

免疫保持期間と拡散を含む Kermack-McKendrick モデル における進行波解の存在

Mostafa Adimy¹, Abdennasser Chekroun², 國谷紀良 (Toshikazu Kuniya)³

¹ INRIA, University of Lyon

² Laboratoire d'Analyse Nonlinéaire et Mathématiques Appliquées, University of Tlemcen

³ Graduate School of System Informatics, Kobe University

E-mail: tkuniya@port.kobe-u.ac.jp

1 はじめに

Kermack-McKendrick モデル [7] は感染症の流行を表す数理モデルであり, SIR モデルとも呼ばれる. ここで, S は感受性 (未感染) 人口, I は感染人口, R は回復・除去人口を意味する. SIR モデルをはじめとする感染症の数理モデルでは, 基本再生産数 \mathcal{R}_0 [4] と呼ばれる疫学的指標が定義される. \mathcal{R}_0 は「感受性のみからなる集団に一人の感染者が侵入したとき, その感染者の影響によって生じる新規感染者数の期待値」という意味があり, $\mathcal{R}_0 < 1$ ならば感染症は流行せず, $\mathcal{R}_0 > 1$ ならば流行するという直感的な判断が可能になる.

感染症の空間的な伝播を考慮する場合, 拡散を含む Kermack-McKendrick モデルが用いられることがある. [6] では, 次のような拡散を含むモデルの研究が行われた (ただし, 記号は元の論文とは異なる):

$$S_t = d_S S_{xx} - \beta SI, \quad I_t = d_I I_{xx} + \beta SI - \mu I, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

ここで $S = S(t, x)$ および $I = I(t, x)$ はそれぞれ時刻 t における位置 x の感受性人口と感染人口を表す. β は感染率, μ は回復・除去率, d_S, d_I は拡散係数であり, それらは全て正の定数とする. 初期の感受性人口を $S(0, x) = S^0 > 0$ (定数) とするとき, 基本再生産数は $\mathcal{R}_0 = \beta S^0 / \mu$ となり, [6] の主定理は次のように表すことが出来る: $c^* = 2\sqrt{d_I \mu (\mathcal{R}_0 - 1)}$ (最小速度) とするとき, 以下の (a), (b) が成り立つ.

- (a) $\mathcal{R}_0 > 1$ ならば, 任意の $c \geq c^*$ に対し, 波の速さが c であるような (1) の進行波解が存在する.
- (b) $\mathcal{R}_0 \leq 1$ あるいは $c < c^*$ ならば, (1) の進行波解は存在しない.

[8] では, (1) の拡張として, 非局所的な感染と時間遅れを含む次のモデルが考えられた:

$$\begin{cases} S_t = d_S S_{xx} - \beta S \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y, t-s) I(y, s) dy ds, \\ I_t = d_I I_{xx} + \beta S \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y, t-s) I(y, s) dy ds - \mu I, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ここで $K(x-y, t-s)$ は, 時刻 s において位置 y にいた感染者による, 時刻 t において位置 x にいる感受性者への感染の影響の強さを表す積分核である. K に対する適当な条件の下で, [8] では (a), (b) と同様の結果が得られている. ただし, 特性方程式が 2 次方程式ではないため, 最小速度 c^* の具体的な形は分からず, 存在のみが示されている.

[1] では, 免疫保持期間 (protection phase) を年齢構造によってモデル化する研究が行われた. 本研究 [2] では,

免疫保持期間と拡散を含む次のモデルを考える：

$$\begin{cases} S_t = d_S S_{xx} - hS - \beta Sg(I) + (1 - \alpha)p(t, x, \tau), \\ I_t = d_I I_{xx} - \mu I + \beta Sg(I), \\ p_t + p_a = d_p p_{xx}, \quad a \in (0, \tau), \\ p(t, x, 0) = hS + \alpha p(t, x, \tau), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

ここで $p = p(t, x, a)$ は時刻 t において位置 x にいる、免疫保持状態になってからの経過時間が a である人口を表す。 h は免疫保持状態への遷移率（ワクチン接種率と考えることが出来る）、 τ は免疫保持期間の長さ、 d_p は人口 p の拡散係数であり、それらは全て正の定数とする。また、 $\alpha \in (0, 1)$ は免疫保持期間が終わった後に再び免疫保持状態に戻る確率（ワクチンのブースター接種と考えることが出来る）であり、 $g(I) = I/(1 + kI)$ 、 $k > 0$ は飽和型の接触項である。 $u(t, x) := p(t, x, 0)$ を時刻 t において位置 x にいる新規の免疫保持人口とすると、特性曲線法により、モデル (2) は次の時間遅れ系に書き換えられる。

$$\begin{cases} S_t = d_S S_{xx} - hS - \beta Sg(I) + (1 - \alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_p(\tau, x - y) u(t - \tau, y) dy, \\ I_t = d_I I_{xx} - \mu I + \beta Sg(I), \\ u(t, x) = hS + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_p(\tau, x - y) u(t - \tau, y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3)$$

ここで Γ_p は 1 次元熱方程式の熱核である。

本研究 [2] では、モデル (3) の進行波解の存在を調べた。主結果は (a), (b) と同じく、基本再生産数 \mathcal{R}_0 と最小速度 c^* によって進行波解の存在が決まるというものである。証明では、[8] と同様に、不変集合を作ってシャウダーの不動点定理を利用する手法を用いた。ただし、[8] とは異なり、免疫保持期間の影響で、感受性人口の波の単調性が一般には成り立たない。本稿では [2] の主結果と証明の概要を述べるとともに、そのような非単調な波を示す数値例を紹介する。

2 モデルの書き換え

モデル (3) の感染症の無い状態を表す平衡解を $(S^0, 0, u^0)$ と表す。 $u^0 > 0$ は任意定数で、 $S^0 = (1 - \alpha)u^0/h$ が成り立つ。初期条件は $S(0, x) = S^0$ 、 $p(0, x, a) = u^0$ ($x \in \mathbb{R}$, $a > 0$) を満たすとする。正の定数 $c > 0$ に対して $z = x + ct$ とし、 $(S(t, x), I(t, x), u(t, x)) = (\phi(z), \psi(z), U(z))$ とすれば、(3) は

$$\begin{cases} c\phi' = d_S \phi'' - h\phi - \beta \phi g(\psi) + (1 - \alpha)(T_p(\tau)U)(z - c\tau), \\ c\psi' = d_I \psi'' - \mu\psi + \beta \phi g(\psi), \\ U(z) = h\phi + \alpha(T_p(\tau)U)(z - c\tau), \quad z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4)$$

と書き換えられる。ただし

$$(T_p(\tau)U)(z - c\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_p(\tau, z - c\tau - y) U(y) dy = (\Gamma_p(\tau, \cdot) * U)(z - c\tau)$$

である。ここでは特に、境界条件

$$\begin{cases} \phi(-\infty) = S^0, \quad \phi(+\infty) = S^\infty < S^0, \\ \psi(-\infty) = \psi(+\infty) = 0, \\ U(-\infty) = u^0, \quad U(+\infty) = u^\infty < u^0, \end{cases}$$

を満たす進行波解 (ϕ, ψ, U) の存在を調べる。 $(A_p U)(z) := \alpha(T_p(\tau)U)(z - c\tau)$ とすると、(4) の第三式より

$$(I_d - A_p)U = h\phi \Leftrightarrow U = (I_d - A_p)^{-1}(h\phi)$$

を得る。ただし I_d は恒等作用素である。 Γ_p が熱核であることから $\|T_p(\tau)\|_{\text{op}} = 1$ であり、 $\|A_p\|_{\text{op}} = \alpha < 1$ であることに注意すれば ($\|\cdot\|_{\text{op}}$ は作用素ノルム),

$$U = (I_d - A_p)^{-1}(h\phi) = h \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma(z-y)\phi(y)dy = h(\Sigma * \phi)(z), \quad \Sigma(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \Sigma_n(z)$$

を得る。ただし $\Sigma_n(z) = \alpha^n \Gamma_p(n\tau, z - n\tau)$ である。これより (4) を次の (ϕ, ψ) -系に書き直すことが出来る：

$$\begin{cases} c\phi' = d_s\phi'' - h\phi - \beta\phi g(\psi) + h(\chi * \phi), \\ c\psi' = d_I\psi'' - \mu\psi + \beta\phi g(\psi), \quad z \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5)$$

ただし $\chi = (1 - \alpha)\tau_{c\tau}(\Gamma_p(\tau, \cdot) * \Sigma)$ ($\tau_{c\tau}$ は平行移動作用素： $(\tau_{c\tau}\psi)(z) := \psi(z - c\tau)$) である。ここで

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \Sigma_n(z)dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha}$$

に注意すると、 $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(z)dz = 1$ であることが分かる。以後、境界条件

$$\begin{cases} \phi(-\infty) = S^0, \quad \phi(+\infty) = S^\infty < S^0, \\ \psi(-\infty) = \psi(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

を満たす (5) の解 (ϕ, ψ) の存在を調べる。

3 主結果

本研究 [2] の主結果は次の通りである：基本再生産数 $\mathcal{R}_0 = \beta S^0 / \mu$ および最小速度 $c^* = 2\sqrt{d_I\mu(\mathcal{R}_0 - 1)}$ に対し、以下の (A), (B) が成り立つ。

(A) $\mathcal{R}_0 > 1$ ならば、任意の $c > c^*$ に対し、(5)-(6) を満たす進行波解 $(\phi, \psi) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^2)$ が存在する。

(B) $\mathcal{R}_0 < 1$ あるいは $c < c^*$ ならば、(5)-(6) を満たす進行波解は存在しない。

以下では証明の概要を述べる（詳細は [2] を参照されたい）。(A) の証明の手順は以下の通りである：

(A1) 優解 $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ と劣解 $(\underline{\phi}, \underline{\psi})$ を構成する。

(A2) 集合 $\Theta := \{(\phi, \psi) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : \underline{\phi} \leq \phi \leq \bar{\phi}, \underline{\psi} \leq \psi \leq \bar{\psi}\}$ 上のある非線形作用素 $F : \Theta \rightarrow \Theta$ を定める。

(A3) F の Θ における不動点として (ϕ, ψ) の存在を示す。

(A4) (ϕ, ψ) が境界条件 (6) を満たすことを示す。

手順 (A1) の概要

優解 $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ と劣解 $(\underline{\phi}, \underline{\psi})$ は、次の微分不等式を満たすものとして構成される。

$$\begin{cases} c\bar{\phi}' \geq d_s\bar{\phi}'' - h\bar{\phi} - \beta\bar{\phi}g(\bar{\psi}) + h(\chi * \bar{\phi}), & c\bar{\psi}' \geq d_I\bar{\psi}'' - \mu\bar{\psi} + \beta\bar{\phi}g(\bar{\psi}), \\ c\underline{\phi}' \leq d_s\underline{\phi}'' - h\underline{\phi} - \beta\underline{\phi}g(\bar{\psi}) + h(\chi * \underline{\phi}), & c\underline{\psi}' \leq d_I\underline{\psi}'' - \mu\underline{\psi} + \beta\underline{\phi}g(\bar{\psi}), \quad z \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (7)$$

特性方程式 $d_I\lambda^2 - c\lambda + \mu(\mathcal{R}_0 - 1) = 0$ は、 $\mathcal{R}_0 > 1$ かつ $c > c^* = 2\sqrt{d_I\mu(\mathcal{R}_0 - 1)}$ であるとき、2つの実根 λ_1, λ_2 ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$) をもつ。このとき、優解を $(\bar{\phi}, \bar{\psi}) := (S^0, e^{\lambda_1 z})$ と定める。実際、 $\underline{\psi}$ が非負であれば、

$$\begin{aligned} c\bar{\phi}' - d_s\bar{\phi}'' + h\bar{\phi} + \beta\bar{\phi}g(\bar{\psi}) - h(\chi * \bar{\phi}) &= hS^0 + \beta S^0 g(\bar{\psi}) - h(\chi * S^0) = \beta S^0 g(\bar{\psi}) \geq 0, \\ c\bar{\psi}' - d_I\bar{\psi}'' + \mu\bar{\psi} - \beta\bar{\phi}g(\bar{\psi}) &\geq c\bar{\psi}' - d_I\bar{\psi}'' + \mu\bar{\psi} - \beta\bar{\phi}\bar{\psi} = e^{\lambda_1 z}(c\lambda_1 - d_I\lambda_1^2 + \mu - \beta S^0) = 0, \end{aligned}$$

より, (7) の第 1 式と第 2 式が得られる. また, ある正定数 $\epsilon_1, \epsilon_2, \eta_1, \eta_2$ に対し,

$$\underline{\phi} := \max \{0, S^0 - \eta_1 e^{\epsilon_1 z}\}, \quad \underline{\psi} := \max \left\{0, e^{\lambda_1 z} - \eta_2 e^{(\lambda_1 + \epsilon_2)z}\right\}$$

が劣解であることが確かめられる [2, Lemma 3.5]. $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ と $(\underline{\phi}, \underline{\psi})$ の例を図 1 に示す.

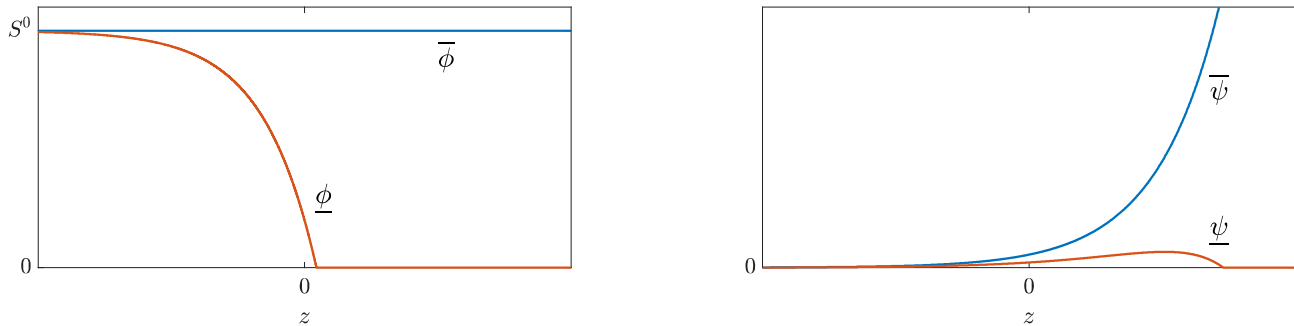


図 1 優解 $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ と劣解 $(\underline{\phi}, \underline{\psi})$ の例.

手順 (A2) の概要

B_1, B_2 を十分大きい正定数 ($B_1 > \sup_{I \geq 0} g(I)$, $B_2 > \mu$ を満たす) とする. 2 つの特性方程式

$$d_S \lambda^2 - c\lambda - (\beta B_1 + h) = 0, \quad d_I \lambda^2 - c\lambda - B_2 = 0$$

の解をそれぞれ κ_{11}, κ_{12} ($\kappa_{11} < 0 < \kappa_{12}$) および κ_{21}, κ_{22} ($\kappa_{21} < 0 < \kappa_{22}$) とする. また, $v_1 := d_S(\kappa_{12} - \kappa_{11})$, $v_2 := d_I(\kappa_{22} - \kappa_{21})$ とする. このとき, $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ 上の非線形作用素 F を次のように定める: $(\phi, \psi) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ に対し,

$$F(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} F_1(\phi, \psi) \\ F_2(\phi, \psi) \end{pmatrix}, \quad F_i(\phi, \psi)(z) := \frac{\beta}{v_i} \left(\int_{-\infty}^z e^{\kappa_{i1}(z-s)} H_i(\phi, \psi)(s) ds + \int_z^{+\infty} e^{\kappa_{i2}(z-s)} H_i(\phi, \psi)(s) ds \right),$$

$i = 1, 2, z \in \mathbb{R}$,

ただし

$$H_1(\phi, \psi)(s) = B_1 \phi(s) - \phi(s)g(\psi(s)) + \frac{h}{\beta}(\chi * \phi)(s), \quad H_2(\phi, \psi)(s) = \phi(s)g(\psi(s)) + \frac{B_2 - \mu}{\beta} \psi(s)$$

である.

$F(\Theta) \subset \Theta$ を示す. すなわち, $(\phi, \psi) \in \Theta$ を仮定して,

$$\underline{\phi} \leq F_1(\phi, \psi) \leq \bar{\phi}, \quad \underline{\psi} \leq F_2(\phi, \psi) \leq \bar{\psi}$$

を示す. $H_1(\phi, \psi) \leq (B_1 + h/\beta)S^0$ であることから,

$$\begin{aligned} F_1(\phi, \psi)(z) &\leq \frac{(\beta B_1 + h)S^0}{v_1} \left(\int_{-\infty}^z e^{\kappa_{11}(z-s)} ds + \int_z^{+\infty} e^{\kappa_{12}(z-s)} ds \right) \\ &= \frac{(\beta B_1 + h)S^0}{v_1} \left(\frac{1}{\kappa_{12}} - \frac{1}{\kappa_{11}} \right) = S^0 = \bar{\phi}(z) \end{aligned}$$

が従う. また, $F_1(\phi, \psi) \geq \underline{\phi}$ を示すために, 不等式

$$\begin{aligned} c\underline{\phi}' &\leq d_S \underline{\phi}'' - (\beta B_1 + h)\underline{\phi} + \beta \underline{\phi}[B_1 - g(\psi)] + h(\chi * \phi) \\ &\leq d_S \underline{\phi}'' - (\beta B_1 + h)\underline{\phi} + \beta \underline{\phi}[B_1 - g(\psi)] + h(\chi * \phi) \end{aligned} \tag{8}$$

を用いる. ここで飽和型の接触項 $g(I) = I/(1+kI)$ の有界性 ($g(I) < 1/k$, $I > 0$) を利用しており, 線形関数 $g(I) = I$ の場合は $\underline{\psi} \leq \psi \leq \bar{\psi}$ に対して $B_1 - g(\psi) \geq 0$ が保証されない ($\lim_{z \rightarrow +\infty} \bar{\psi}(z) = +\infty$ に注意). 不等式 (8) より

$$\beta H_1(\phi, \psi) \geq c\underline{\phi}' - d_S \underline{\phi}'' + (\beta B_1 + h)\underline{\phi}$$

が成り立つため,

$$\begin{aligned} F_1(\phi, \psi)(z) &\geq \frac{1}{v_1} \int_{-\infty}^z e^{\kappa_{11}(z-s)} [c\underline{\phi}'(s) - d_S \underline{\phi}''(s) + (\beta B_1 + h)\underline{\phi}(s)] ds \\ &\quad + \frac{1}{v_1} \int_z^{+\infty} e^{\kappa_{12}(z-s)} [c\underline{\phi}'(s) - d_S \underline{\phi}''(s) + (\beta B_1 + h)\underline{\phi}(s)] ds \end{aligned}$$

が得られる. これを部分積分すれば, $F_1(\phi, \psi) \geq \underline{\phi}$ が従う [2, Lemma 3.6]. 同様の計算で $\underline{\psi} \leq F_2(\phi, \psi) \leq \bar{\psi}$ も従う ([8, Lemma 2.6] にも類似の計算がある).

手順 (A3) の概要

ある正定数 $v > 0$ に対し, 集合 B_v を次のように定める:

$$B_v := \{\Psi = (\phi_1, \phi_2) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : \sup_{z \in \mathbb{R}} |\phi_i(z)| e^{-v|z|} < +\infty, i = 1, 2\}.$$

ノルムを $\|\Psi\|_v := \max_{i=1,2} \{\sup_{z \in \mathbb{R}} |\phi_i(z)| e^{-v|z|}\}$ で定めると, $(B_v, \|\cdot\|_v)$ はバナッハ空間である. v を適切に選ぶと, 集合 Θ は $(B_v, \|\cdot\|_v)$ において空でない有界閉凸集合であることが分かる. また, 作用素 $F : \Theta \rightarrow \Theta$ は $(B_v, \|\cdot\|_v)$ において連続かつコンパクトであることも分かる. したがって, シェウダーの不動点定理より, F は Θ にある不動点 (ϕ, ψ) をもつ:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{\beta}{v_1} \left(\int_{-\infty}^z e^{\kappa_{11}(z-s)} H_1(\phi, \psi)(s) ds + \int_z^{+\infty} e^{\kappa_{12}(z-s)} H_1(\phi, \psi)(s) ds \right), \\ \psi(z) &= \frac{\beta}{v_2} \left(\int_{-\infty}^z e^{\kappa_{21}(z-s)} H_2(\phi, \psi)(s) ds + \int_z^{+\infty} e^{\kappa_{22}(z-s)} H_2(\phi, \psi)(s) ds \right). \end{aligned} \quad (9)$$

これらは微分可能であり, (5) を満たすことは直接計算で確かめられる.

手順 (A4) の概要

優解と劣解の形 (図 1 を参照) から, $\phi(-\infty) = S^0$ および $\psi(-\infty) = 0$ は直ちに分かる. $\phi(+\infty) = S^\infty < S^0$ を示す際, 先行研究 [8] とは異なり, ϕ の単調性を利用することは出来ない. (5) の第一式を $-\infty$ から z まで積分して整理すると,

$$c\phi(z) - d_S \phi'(z) = cS^0 - \int_{-\infty}^z \beta \phi(s) g(\psi(s)) ds + \mathcal{F}(z) \quad (10)$$

を得る. ただし

$$\mathcal{F}(z) := -h \int_{-\infty}^z \phi(s) ds + h \int_{-\infty}^z (\chi * \phi)(s) ds$$

である. $\lim_{z \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(z) = 0$ および $\int_{-\infty}^{+\infty} \beta \phi(s) g(\psi(s)) ds < +\infty$ に注意して, (10) において $z \rightarrow +\infty$ とすると

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} [c\phi(z) - d_S \phi'(z)] = cS^0 - \int_{-\infty}^{+\infty} \beta \phi(s) g(\psi(s)) ds =: \mathcal{K}$$

を得る. したがって, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ が存在し,

$$\mathcal{K} - \epsilon \leq c\phi(z) - d_S \phi'(z) \leq \mathcal{K} + \epsilon, \quad z > \tilde{z}$$

が成り立つ。これより、任意の $\zeta > \tilde{z}$ に対して

$$\left[\phi(\zeta) - \frac{\mathcal{K} + \epsilon}{c} \right] e^{\frac{c}{d_S}(z-\zeta)} + \frac{\mathcal{K} + \epsilon}{c} \leq \phi(z) \leq \left[\phi(\zeta) - \frac{\mathcal{K} - \epsilon}{c} \right] e^{\frac{c}{d_S}(z-\zeta)} + \frac{\mathcal{K} - \epsilon}{c}$$

を得る。ある $\zeta > \tilde{z}$ で $\phi(\zeta) > (\mathcal{K} + \epsilon)/c$ あるいは $\phi(\zeta) < (\mathcal{K} - \epsilon)/c$ が成り立つとすると、上の不等式より $z \rightarrow +\infty$ で $\phi(z)$ は $+\infty$ あるいは $-\infty$ に発散するが、これは $0 \leq \phi \leq \phi = S^0$ に矛盾。よって、任意の $\zeta > \tilde{z}$ に対して

$$\frac{\mathcal{K} - \epsilon}{c} \leq \phi(\zeta) \leq \frac{\mathcal{K} + \epsilon}{c}$$

が成り立つ。 $\epsilon > 0$ は任意に小さく取れるので、

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \phi(z) = \frac{\mathcal{K}}{c} = S^0 - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta \phi(s) g(\psi(s)) ds =: S^\infty$$

を得る。よって $\phi(+\infty) = S^\infty < S^0$ である。 $\psi(+\infty) = 0$ は、 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z) dz < +\infty$ より分かる [2, Theorem 3.8].

(B) の証明の概要

$\mathcal{R}_0 < 1$ の場合を考える。進行波解 (ϕ, ψ) が存在すると仮定して矛盾を示す。特性方程式 $d_I \lambda^2 - d\lambda - \mu = 0$ の2つの実根を $\kappa'_{21}, \kappa'_{22}$ ($\kappa'_{21} < 0 < \kappa'_{22}$) とし、 $v'_2 = d_I(\kappa'_{22} - \kappa'_{21})$ とする。このとき、 ψ を (9) ではなく次の式で表すことが出来る：

$$\psi(z) = \frac{\beta}{v'_2} \left(\int_{-\infty}^z e^{\kappa'_{21}(z-s)} \phi(s) g(\psi(s)) ds + \int_z^{+\infty} e^{\kappa'_{22}(z-s)} \phi(s) g(\psi(s)) ds \right).$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z) dz < +\infty$ が分かる [2, Theorem 3.9] ので、両辺を積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z) dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta}{v'_2} \left(\int_{-\infty}^z e^{\kappa'_{21}(z-s)} \phi(s) g(\psi(s)) ds + \int_z^{+\infty} e^{\kappa'_{22}(z-s)} \phi(s) g(\psi(s)) ds \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta}{v'_2} \left(\int_0^{+\infty} e^{\kappa'_{21}u} \phi(z-u) g(\psi(z-u)) du + \int_{-\infty}^0 e^{\kappa'_{22}u} \phi(z-u) g(\psi(z-u)) du \right) dz \\ &= \frac{\beta}{v'_2} \left(\int_0^{+\infty} e^{\kappa'_{21}u} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z-u) g(\psi(z-u)) dz du + \int_{-\infty}^0 e^{\kappa'_{22}u} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z-u) g(\psi(z-u)) dz du \right) \\ &= \frac{\beta}{v'_2} \left(\int_0^{+\infty} e^{\kappa'_{21}u} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(w) g(\psi(w)) dw du + \int_{-\infty}^0 e^{\kappa'_{22}u} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(w) g(\psi(w)) dw du \right) \\ &= \frac{\beta}{v'_2} \left(\int_0^{+\infty} e^{\kappa'_{21}u} du + \int_{-\infty}^0 e^{\kappa'_{22}u} du \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(w) g(\psi(w)) dw \\ &= \frac{\beta}{v'_2} \left(\frac{1}{\kappa'_{22}} - \frac{1}{\kappa'_{21}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) g(\psi(z)) dz = \frac{\beta}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) g(\psi(z)) dz \\ &\leq \frac{\beta S^0}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z) dz = \mathcal{R}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z) dz < \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z) dz \end{aligned}$$

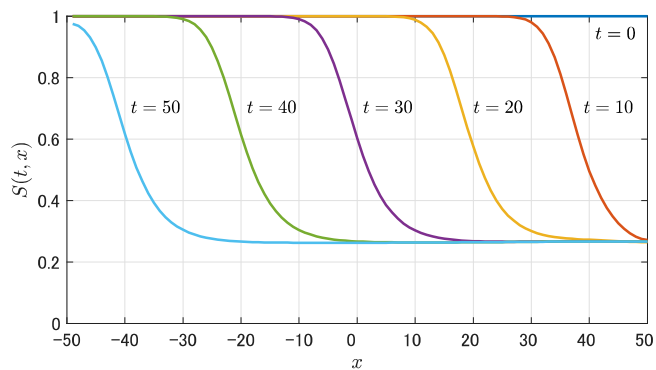
となり、矛盾。よって進行波解は存在しない。 $c < c^*$ の場合は、古典的なラプラス変換の手法 [3] を利用出来る。

4 数値実験

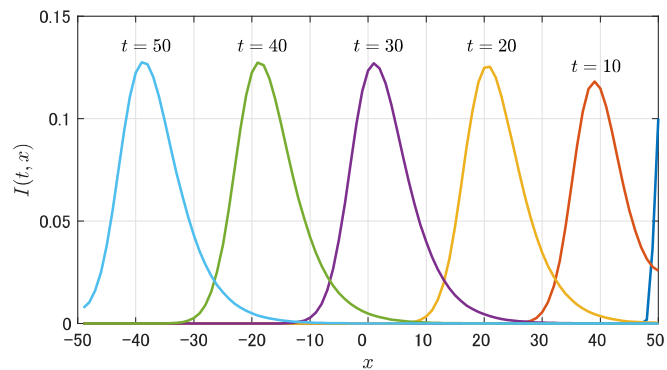
次のパラメータを固定する。

$$d_S = 2, \quad d_I = 1, \quad d_p = 2, \quad h = 0.1, \quad \mu = 1, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 2, \quad k = 0.5, \quad S^0 = 1, \quad u^0 = 0.5.$$

これらは進行波解の存在を数値的に確かめる上で選ばれたパラメータであり、疫学的な根拠や妥当性を保証するデータは無いことに注意されたい。このとき、基本再生産数 \mathcal{R}_0 は2であり、適当な初期条件の下で進行波解が見られる。実際、 $\tau = 1$ としたときの進行波解の様子を図2に示す。この場合、感受性人口 S の波形は x について単調減少である。一方、 τ の値を増やすにつれて、感受性人口 S の波が非単調になる (図3)。

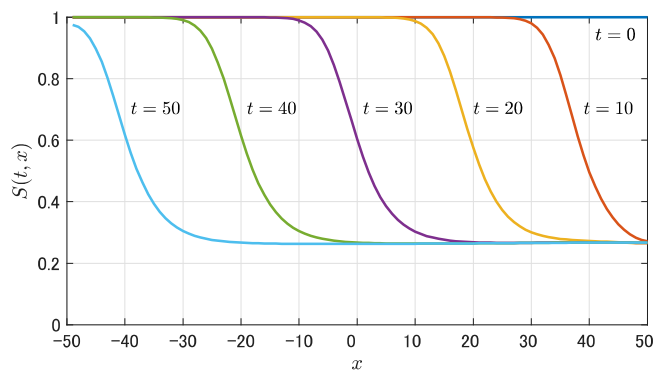


(a) 感受性人口 S .

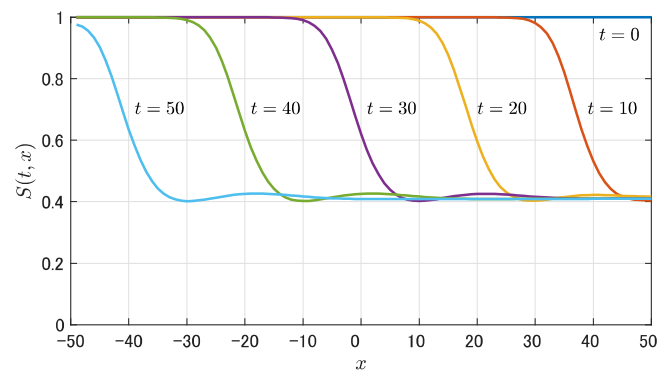


(b) 感染人口 I .

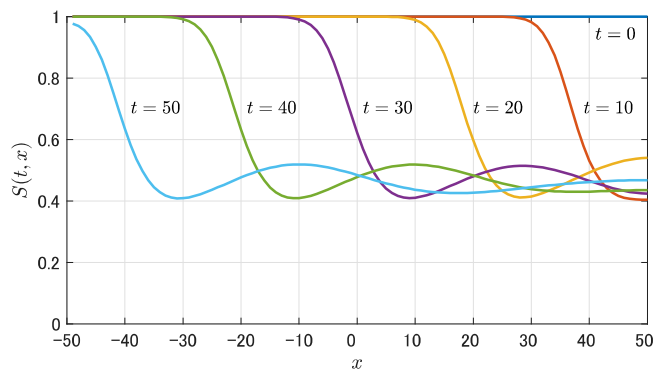
図2 モデル (3) の感受性人口 S と感染人口 I ($\tau = 1$).



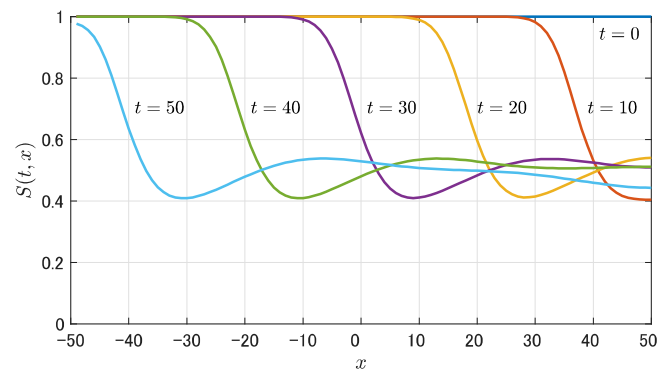
(a) $\tau = 1$.



(b) $\tau = 10$.



(c) $\tau = 20$.



(d) $\tau = 40$.

図3 異なる時間遅れパラメータ τ に対するモデル (3) の感受性人口 S .

5 まとめ

本研究 [2] では、免疫保持期間と拡散を含む Kermack-McKendrick モデル (3) を構築し、基本再生産数 \mathcal{R}_0 の観点から進行波解の存在について調べ、主結果 (A), (B) を得た。それらは先行研究 [6] の主結果 (a), (b) と似ているが、 $\mathcal{R}_0 = 1$ および $c = c^*$ の場合については結果が得られていない。また、証明の途中 (手順 (A2)) で飽和型の接触項 $g(I)$ の有界性を利用したが、感染症モデルでよく用いられる双線形の感染項 βSI の場合、有界性が成り立たないため、証明は出来ていない。また、進行波解の安定性についても未解決である。

先行研究 [6, 8] では、感受性人口の進行波解の波形は単調であったが、本研究では一般に単調ではない。これは、免疫保持期間を考慮したことで、感受性人口への流入が存在することに起因すると考えられる。特に時間遅れの影響 (パラメータ τ) が大きくなる時、非単調な波が生じることが図3で数値的に示された。このような非単調な感受性人口の波が見られる他の研究として、[5] が挙げられる。そこでは、出生による感受性人口への流入が考慮され

ている.

謝辞 本研究は日本学術振興会科研費（若手研究・No.19K14594）の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] M. Adimy, A. Chekroun, C.P. Ferreira, Global dynamics of a differential-difference system: a case of Kermack-McKendrick SIR model with age-structured protection phase, *Math. Biosci. Eng.* 17 (2020) 1329.
- [2] M. Adimy, A. Chekroun, T. Kuniya, Traveling waves of a differential-difference diffusive Kermack-McKendrick epidemic model with age-structured protection phase, *J. Math. Anal. Appl.* 505 (2022) 125464.
- [3] J. Carr, A. Chmaj, Uniqueness of travelling waves for nonlocal monostable equations, *Proc. Am. Math. Soc.* 132 (2004) 2433–2439
- [4] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, J.A.J. Metz, On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations, *J. Math. Biol.* 28 (1990) 365–382.
- [5] A. Ducrot, P. Magal, Travelling wave solutions for an infection-age structured epidemic model with external supplies, *Nonlinearity* 24 (2011) 2891–2911.
- [6] Y. Hosono, B. Ilyas, Traveling waves for a simple diffusive epidemic model, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 05 (1995) 935–966.
- [7] W.O. Kermack, A.G. McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proc. R. Soc. Lond. A* 115 (1927) 700–721.
- [8] Z.C. Wang, J. Wu, Travelling waves of a diffusive Kermack-McKendrick epidemic model with non-local delayed transmission, *Proc. R. Soc. A* 466 (2010) 237–261.