On skewness and geometrical constants of Banach spaces [1]

岡山県立大学情報工学部　三谷健一（Ken-Ichi Mitani）
Okayama Prefectural University

新潟大学名誉教授　斎藤吉助（Kichi-Suke Saito）
Niigata University

北海道教育大学旭川校 小室直人 (Naoto Komuoro)
Hokkaido University of Education

バナッハ空間の幾何学的構造を考察する際によく幾何学的定数が用いられる．代表的な定数としてバナッハ空間における中線定理の成立度合いを表す von Neumann-Jordan 定数 (以下, NJ 定数）や単位球の non-squareness 度合いを表す James 定数があり, 幾何学的定数による幾何学的性質の評価, 定数同士の相互関係など様々な研究が行われている (例えば, [1, 6, 7, 14, 16]) .

本研究では幾何学的定数の一つである skewness を考察する．この定数は generalized inner product の研究に関連し, Fitzpatrick ら [5] によって導入され, この定数を用いてヒルベルト空間や一様非四辺形性などの幾何学的性質を特徴づけることができる．著者らはバナッハ空間における skewness と他の幾何学的定数との相互関係を与え, さらに具体的なノルム空間における skewness を計算した．これらの研究に関する最近の進展を述べる.

X を $\dim X \geq 2$ なる実バナッハ空間とし, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とおく.

定義 1 ([5]) バナッハ空間 X の skewness $s(X)$ を

$$s(X) = \sup\left\{ \lim_{t \to +0} \frac{\|x+ty\| - \|y+tx\|}{t} : x, y \in S_X \right\}$$

と定義する.

[1] *Keywords.* Day-James space, James constant, modulus of smoothness, skewness.
本研究は JSPS 科研費 JP21K03275 の助成を受けたものである.

Ritt[12] によるバナッハ空間における一般化された内積

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \lim_{t\to+0} \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$$

を用いれば,

$$s(X) = \sup\left\{\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle : x, y \in S_X\right\}$$

と表すことができ, つまり skewness は一般化された内積の対称性度合いを表す定数である.

定義 2 (i) X が uniformly non-square であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して

$$x, y \in S_X,\ \left\|\frac{x-y}{2}\right\| > 1-\delta \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$$

のときを言う.
(ii) X の James 定数 $J(X)$ を

$$J(X) = \sup\left\{\min\left(\|x+y\|, \|x-y\|\right) : x, y \in S_X\right\}$$

と定義する.
(iii) X の modulus of convexity $\delta_X(\varepsilon)$ を

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_X, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}$$

と定義する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta_X(\varepsilon) > 0$ のとき，X は一様凸 (uniformly convex) という.
(iv) X の characteristic of convexity $\varepsilon_0(X)$ を

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \in [0, 2] : \delta_X(\varepsilon) = 0\}$$

と定義する (cf. [13]).
(v) X の modulus of smoothness $\rho_X(\tau)$ を

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|}{2} - 1 : x, y \in S_X\right\}$$

と定義する.

命題 1 ([5]) (i) 任意のバナッハ空間 X に対し $0 \leq s(X) \leq 2$.
(ii) X がヒルベルト空間であることと $s(X)=0$ は同値.
(iii) バナッハ空間 X と X の双対空間 X^* に対し $s(X^*)=s(X)$.
(iv) $s(L_1)=s(L_\infty)=2,\ s(L_2)=0$. また, $2<p<\infty, 1/p+1/p'=1$ に対し

$$s(L_p)(=s(L_{p'}))=\max_{t>0}\frac{2(t-t^{p-1})}{1+t^p}.$$

初めに, $s(X)$ と $J(X)$ との関係を与える. Baronti-Papini[2] から

定理 1 ([2]) 任意のバナッハ空間 X に対し, $s(X) \leq 2\rho_X(1)$.

高橋-加藤 [14] から

定理 2 ([14]) 任意のバナッハ空間 X に対し

$$\rho_X(1) \leq 2\Big\{1-\frac{1}{J(X)}\Big\}.$$

これらの結果から

定理 3 任意のバナッハ空間 X に対し

$$s(X) \leq 4\Big\{1-\frac{1}{J(X)}\Big\}.$$

さらに, $s(X)$ を $J(X)$ を用いて下から評価すると

定理 4 ([11]) 任意のバナッハ空間 X に対し

$$s(X) \geq 2+4(2-J(X))-4\sqrt{(2-J(X))(4-J(X))}.$$

定理 3 と定理 4 から次が直接導かれる.

定理 5 ([5]) X をバナッハ空間とする. このとき X が *uniformly non-square* であることと $s(X)<2$ は同値.

ところで定理 1 の不等式について具体的な空間において等号条件を調べる.
X が uniformly non-square でないならば $s(X)=2\rho_X(1)=2$ である. また,

定理 6 ([11]) X が uniformly convex ならば

$$s(X) < 2\rho_X(1).$$

ところが, $s(X) = 2\rho_X(1)$ をみたす uniformly non-square なバナッハ空間 X は存在する. 実際, 次の 2 次元ノルム空間を考える.

定義 3 (cf. [7]) $1 \leq p, q \leq \infty$ とする. Day-James 空間 ℓ_p-ℓ_q は次のノルム $\|\cdot\|_{p,q}$ によって定義される空間 $\mathbb{R}^2$ である:

$$\|(x,y)\|_{p,q} = \begin{cases} \|(x,y)\|_p, & xy \geq 0, \\ \|(x,y)\|_q, & xy \leq 0. \end{cases}$$

$X_0 = \ell_\infty$-ℓ_1 のとき, 定理 1 の不等式及び $s(X_0) \geqq 1$ を調べることで

$$s(X_0) = 2\rho_{X_0}(1) = 1$$

となる ([11]).

さらに, $1 < p < \infty$ の範囲において ℓ_p-ℓ_1 の skewness を求め, この空間 X における skewness $s(X)$ と $\rho_X(1)$ との関係を考察する.

定義 4 X をバナッハ空間とし, $x(\neq 0) \in X$ とする. $x^* \in X^*$ が x の norming functional であるとは, $\|x^*\|^* = 1$ かつ $x^*(x) = \|x\|$ をみたすときをいい, x の norming functional 全体を $D(X,x)$ とかく.

[5] にあるように $s(X)$ は norming functional を用いて次のように表せる.

補題 1 ([5]) 任意のバナッハ空間 X に対し

$$s(X) = \sup\Big\{x^*(y) - y^*(x) : x, y \in S_X, x^* \in D(X,x), y^* \in D(X,y)\Big\}.$$

この補題は $\mathbb{R}^2$ 上において次のように改良できる.

補題 2 ([9]) $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ とする．このとき,

$$s(X) = \sup\{s(X,x,y) : x, y \in \mathrm{ext}(B_X) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\},$$

ここで,

$$s(X,x,y) = \sup\{|x^*(y) - y^*(x)| : x^* \in D(X,x),\ y^* \in D(X,y)\},$$

$\mathrm{ext}(B_X)$ は B_X の端点全体の集合である．

補題 2 を用いて ℓ_p-ℓ_1 の skewness を計算する．$1 < p < \infty$ とする．$0 \le \theta < 2\pi$ に対し

$$z(\theta) = \frac{(\cos\theta, \sin\theta)}{\|(\cos\theta, \sin\theta)\|_{p,1}}.$$

とおくと,

$$\mathrm{ext}(B_{\ell_p\text{-}\ell_1}) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ = \big\{z(\theta) : \theta \in [0, \pi/2] \cup \{\pi\}\big\}$$

と表せる．さらに, $z(\theta)$ の norming functional は次のように表せる．

補題 3 ([10]) $1 < p < \infty$ とする．(i) $0 < \theta < \pi/2$ のとき

$$D(\ell_p\text{-}\ell_1, z(\theta)) = \{z(\theta)^*\},$$

ここで,

$$z(\theta)^* = \frac{((\cos\theta)^{p-1}, (\sin\theta)^{p-1})}{\|(\cos\theta, \sin\theta)\|_p^{p-1}}.$$

(ii) $\theta = 0$ のとき

$$D(\ell_p\text{-}\ell_1, z(0)) = \{(1, b) : -1 \le b \le 0\}.$$

(iii) $\theta = \pi/2$ のとき

$$D(\ell_p\text{-}\ell_1, z(\pi/2)) = \{(a, 1) : -1 \le a \le 0\}.$$

(iv) $\theta = \pi$ のとき

$$D(\ell_p\text{-}\ell_1, z(\pi)) = \{(-1, b) : 0 \le b \le 1\}.$$

これと補題 2 を用いて次が得られる．

定理 7 ([10]) (i) $2 \le p < \infty$ のとき, $s(\ell_p\text{-}\ell_1) = 1$.
(ii) $1 < p < 2$ のとき,

$$s(\ell_p\text{-}\ell_1) = t_p^{p-1} + (1 - t_p^p)^{1/p} - t_p,$$

ここで t_p は次の方程式の一意解である

$$(p-1)t^{p-2} - t^{p-1}(1-t^p)^{1/p-1} - 1 = 0, \quad 0 < t < 1/2.$$

この計算結果から次の $s(\ell_p\text{-}\ell_1)$ の性質が得られる.

命題 2 ([10]) $s(p) = s(\ell_p\text{-}\ell_1),\ p \ge 1$ とおく. このとき
(i) $s(p)$ は $[1, 2]$ 上狭義単調減少.
(ii) すべての $1 < p < 2$ で $s(p) < 2^{1/p}$.
(iii) すべての $2 \le p < \infty$ で $s(p) = 1$.

さらに, ℓ_p-ℓ_1 において定理 1 の不等式の等号関係を調べる.

定理 8 ([17], cf. [13]) $1 < p < \infty$ とする. $X = \ell_p\text{-}\ell_1$ とおく. このとき,

$$\rho_X(1) = 2^{1/p-1}.$$

この結果と命題 2 から次が得られる.

定理 9 ([10]) $1 < p < \infty$ とする. $X = \ell_p\text{-}\ell_1$ とおくと

$$s(X) < 2\rho_X(1).$$

さて, 定理 6 において, X が uniformly convex ならば

$$s(X) < 2\rho_X(1).$$

であると述べたが, characteristic of convexity $\varepsilon_0(X)$ を用いて, これを次のように改良することができる. ここで,

$$X : \text{uniformly convex} \Longleftrightarrow \varepsilon_0(X) = 0$$

に注意する.

定理 10 ([8]) X をバナッハ空間とする. $\varepsilon_0(X) \le 1/2$ ならば $s(X) < 2\rho_X(1)$.

この結果から, $s(X) < 2\rho_X(1)$ なる non-uniformly convex な空間 X が ℓ_p-ℓ_1 空間以外にも多く存在することが分かる.

参考文献

[1] J. Alonso, P. Martín and P. L. Papini, *Wheeling around von Neumann-Jordan constant in Banach spaces*, Studia Math. **188** (2008), 135-150.

[2] M. Baronti and P. L. Papini, *Projections, skewness and related constants in real normed spaces,* Math. Pannonica, **3** (1992), 31–47.

[3] J. A. Clarkson, *The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space*, Ann. of Math. **38** (1937), 114-115.

[4] S. Dhompongsa, P. Piraisangjun and S. Saejung, *Generalised Jordan-von Neumann constants and uniform normal structure*, Bull. Austral. Math. Soc. **67** (2003), 225-240.

[5] S. Fitzpatrick and B. Reznick, *Skewness in Banach spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **275** (1983), 587–597.

[6] A. Jiménez-Melado, E. Llorens-Fuster and S. Saejung, *The von Neumann-Jordan constant, weak orthogonality and normal structure in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 355-364.

[7] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math. **144** (2001), 275-295.

[8] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, *A note on relations between skewness and geometrical constants of Banach spaces,* Linear Nonlinear Anal., **7**, (2021), 257–264.

[9] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and N. Komuro, *Extremal structure of absolute norms and the skewness,* Linear Nonlinear Anal., **1** (2015), 159–167.

[10] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and N. Komuro, *Skewness of Day-James spaces,* Ann. Funct. Anal., **13** (2022), Article number:75.

[11] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and Y. Takahashi, *Skewness and James constant of Banach spaces,* J. Nonlinear Convex Anal., **14** (2013), 115–122.

[12] R. K. Ritt, *A generalization of inner product,* Michigan Math. J., **3** (1955), 23–26.

[13] Y. Takahashi, *Some geometric constants of Banach spaces-a unified approach*, Banach and function spaces II, 191-220, Yokohama Publ., Yokohama, 2008.

[14] Y. Takahashi and M. Kato, *A simple inequality for the von Neumann-Jordan and James constants of a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **359** (2009), 602-609.

[15] C. Yang, *An inequality between the James type constant and the modulus of smoothness*, J. Math. Anal. Appl. **398** (2013), 622-629.

[16] C. Yang and H. Li, *An inequality between Jordan-von Neumann constant and James constant* , Appl. Math. Letters **23** (2010), 277-281.

[17] C. Yang and H. Li, *On the James type constant of* ℓ_p-ℓ_1*,* J. Inequal. Appl., **2015** (2015), Article ID 79.