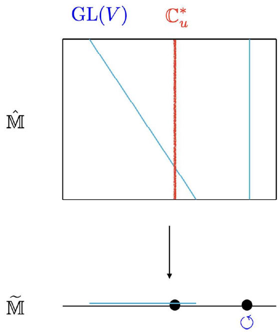

図 1　$\mathbb{C}^*_u$**-作用**

証明　すべての $\mathcal{M}_{exc}$ の元に対して $G = \mathrm{GL}(V)$ 作用により $V_\sharp = \ker b$ となる代表元 $(b, V' = V_\flat, \rho = 1)$ がとれる．したがって以下の同型をえる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{exc} &= \left\{(b, V', \rho = 1) \;\middle|\; b|_{V'} \text{は単射}, \operatorname{rk} b < d\right\} / \,\mathrm{SL}(V) \\
&\cong \left\{(b, V' = V_\flat, \rho = 1) \;\middle|\; b|_{V_\flat} \text{は単射}, \operatorname{rk} b < d\right\} / \,\mathrm{GL}(V_\flat) \\
&= \mathrm{Hom}^{inj}(V_\flat, W) / \,\mathrm{GL}(V_\flat) = M(W, V_\flat)
\end{aligned}$$

ここで, 以下の同一視を用いた．

$$\mathrm{GL}(V_\flat) \to \{g \in \mathrm{SL}(V) \mid g(V_\flat) = V_\flat, g(V_\sharp) = V_\sharp\}, \quad g_\flat \mapsto \begin{pmatrix} g_\flat & 0 \\ 0 & \det g_\flat^{-1} \end{pmatrix}$$

□

N_+, N_{exc} を $\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_{exc}$ の $\mathcal{M}$ における法束とする．このとき任意の $\gamma \in K_{\mathbb{T}}(\mathcal{M})$ に対して事実 1.1 (iii) の局所化公式により以下をえる．

$$\int_{\mathcal{M}} \gamma = \int_{\mathcal{M}_+} \frac{\gamma|_{\mathcal{M}_+}}{\wedge_{-1}(N_+)^\vee} + \int_{\mathcal{M}_{exc}} \frac{\gamma|_{\mathcal{M}_{exc}}}{\wedge_{-1}(N_{exc})^\vee}.$$

ここで左辺は u に関するローラン多項式なので $u = 0$ と ∞ における留数の和は 0 になる．よって

$$\operatorname*{Res}_{u=0,\infty} \int_{\mathcal{M}_+} \frac{\gamma|_{\mathcal{M}_+}}{\wedge_{-1}(N_+)^\vee} du = -\operatorname*{Res}_{u=0,\infty} \int_{\mathcal{M}_{exc}} \frac{\gamma|_{\mathcal{M}_{exc}}}{\wedge_{-}(N_{exc})^\vee} du.$$

さらに $1/\wedge_{-1}(N_+)^\vee = 1/(1 - u^{-1}\det \mathcal{V})$ に注意すると,

$$\operatorname*{Res}_{u=0,\infty} \int_{\mathcal{M}_+} \frac{\gamma|_{\mathcal{M}_+}}{\wedge_{-1}(N_+)^\vee} du = -\det \mathcal{V} \int_{\mathcal{M}_+} \gamma|_{\mathcal{M}_+}. \tag{5}$$

そこで対称多項式 f に対して, $\wedge^1\mathcal{V}, \ldots, \wedge^d\mathcal{V}$ の f への代入により定まる K 理論類 $\alpha = f(\mathcal{V})$ をとる．さらに $\mathcal{M}_+ = Fl(\mathcal{V}, \{d-1\})$ なので

$$\tilde{f}(\mathcal{V}) = \frac{f(\mathcal{V}) \cdot \wedge_{-1}\mathcal{H}om(\mathcal{V}/\mathcal{V}', \mathcal{V}')}{d \cdot \det \mathcal{V}}$$

と修正し $\gamma = \tilde{f}(\mathcal{V})$ を代入する．ここで $\mathcal{V}'$ はグラスマン多様体 $Fl(\mathcal{V}, \{d-1\})$ 上の普遍部分束とする．このとき

$$\det \mathcal{V} \int_{\mathcal{M}_+} \tilde{f}(\mathcal{V})|_{\mathcal{M}_+} = \int_{Fl(\mathcal{V},\{d-1\})} \frac{f(\mathcal{V}) \cdot \wedge_{-1} \mathcal{H}om(\mathcal{V}/\mathcal{V}', \mathcal{V}')}{d} = \int_{M(W,V)} f(\mathcal{V})$$

となるので (5) より $\displaystyle\int_{M(W,V)} f(\mathcal{V}) = \operatorname*{Res}_{u=0,\infty} \int_{\mathcal{M}_{exc}} \frac{\tilde{f}(\mathcal{V})|_{\mathcal{M}_{exc}}}{\wedge_{-1}(N_{exc})^\vee}$ をえる．

3.3 反復 K 理論類

今度は (5) の右辺を計算する．$\mathcal{M}_{exc}$ の代表元 $(b, V' = V_\flat, \rho = 1)$ は $\mathbb{C}_u^*$ 作用の正規化に $\mathrm{id}_{V_\flat} \oplus u\, \mathrm{id}_{V_\sharp} \in \mathrm{GL}(V)$ が必要なので, $\mathcal{V}_\sharp|_{\mathcal{M}_{exc}} = u \det(\mathcal{V}_\flat)^\vee$ である．また,

$$\begin{aligned} N_{exc} &= \mathcal{H}om(\mathcal{V}_\sharp, \mathcal{W}) + \mathcal{H}om(\mathcal{V}_\flat, \mathcal{V}_\sharp) - \mathcal{H}om(\mathcal{V}_\flat, \mathcal{V}_\sharp) - \mathcal{H}om(\mathcal{V}_\sharp, \mathcal{V}_\flat) \\ &= \mathcal{H}om(\mathcal{V}_\sharp, \mathcal{W}) - \mathcal{H}om(\mathcal{V}_\sharp, \mathcal{V}_\flat) \end{aligned}$$

なので, $\tilde{f}(\mathcal{V})|_{\mathcal{M}_{exc}} / \wedge_{-1} (N_{exc})^\vee$ は以下のように計算される．

$$\begin{aligned} &\frac{f(\mathcal{V}_\flat \oplus \mathcal{V}_\sharp) \cdot \wedge_{-1} \mathcal{H}om(\mathcal{V}_\sharp, \mathcal{V}_\flat) \cdot \wedge_{-1} \mathcal{H}om(\mathcal{V}_\flat, \mathcal{V}_\sharp)}{d \cdot \det \mathcal{V}|_{\mathcal{M}_{exc}} \cdot \wedge_{-1} \mathcal{H}om(\mathcal{W}, \mathcal{V}_\sharp)} \\ =& \frac{f(\mathcal{V}_\flat \oplus u \det(\mathcal{V}_\flat)^\vee) \cdot \wedge_{-1} \mathcal{H}om(u \det(\mathcal{V}_\flat)^\vee, \mathcal{V}_\flat) \cdot \wedge_{-1} \mathcal{H}om(\mathcal{V}_\flat, u \det(\mathcal{V}_\flat)^\vee)}{d \cdot u \cdot \wedge_{-1}(u \det(\mathcal{V}_\flat)^\vee \otimes \mathcal{W}^\vee)} \end{aligned}$$

ここで $\operatorname*{Res}_{u=0,\infty} g(u) du = \det(\mathcal{V}_\flat) \operatorname*{Res}_{u=0,\infty} g(u \det(\mathcal{V}_\flat)) du$ を使うと, (5) の右辺は以下になる．

$$\int_{M(W, V_\flat)} \operatorname*{Res}_{u=0,\infty} \frac{f(u, \mathcal{V}_\flat) \cdot \wedge_{-1}(u^{-1} \mathcal{V}_\flat) \cdot \wedge_{-1}(u (\mathcal{V}_\flat)^\vee)}{d \cdot \wedge_{-1}(u \mathcal{W}^\vee)} \frac{du}{u}$$

これを参考にして以下の反復 K 理論類を考える．

$$f_k(\mathcal{V}) = \frac{f(u_1, \ldots, u_k, \mathcal{V})}{d(d-1) \cdots (d-k+1)} \prod_{i<j} (1 - u_i^{-1} u_j)(1 - u_i u_j^{-1}) \cdot \prod_{i=1}^k \frac{\wedge_{-1}(u_i^{-1} \mathcal{V} \oplus u_i \mathcal{V}^\vee)}{\wedge_{-1}(u_i \mathcal{W}^\vee)} \frac{du_1}{u_1} \cdots \frac{du_k}{u_k}$$

3.4 壁越え公式

まとめると (5) より, $\displaystyle\int_{M(r,d)} f(\mathcal{V}) = \int_{M(r,d-1)} \operatorname*{Res}_{u_1=0,\infty} f_1(\mathcal{V})$ をえる．つづけて (5) に $\gamma = \tilde{f}_k(\mathcal{V})$ を代入していくことで,

$$\int_{M(r,d-k)} f_k(\mathcal{V}) = \int_{M(r,d-k-1)} \operatorname*{Res}_{u_{k+1}=0,\infty} f_{k+1}(\mathcal{V})$$

が $k = 1, 2, \ldots, d-1$ に対してしたがう．とくに $k = d-1$ のとき

$$\int_{M(r,1)} f_{d-1}(\mathcal{V}) = \operatorname*{Res}_{u_d=0,\infty} f_d(\mathcal{V})$$

となり, グラスマン多様体 $M(r,d)$ 上の積分が完全に留数計算に帰着される．最後にまとめて留数を取ることで定理 2.1 をえる．この定式化は望月拓郎氏の壁越え公式の理論 [10] に触発されたものである．

4 具体例の計算

4.1 $\chi_t(M(W,V))$ の計算

この節では $\chi_t(M(r,d)) = \mathbb{R}\Gamma(M(W,V), \wedge_{-t}T^*M(W,V))$ を望月拓郎氏の手法で求める．まず $T^*M(r,d) = \mathcal{H}om(W,\mathcal{V}) - \mathcal{E}nd(\mathcal{V})$ なので,

$$f_d(u_1,\dots,u_d) = \prod_{i=1}^{d}\prod_{\alpha=1}^{r}\left(1-\frac{tu_i}{e_\alpha}\right) / \prod_{j=1}^{d}\left(1-\frac{tu_i}{u_j}\right)$$

とおく．さらに K 理論類

$$\tilde{\psi} = \frac{f_d(\mathcal{V})\cdot\wedge_{-t}\mathcal{H}om(\mathcal{V}/\mathcal{V}', \mathcal{V}')}{[d]_t\cdot\det\mathcal{V}}$$

をとり反復計算を行う．このとき

$$\tilde{\psi}|_{\mathcal{M}_{exc}} = \frac{f_{d-1}(\mathcal{V}_\flat)}{[d]_t\cdot\det\mathcal{V}_\flat}\cdot\wedge_{-t}\left(\mathcal{H}om(\mathcal{W},\mathcal{V}) - \mathcal{H}om(\mathcal{V}_\flat,\mathcal{V}_\sharp) - \mathcal{E}nd(\mathcal{V}_\sharp)\right)$$

なので, §3.3 と同じ計算により以下を得る．

$$\begin{aligned}
\chi_t(M(W,V)) &= \operatorname*{Res}_{u=0,\infty}\int_{\mathcal{M}_{exc}}\frac{\tilde{\psi}|_{\mathcal{M}_{exc}}}{\wedge_{-1}(N_{exc})^\vee}\\
&= \operatorname*{Res}_{u=0,\infty}\int_{\mathcal{M}_{exc}}\frac{f_{d-1}(\mathcal{V}_\flat)\cdot\wedge_{-t}\mathcal{H}om(W,\mathcal{V}_\sharp)\cdot\wedge_{-1}\mathcal{H}om(\mathcal{V}_\flat,\mathcal{V}_\sharp)}{[d]_t\cdot u\cdot(1-t)\wedge_{-t}\mathcal{H}om(\mathcal{V}_\flat,\mathcal{V}_\sharp)\cdot\wedge_{-1}\mathcal{H}om(W,\mathcal{V}_\sharp)}\\
&= \int_{M(W,V_\flat)} f_{d-1}(\mathcal{V}_\flat)\\
&\cdot\frac{1}{[d]_t}\cdot\frac{1}{(1-t)}\operatorname*{Res}_{u=0,\infty}\frac{du}{u}\frac{\wedge_{-t}\mathcal{H}om(W,u)\cdot\wedge_{-1}\mathcal{H}om(\mathcal{V}_\flat,u)}{\wedge_{-1}\mathcal{H}om(W,u)\wedge_{-t}\mathcal{H}om(\mathcal{V}_\flat,u)}\\
&= \chi_t(M(W,V_\flat))\cdot\frac{[r-d-1]_t}{[d]_t} = \frac{[r]_t}{[1]_t}\cdots\frac{[r-d+1]_t}{[d]_t} = \binom{r}{d}_t.
\end{aligned}$$

ここで最後の行を導出するために以下の補題を用いた．

補題 4.1.

$$\frac{1}{(1-t)}\operatorname*{Res}_{u=0,\infty}\frac{du}{u}\prod_{i=1}^{\ell}\frac{1-tux_i}{1-ux_i}\prod_{j=1}^{m}\frac{1-uy_j}{1-tuy_j} = [\ell-m]_t \tag{6}$$

証明 つぎの留数計算を (6) の左辺に適用すれば良い．

$$\operatorname*{Res}_{u=0,\infty}\frac{du}{u}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-uz_k}{1-uw_k} = 1+\operatorname*{Res}_{u=\infty}\frac{du}{u}\prod_{k=1}^{n}\frac{z_k}{w_k}\frac{1-u^{-1}z_k^{-1}}{1-u^{-1}w_k^{-1}} = 1-\frac{z_1\cdots z_r}{w_1\cdots w_r}$$

□

4.2 行列式公式

一変数有理式の族 $\{f_i(u)\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に対して, 対称有理式 $F(u_1,\ldots,u_r) := \frac{\det(f_i(u_j))_{1\leq i,j\leq r}}{\prod_{1\leq i<j\leq r}(1/u_i-1/u_j)}$ を考える. $m=1$, $d_1=r$ のとき $M(W,V)$ は一点なので, $F(e_1,\ldots,e_r)=\int_{M(W,V)}F(\mathcal{V}_1)$ となる. 従って定理 2.1 より, これは以下のように計算される.

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{u_1,\ldots,u_r=0,\infty}\frac{F(u_1,\ldots,u_r)\cdot\prod_{1\leq i\neq j\leq r}(1-u_i/u_j)}{r!\cdot\prod_{i=1}^r\wedge_{-1}(u_i\otimes\mathcal{W}^\vee)}\cdot\frac{du_1\cdots du_r}{u_1\cdots u_r}\\
&=\operatorname*{Res}_{u_1,\ldots,u_r=0,\infty}\frac{\prod_{i=1}^r f_i(u_i)\prod_{i<j}(u_i-u_j)}{\prod_{i=1}^r\prod_{\alpha=1}^r(1-u_i/e_\alpha)}\cdot\frac{du_1\cdots du_r}{u_1\cdots u_r}\\
&=\operatorname*{Res}_{u_1,\ldots,u_r=0,\infty}\prod_{i=1}^r\frac{(-1)^{r(r-1)/2}f_i(u_i)}{\prod_{\alpha=1}^r(1-u_i/e_\alpha)}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sign}(\sigma)\prod_{i=1}^r u_i^{\sigma(i)-1}\cdot\frac{du_1\cdots du_r}{u_1\cdots u_r}\\
&=\operatorname*{Res}_{u_1,\ldots,u_r=0,\infty}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sign}(\sigma)\prod_{i=1}^r\frac{(-1)^{r(r-1)/2}f_i(u_i)u_i^{\sigma(i)-1}}{\prod_{\alpha=1}^r(1-u_i/e_\alpha)}\cdot\frac{du_1\cdots du_r}{u_1\cdots u_r}\\
&=(-1)^{r(r-1)/2}\det\left(\operatorname*{Res}_{u=0,\infty}\frac{f_i(u)u^{j-1}}{\prod_{\alpha=1}^r(1-u/e_\alpha)}\cdot\frac{du}{u}\right)_{1\leq i,j\leq r}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ここで, 最後の行列式の中身は (3) により $\Phi(f_i(u)u^{j-1})$ となる. ただし, 線型写像 $\Phi\colon\mathbb{C}[u,u^{-1}]\to\mathbb{C}[e_1,\ldots,e_r]^{\mathfrak{S}_r}$ を

$$
\Phi(u^\ell)=\begin{cases}h_{-\ell}(e_1^{-1},\ldots,e_r^{-1}) & \ell\leq 0\\ 0 & 0<\ell<r\\ (-1)^{r-1}\cdot(e_1\cdots e_r)\cdot h_{\ell-r}(e_1,\ldots,e_r) & \ell\geq r\end{cases}
$$

により定義する.

4.3 Grothendieck polynomial

無限個のパラメータ $b=(b_1,b_2,\ldots,)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,)$ と $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,)$ を用意する. [5, (2.12), (2.13)] による factorial Grothendieck polynomial の表示や [4] の導入した refined canonical Grothendieck polynomial を統合する多項式を以下のように定める.

$$
G_\lambda(x_1,\ldots,x_r|b,\alpha,\beta):=\frac{\det\left([x_j|b]^{\lambda_i+r-i}\frac{(1-\beta_1x_j)\cdots(1-\beta_{i-1}x_j)}{(1-\alpha_1x_j)\cdots(1-\alpha_{\lambda_i}x_j)}\right)_{1\leq i,j\leq r}}{\prod_{1\leq i<j\leq r}(x_i-x_j)}
$$

ここで, $[x|b]^k=(x+b_1+\beta_0xb_1)\cdots(x+b_k+\beta_0xb_k)$ とした.

行列式公式 (7) を有理式 $f_i(u)=[u|b]^{\lambda_i+r-i}\frac{(1-\beta_1u)\cdots(1-\beta_{i-1}u)}{(1-\alpha_1u)\cdots(1-\alpha_{\lambda_i}u)}u$ たちに適用すると, $G_\lambda(e_1,\ldots,e_r|b,\alpha,\beta)=\frac{(-1)^{r(r-1)/2}F(e_1,\ldots,e_r)}{(e_1\cdots e_r)^r}$ より以下の定理を得る.

定理 4.2.

$$
G_\lambda(e_1,\ldots,e_r|b,\alpha,\beta)=\frac{\det(\Phi([u|b]^{\lambda_i+r-i}\frac{(1-\beta_1u)\cdots(1-\beta_{i-1}u)}{(1-\alpha_1u)\cdots(1-\alpha_{\lambda_i}u)}u^j))_{1\leq i,j\leq r}}{(e_1\cdots e_r)^r}.
\tag{8}
$$

この定理において, $b=(0,0,\ldots,)$ とすると [4, Theorem 1.3] の $G_\lambda(e_1,\ldots,e_r|b,\alpha,\beta)$ に関する主張が導出される. また, $\alpha=(0,0,\ldots,),\beta_1=\cdots=\beta_r=-\beta_0$ とした時, $G_\lambda(e_1,\ldots,e_r|b,\alpha,\beta)$ は factorial Grothendieck polynomial となるが, [3, 3.11] や [14, Theorem 5.2] では (8) と異なる行列式公式が得られている.

さらに, $b=(0,0,\ldots,)$, $\alpha=(0,0,\ldots,),\beta_1=\cdots=\beta_r=-\beta_0$ とした時, (8) は

$$G_\lambda(e_1,\ldots,e_r|b)=\det\left(\sum_{m=0}^{i-1}\binom{i-1}{m}\beta_0^m h_{\lambda_j-i+j+m}(e_1,\ldots,e_r)\right). \tag{9}$$

になる. これは [9] で得られた. [7] では (9) が真空期待値として得られる頂点作用素を導入することで, (9) と異なる行列式公式([3, 3.11], [14, Theorem 5.2] に $b=(0,0,\ldots,)$ を代入した公式)や, dual Grothendieck polynomial の行列式公式, ピエリ公式などを示している (cf. [8]). また, [12] では Grothendieck polynomial と波動関数の対応を用い, 他の分配関数の行列式表示と波動関数による表示の 2 通りの評価を組み合わせることで, Cauchy の恒等式や, ヤング図形に渡る Grothendieck polynomial の和の行列式公式を示している.

さらに, $\beta_0=0$ とすると, シューア対称多項式に関するヤコビ-トゥルーディ公式が得られる. このとき, 左辺で用いる多項式の族は $f_i(u)=u^{\lambda_i+r-i+1}$ になる. この等式は, [11, Theorem 2.4] と比較できて興味深い. 壁越え現象と頂点作用素, 格子模型など可積分系との関係を追求することは今後の課題である.

参考文献

[1] B. Iversen, *A fixed point formula for action of tori on algebraic varieties*, Invent. Math., **16**, 229–236 (1972).

[2] T. Graber and R. Pandharipande, *Localization of virtual classes*, Invent. Math., **135**, 487–518 (1999).

[3] T. Hudson, T. Ikeda, T. Matsumura and H. Naruse, *Degeneracy Loci Classes in K-theory - Determinantal and Pfaffian Formula -*, Adv. Math. Vol.320 (2017),115–156.

[4] B. Hwang, J. Jang, J. Kim, M. Song and U. Song, *Refined Canonical Stable Grothendieck Polynomials and Their Duals*, arXiv:2104.04251

[5] T. Ikeda and H. Naruse, *K-theoretic analogues of factorial Schur P- and Q-functions*, Adv. Math. 243 (2013), 22–66.

[6] L. Jeffrey and F. Kirwan. *Localization for nonabelian group actions*. Topology, 34(2):291-327, 1995.

[7] S. Iwao, *Grothendieck polynomials and the boson-fermion correspondence*, Algebr. Comb. 3 (2020), no. 5, 1023–1040.

[8] S. Iwao, 対称多項式のフェルミオン表示と非可換シューア関数, Recent developments in Combinatorial Representation Theory, RIMS Kokyuroku.

[9] C. Lenart, *Combinatorial aspects of the K-theory of Grassmannians*, Annals of Com- binatorics 4 (2000), no. 1, 67–82.

[10] T. Mochizuki, *Donaldson Type Invariants for Algebraic Surfaces: Transition of Moduli Stacks*, Lecture Notes in Math., **1972**, Springer, Berlin, 2009.

[11] K. Motegi, *Yang-Baxter algebra and identities with application to Gysin maps*, Recent developments in Combinatorial Representation Theory, RIMS Kokyuroku.

[12] K. Motegi and K. Sakai, *Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 46 (2013), no. 35, 355201.

[13] A. Nielsen, *Diagonalizable linearized coherent sheaves*, Bull. S. M. F., **102**, 85–97 (1974)

[14] M. Nakagawa and H. Naruse, *Generating functions for the universal factorial Hall-Littlewood P- and Q-functions*, arXiv:1705.04791

[15] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Perverse coherent sheaves on blowup. III. Blow-up formula from wall-crossing*, Kyoto Journal of Mathematics, **51**, no. 2 263–335 (2011).

[16] R. Ohkawa, *Wall-crossing between stable and co-stable ADHM data*, Lett. Math. Phys., **108**, no. 6, 1485–1523 (2018).

[17] R. Ohkawa, *Functional equations of Nekrasov functions proposed by Ito-Maruyoshi-Okuda*, Moscow Math. J., **20**, no. 3, 531–573 (2020).

[18] A. Weber and M. Zielenkiewicz, *Residues formulas for the push-forward in K-theory, the case of G_2/P*, J. Algebraic Combin., **49**, no. 3, 361–380 (2019).

[19] A. Weber and M. Zielenkiewicz, *Residues formulas for the push-forward in K-theory, the case of G_2/P*, J. Algebraic Combin., **49**, no. 3, 361–380 (2019).

[20] M. Zielenkiewicz, *Integrations over homogeneous spaces for classical Lie groups using iterated residues at infinity*, Cent. Eur. J. Math., **12**, no. 4, 574–583 (2014).