非増加関数に対する重み付き Hardy の不等式について

近藤恵夢（奈良女子大学大学院博士後期課程）, 森藤紳哉（奈良女子大学）
Emu Kondo, Shinya Moritoh
Nara Women's University

概要

Hardy の不等式は 1915 年に登場して以来いろいろな研究がなされてきた. 今回はその中でも重み付き Hardy の不等式に着目し, その limiting case について述べる. これは相乗平均に関する不等式の結果と関連している. さらに重み付き Hardy の不等式が古典的 Lorentz 空間での最大作用素の有界性に関係していることから, 関数空間論的な議論の拡張にも期待できる. なお, これは森藤紳哉（奈良女子大学）と進行中の共同研究に基づく.

1　はじめに

本稿では, 重み付き Hardy の不等式に関して進行中の著者たちによる研究を紹介したい. 第 2 節では, 主定理と関連する今後の課題を述べ, 第 3 節では主定理の証明の概略を述べる. 第 4, 5 節では, 古典的 Lorentz 空間上での最大作用素の有界性を考える. 文献について, 直接的なものは 1990 年の Ariño-Muckenhoupt[2] であるが，1972 年の Muckenhoupt[6] や 1982 年の Andersen-Muckenhoupt[1] がさらにより基本的な結果を含んだものである.

2　Ariño-Muckenhoupt class と主定理

先ず, Ariño-Muckenhoupt class AM_∞ を全ての AM_q, $1 \leq q < \infty$ の和集合とする. ここで AM_q はある定数 B が存在し, 以下の不等式が任意の $r > 0$ に対して成り立つような $[0, \infty)$ 上の非負値関数 W の集合である.

$$\int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^q W(x)dx \leq B \int_0^r W(x)dx.$$

各 $1 \leq q < \infty$ に対する AM_q は Ariño-Muckenhoupt[2] によって考えられた重み関数の集合である. 本稿で考える Hardy の不等式の limiting case は以下のように述べられる.

定理 2.1. $0 < p < \infty$ とする．ある正の数 q に対して $\int_r^\infty x^{-q} W(x)dx < \infty$ が任意の $r > 0$ に対して成り立つとする．このとき, ある定数 C が存在し, $[0, \infty)$ 上の任意の正値非増加関数 f に対して次の不等式が成り立つためには, W が AM_∞ に属することが必要十分であ

る.

$$\int_0^\infty \left[\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)dt\right)\right]^p W(x)dx \leq C\int_0^\infty f(x)^p W(x)dx. \tag{2.1}$$

文献 [2] より, 重み付き Hardy の不等式

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)^{1/q}dt\right)^q W(x)dx \leq C\int_0^\infty f(x)W(x)dx$$

が任意の非負値非増加関数 f に対して成り立つためには, W が AM_q に属することが必要十分である. さらに, 相加平均と相乗平均の関係としてよく知られていることだが,

$$\lim_{q\to\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)^{\frac{1}{q}}dt\right)^q = \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)dt\right)$$

が成り立つことから, この主定理は自然なものであると言うことが出来る.

また, 不等式 (2.1) の起源は 1923 年の Carleman[4] と 1928 年の Knopp[5] にもある. Carleman は数列的な相乗平均に関する不等式を, Knopp は積分的な相乗平均に関する不等式を示しており, 不等式 (2.1) はそれらに重みをつけたものである.

今後の課題 1. Bennett–Grosse-Erdmann[3] と Persson-Stepanov[7] を融合して, 主定理を一般化する以下の問題を考えたい.

$0 < p, q < \infty$ とする. ある定数 C が存在し,

$$\int_0^\infty \left[\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)dt\right)\right]^p V(x)dx \leq C\int_0^\infty f(x)^q W(x)dx \tag{2.2}$$

が任意の正値非増加関数 f に対して成り立つために必要十分な V, W に関する条件は何か.

文献 [3] によれば,「重み付き Hardy 型の不等式に関して, 関数に対して成り立っていることが数列に対しても成り立つとは限らない」とのことである. 従って以下のような課題も考えられる.

今後の課題 2. 離散的な数列に対して, 式 (2.2) の類似が成り立つ条件は何かを調べたい.

すなわち, 非負非増加な数列 $\{x_n\}$ に対し

$$\sum_{n=1}^\infty a_n\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{p/n} \leq C\sum_{n=1}^\infty b_n x_n^q$$

が成り立つような非負数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の条件を調べる.

3　主定理の証明の概略

(2.1) $\Rightarrow W \in AM_\infty$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, r], \\ (2C)^{-1} \left(\frac{r}{x}\right)^q, & x \in (r, \infty) \end{cases}$$

として計算すれば, $W \in AM_q \subset AM_\infty$ を容易に示すことができる. ここで q は, $\int_r^\infty x^{-q} W(x) dx < \infty$ と $e^q > 2C$ を満たすように選ぶ.

$W \in AM_\infty \Rightarrow$ (2.1) :

$p = 1$ の場合を示す. 以下,

$$Gf(x) := \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t) dt\right)$$

とかく.

以下のような数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を帰納的に定める. $b_0 = 0$ とし, ε は後に決める十分小さい正の数とする.

$$a_n := \inf\left\{x > b_{n-1} : \frac{f(x)}{Gf(x)} \le \frac{\varepsilon}{10}\right\},$$

$$b_n := \inf\left\{x > a_n : \frac{f(x)}{Gf(x)} \ge \varepsilon\right\}.$$

すなわち半直線 $[0, \infty)$ は以下の 2 種類の区間に分けられたといえる.

1. $b_{n-1} \le x < a_n$ のとき, $f(x) \ge (\varepsilon/10) Gf(x)$ が成り立ち, 一般性を失うことなく $f(a_n) = (\varepsilon/10) Gf(a_n)$ としてよい.
2. $a_n \le x < b_n$ のとき, $f(x) \le \varepsilon Gf(x)$ が成り立ち, 一般性を失うことなく $f(b_n) = \varepsilon Gf(b_n)$ としてよい.

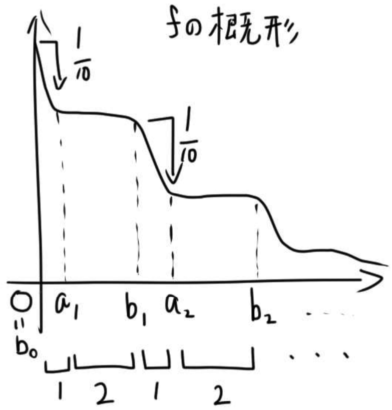
したがって

$$\frac{10}{\varepsilon} f(a_{n+1}) = Gf(a_{n+1}) \le Gf(b_n) = \frac{1}{\varepsilon} f(b_n).$$

よって以下のような大小関係がわかる.

$$10 f(a_{n+1}) \le f(b_n) \le f(a_n).$$

これは以下の図のように, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が半直線を「関数 f が急激に減少する区間」と「関数 f があまり減少しない区間」に交互に分けていることを意味する.



そのうえで, 区間 1 と区間 2 それぞれで (2.1) が成り立つことを確かめる.

1. $b_{n-1} \leq x < a_n$ の場合 :
   $f(x) \geqq (\varepsilon/10)Gf(x)$ より
   $$\int_{b_{n-1}}^{a_n} Gf(x)W(x)dx \leq \int_{b_{n-1}}^{a_n} \frac{10}{\varepsilon} f(x)W(x)dx.$$
   よってこの区間では (2.1) が成り立つ.
2. $a_n \leq x < b_n$ の場合 :
   W が AM_∞ に属するならば, W が AM_q に属するようなある q が存在する. この q を用いて $\varepsilon = e^{-q}$ とおいて計算していくと, (2.1) を導くことができる.

以上が主定理の証明の概略である. 厳密な証明は準備中の論文内で述べられる予定である. また, この証明では文献 [2] の中の, 基本的ではあるが証明の難しい reverse Hölder 型の不等式が我々の論文では不要になり, 簡易化が行われることを付記しておく.

4　最大作用素と Lorentz 空間

古典的 Lorentz 空間上での Hardy-Littlewood の最大作用素の有界性と主定理との関連性を文献 [2] に基づいて述べる.

定義 4.1. $1 \leq q < \infty$ とする. $W(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の非負値関数とする. このとき, 古典的 Lorentz

空間 $\Lambda_q(W)$ は以下の条件をみたす $\mathbb{R}^n$ 上の関数 g の集合として定義される.

$$\|g\|_{\Lambda_q(W)} := \left[\int_0^\infty (g^*(x))^q\, W(x)dx\right]^{1/q} < \infty.$$

ここで

$$g^*(x) := \inf\{y \geq 0 : \mu(\{t \in \mathbb{R}^n \,|\, |g(t)| > y\}) \leq x\}$$

は関数 g の非増加再配列であり, μ は Lebesgue 測度である.

定義 4.2. $\mathbb{R}^n$ 上の関数 g に対して, Hardy-Littlewood の最大作用素 M は

$$Mg(x) := \sup_{x\in Q} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |g(y)|dy$$

によって定義される. ここで上限は, x を含むあらゆる立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ にわたって取られている.

以下の (1) と (2) は同値である. その証明を文献 [2] に従って次節で述べる. なお, 第 2 節でも触れたように, これらは $W \in AM_q$ とも同値である.

(1) Hardy-Littlewood の最大作用素 M は古典的 Lorentz 空間 $\Lambda_q(W)$ 上で有界である.

(2) Hardy の不等式

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^q W(x)dx \leq C\int_0^\infty f(x)^q W(x)dx$$

が $[0,\infty)$ 上の任意の非負値非増加関数 f に対して成り立つ.

今後の課題 3. Hardy-Littlewood の最大作用素 M の古典的 Lorentz 空間 $\Lambda_q(W)$ 上での有界性の limiting case ($q \to \infty$) に対応する事柄を考えたい.

5 (1) と (2) の同値性の証明

文献 [2] に従って (1) と (2) の同値性の証明を紹介しておく.

(1)⇒(2) : $[0,\infty)$ 上の非負値非増加関数 f に対して, $\mathbb{R}^n$ 上の関数 g を $g(x) = f(A|x|^n)$ によって定める. ここで, A は $\mathbb{R}^n$ の単位球の体積を表す. 中心 x, 辺長 $4|x|$ の立方体 Q をとると, 最大作用素 M の定義より

$$Mg(x) \geq \frac{1}{(4|x|)^n}\int_{|y|\leq|x|} g(y)dy$$

が従う. 極座標表示により

$$Mg(x) \geq \frac{nA}{(4|x|)^n} \int_0^{|x|} f(At^n) t^{n-1} dt$$

となり, 変数変換を行って

$$Mg(x) \geq (4^{-n} A)(A|x|^n)^{-1} \int_0^{A|x|^n} f(s) ds$$

となる. 右辺は x に関して radial な非増加関数であるから

$$(Mg)^*(t) \geq (4^{-n} A) \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds$$

となる. 両辺を q 乗し, 関数 W を掛けて積分し, $g^*(t) = f(t)$ であることと最大作用素 M の $\Lambda_q(W)$ 上での有界性を用いて, 非増加関数 f に対する Hardy の不等式が得られる.

(2)⇒(1) : $g \in \Lambda_q(W)$ に対して非増加再配列 g^* を考え, Hardy の不等式を適用して

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x g^*(t) dt \right)^q W(x) dx \leq C \int_0^\infty g^*(x)^q W(x) dx$$

が得られる. [9] と [8] から最大作用素と再配列に関する次の不等式がいえる.

$$(Mg)^*(x) \leq (C/x) \int_0^x g^*(t) dt.$$

これを適用して, 最大作用素 M が古典的 Lorentz 空間 $\Lambda_q(W)$ 上で有界であることが言える.

参考文献

[1] Kenneth F. Andersen and Benjamin Muckenhoupt. Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions. *Studia Math.*, Vol. 72, No. 1, pp. 9–26, 1982.

[2] Miguel A. Ariño and Benjamin Muckenhoupt. Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 320, No. 2, pp. 727–735, 1990.

[3] G. Bennett and K.-G. Grosse-Erdmann. Weighted hardy inequalities for decreasing sequences and functions. *Math. Ann.*, Vol. 334, pp. 489–531, 2006.

[4] T. Carleman. Sur les fonctions quasi-analytiques. *Conférences faites au cinquième congrès des mathematiciens Scandinaves, Helsingfors*, pp. 181–196, 1923.

[5] Konrad Knopp. Über reihen mit positiven gliedern. *J. London Math. Soc.*, Vol. 1, No. 3, pp. 205–211, 1928.

[6] Benjamin Muckenhoupt. Hardy's inequality with weights. *Studia Math.*, Vol. 44, No. 1, pp. 31–38, 1972.

[7] Lars-Erik Persson and Vladimir D. Stepanov. Weighted integral inequalities with the geometric mean operator. *J. Inequal. Appl.*, Vol. 7, No. 5, pp. 727–746, 2002.

[8] E. Stein. Note on the class $L \log L$. *Studia Math.*, Vol. 32, pp. 305–310, 1969.

[9] A. Zygmund. *Trigonometric series*, Vol. I. Cambridge Univ. Press, London, New York, 1959.