

# 共鳴振動ダイナミクスを示す遅れ微分方程式

A Delay differential equation showing a resonating behavior

大平健太

KENTA OHIRA

名古屋大学大学院情報学研究科・価値創造研究センター

FUTURE VALUE CREATION RESEARCH CENTER, GRADUATE SCHOOL OF INFOMATICS, NAGOYA UNIVERSITY [ \* ]

## Abstract

ここでは、新しいタイプの共振振動ダイナミクスを示す遅れ微分方程式を提案する。この式では遅延がゼロから漸近的に大きくなるにつれて振動的な過渡的ダイナミクスが現れたり消えたりする。遅れを適切に調整することで、ダイナミクスで特定の周波数での振動が強調されていることを示すパワースペクトルのピークが観測され共鳴的な振る舞いを示す。

## 1 提案する方程式とその性質

我々が提案する遅れ微分方程式は下記である [1].

$$\frac{dX(t)}{dt} + aX(t) = bX(t - \tau) \quad (1)$$

ここで  $a \geq 0, b \geq 0, \tau \geq 0$  は実数パラメータで、 $\tau$  が遅れとなる。この式はよく研究されている定数係数のヘイズの遅れ微分方程式 [2, 3, 4] と比較すると、左辺の係数を定数から時間線形に入れ替えただけである。このように形式的には微少な拡張ではあるが、その力学的な挙動は以下で述べるように大きく異なっている。

### 1.1 遅れが特殊な値の場合

まず  $b = 0$  で初期条件を  $X(t = 0) = X_0$  としたときの解は以下である。

$$X(t) = X_0 e^{-\frac{1}{2}at^2} \quad (2)$$

つまり解はガウス型をしている。次に  $a = 0$  の場合はヘイズの式の特特殊な場合となり、原点  $X = 0$  は  $-\pi/2\tau < b < 0$  のときに漸近的に安定である。

一般に  $a > 0, b > 0$  で遅れがゼロ  $\tau = 0$ 、初期条件  $X(t = 0) = X_0$  の場合も

$$X(t) = X_0 e^{-\frac{1}{2}at^2 + bt} \quad (3)$$

として解くことができ、これも  $b/a$  を頂点としたガウス型となっている (図1 (A)) .

---

\*ohira.kenta.n7@f.mail.nagoya-u.ac.jp

$\tau \rightarrow \infty$  の場合は初期関数に影響を受け続けることになる. 例えば ( $\tau \geq t \geq 0$ ) の範囲で  $X(t) = X_0$  ( $X_0$ : 定数) であれば式 (1) の  $X(t - \tau)$  の項は  $\tau \rightarrow \infty$  においてはその  $X_0$  に置き換えることができる. これを解くと以下となる.

$$X(t) = X_0 e^{-\frac{1}{2}at^2} \left(1 + b \int_0^t e^{\frac{1}{2}as^2} ds\right) \quad (4)$$

こちらは  $t=0$  の近くでピークを取り,  $t$  を大きくするにつれ 0 に収束していく. (出版済みの論文ではガウス型と書いているが誤りである.)

以上の結果より,  $\tau = 0, \infty$  の時,  $X(t)$  は山形の軌道となり  $t \rightarrow \infty$  で 0 に収束する.

## 1.2 遅れが一般の時

$\tau$  が 0 と  $\infty$  の間の時,  $X(t)$  はどのような挙動を示すのだろうか. 数値的に解析した結果が図 1 である.  $\tau$  を 0 から大きくしていくと山形の中に波形が現れ, やがて激しく振動し, また波形が収まっていく様子がわかる. 以下ではこの振動について考えていく.

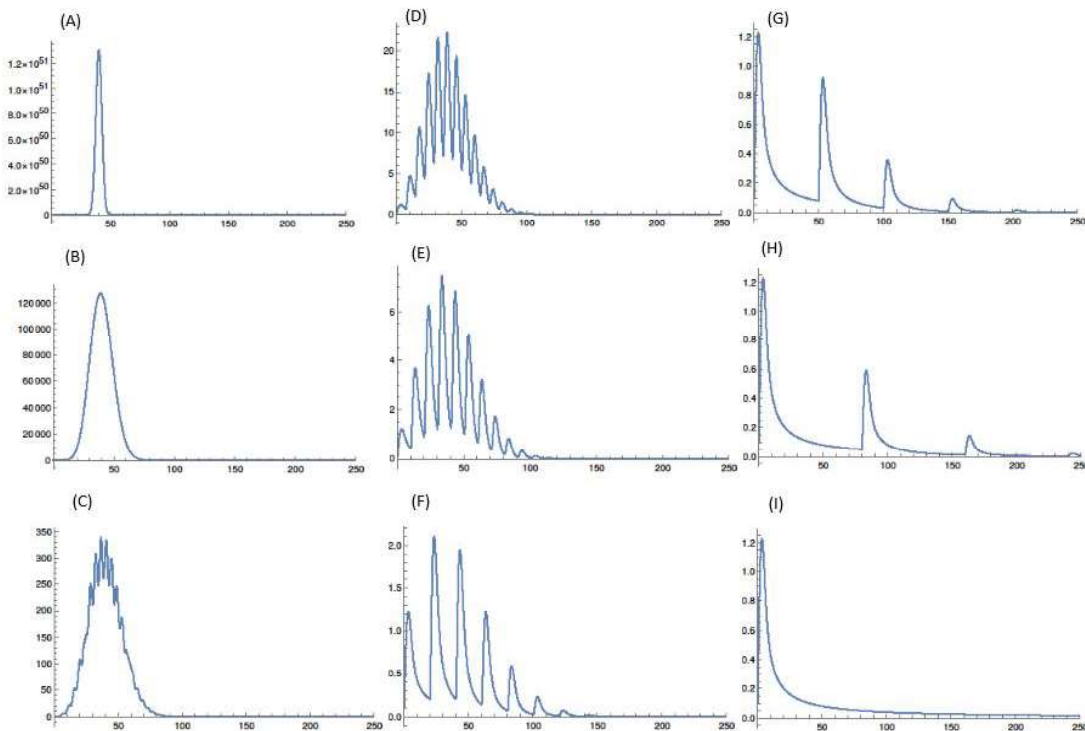


図 1: 式 (1) の遅れ  $\tau$  を変えたときの解の例 (縦軸:  $X(t)$ , 横軸  $t$ ). パラメータは  $a = 0.15, b = 6.0$ , 初期条件は  $X(t) = 0.1(-\tau \leq t \leq 0)$  である.  $\tau$  の値は (A)0, (B)2, (C)4, (D)7, (E)10, (F)20, (G)50, (H)80, (I) $\infty$ .

## 2 振動の分析

### 2.1 パワースペクトラムの導出

振動の詳細な分析を行うためパワースペクトラムを導出する. 元の方程式 (1) にフーリエ変換を施す.

$$i\omega\hat{X}(\omega) + ia\frac{d\hat{X}(\omega)}{d\omega} = -b\hat{X}(\omega)e^{i\omega\tau} \quad (5)$$

ここで

$$\hat{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} X(t) dt \quad (6)$$

この解は  $C$  を積分定数とすると,

$$\hat{X}(\omega) = C \text{Exp}\left[-\frac{1}{2a}\omega^2 + \frac{b}{\tau a}e^{i\omega\tau}\right] \quad (7)$$

となる. これに自身の共役を掛けることでパワースペクトラム  $S(\omega)$  を得る.

$$S(\omega) = |\hat{X}(\omega)|^2 = C^2 \text{Exp}\left[-\frac{1}{a}\omega^2 + \frac{2b}{\tau a} \cos \omega\tau\right] \quad (8)$$

図 2 は遅れ  $\tau$  を変化させた時のパワースペクトラムである. パワースペクトラム  $S(\omega)$  は  $\omega$  を大きくしていくと, あるところで山形が現れ始め, その後そのピークが最大となる. そこから山形のピークは小さくなっていき, さらに  $\omega$  を大きくするとピークが小さい波形が現れる様子がわかる. 漸近的には全ての周波数信号の成分が混ざり合い, 振動的な挙動が抑制されることになる.

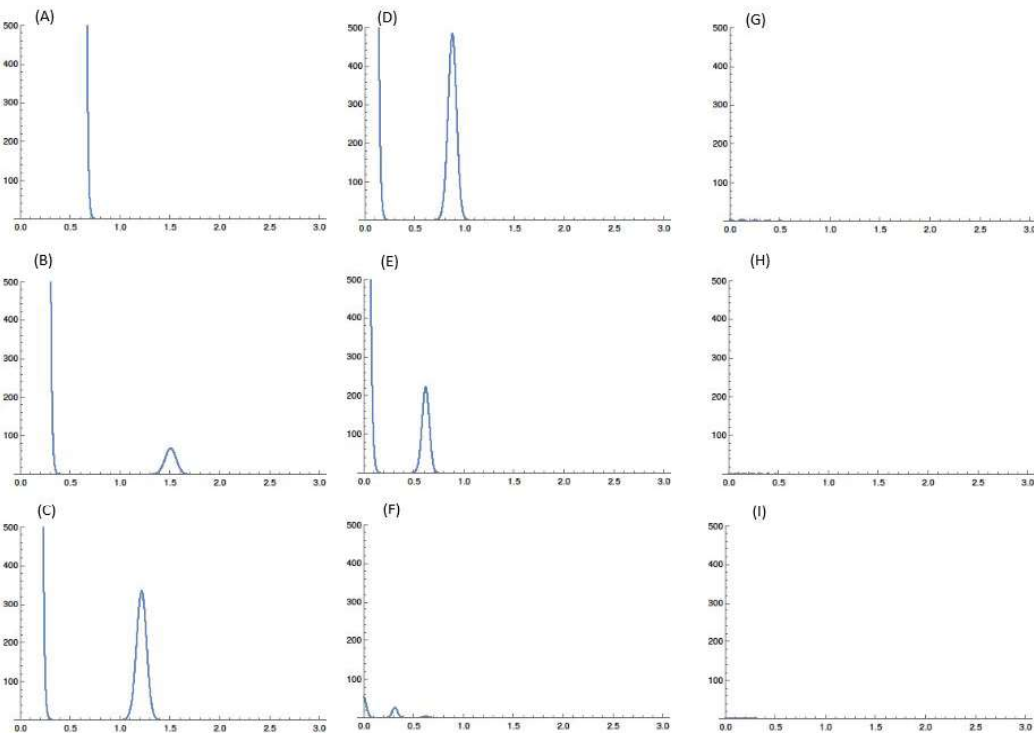


図 2: 式 (1) の遅れ  $\tau$  を変えたときのパワースペクトラム (縦軸:  $S(\omega)$ , 横軸  $\omega$ ). 初期条件およびパラメータは図 1 と同じで,  $a = 0.15, b = 6.0, X(t) = 0.1(-\tau \leq t \leq 0)$  である.  $\tau$  の値は (A)2, (B)4, (C)5, (D)7, (E)10, (F)20, (G)50, (H)80, (I) $\infty$ .

## 2.2 振動が現れるときの遅れ

式 (1) で遅れを増大させて行った時に振動が初めて現れる  $\tau$  (以下  $\tau_c$  とする) を求めたい. これはすなわち, パワースペクトラム  $S(\omega)$  が極大値を初めて持つことと等しい. その時の  $\omega$  を  $\omega^*$  とすると以下の連立方程式を満たす.

$$\omega^* = -b \sin \omega^* \tau_c, \quad 1 = -b \tau_c \cos \omega^* \tau_c, \quad (9)$$

ここで,  $\omega^*$  の範囲は  $-\frac{\pi}{\tau_c} < \omega^* < \frac{3\pi}{2\tau_c}$  と置く. さらに  $b\tau_c = \lambda_c$  とすると  $\lambda_c$  は以下を満たす.

$$\frac{1}{\lambda_c} = \cos \sqrt{\lambda_c^2 - 1}, \quad \sqrt{\pi^2 + 1} < \lambda_c < \sqrt{\frac{9}{4}\pi^2 + 1} \quad (10)$$

これを数値的に解くと,  $\lambda_c$  の値はおおよそ 4.603 となる. よって振動が現れる時の  $\tau$  に関する条件は

$$\tau_c = \frac{\lambda_c}{b} < \tau, \quad \lambda_c \approx 4.603 \quad (11)$$

となる (図 3) .

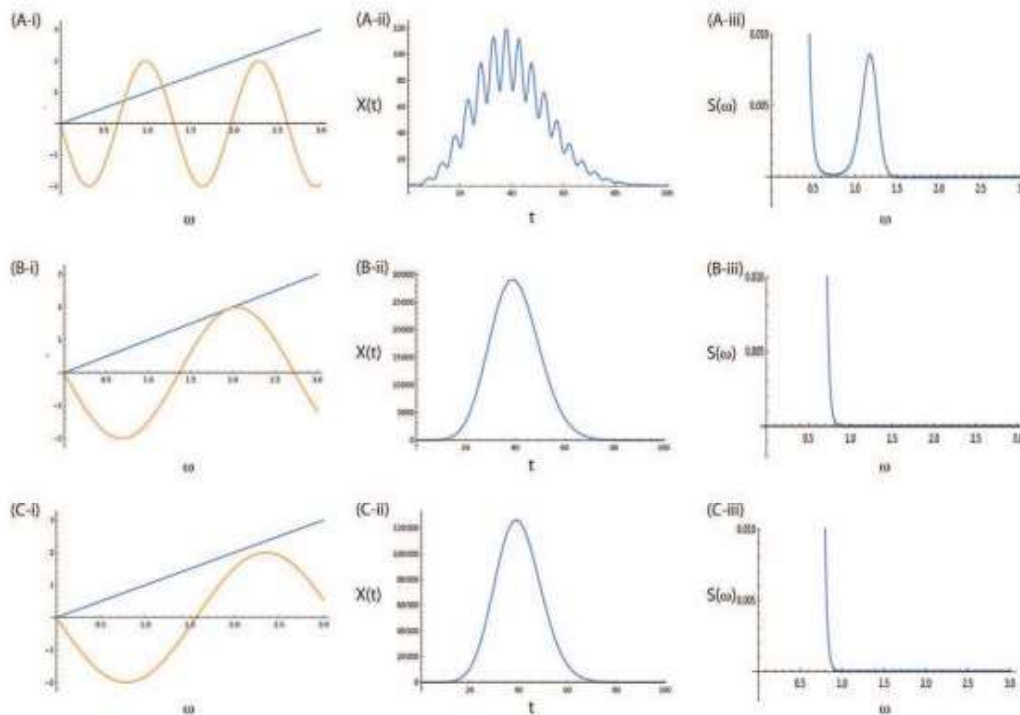


図 3: (i): それぞれパワースペクトルのピーク位置の解析, (ii): それに伴うダイナミクス, (iii): パワースペクトルの解析である. パラメータは  $a = 0.15, b = 2.0$  で, 初期条件は  $X(t) = 0.1 (-\tau \leq t \leq 0)$ .  $\tau_c = \frac{\lambda_c}{b} \approx 2.3017$ .  $\tau$  の値はそれぞれ (A)4.802, (B)2.3017, (C)2.002.

## 2.3 振動が最も強い規則性をもつときの遅れ

先の結果により, もとの物理系に振動が現れる時の遅れ  $\tau$  の条件がわかった. この条件下でもっとも強く規則正しい振動が起こる時の  $\tau$  は以下のグラフより  $\tau = 7$  付近であることがわかる. この時パワースペク

トラム  $S(\omega)$  の極大値  $S(\omega^*)$  が最も大きくなる。つまりある周波数の成分がもっとも強く出ており、これは最も規則正しい振動となっていることを表す共鳴現象と考えることができる (図4)。

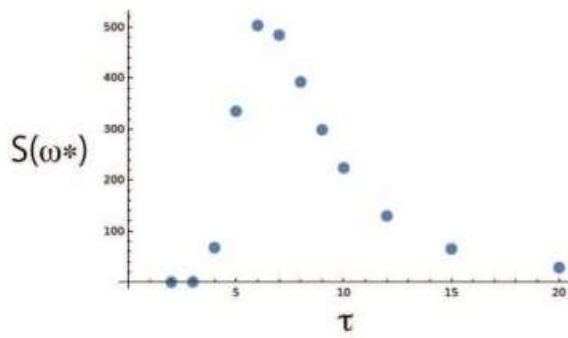


図4: 遅延時間  $\tau$  をチューニングパラメータとした場合の  $S(\omega)$  の極大値  $S(\omega^*)$  の推移. パラメータは Fig. 1 と同じ;  $a = 0.15, b = 6.0$ , 初期条件は  $X(t) = 0.1(-\tau \leq t \leq 0)$ .

### 3 まとめ

我々の提案した遅れ微分方程式では、遅れの値によらずに原点の安定性は崩れない。これは遅れ微分方程式の一般的な性質とは対象的である。また遅れがゼロもしくは非常に大きいときにはガウシアンもしくはそれに似た解を持つが、有限の遅れでは過渡的な振動現象が見られる。さらに適切な遅れの値ではより規則正しい振動、つまり特定の周期が強調された振動が出現する共鳴現象も示すなど、単純ではあるが興味深い性質を持っていると考えている。

本研究では名古屋大学大学院情報学研究科の大平英樹教授と研究グループのメンバーから建設的な助言を頂いた。ここに感謝したい。また、本研究はトヨタ自動車株式会社による名古屋大学における「予兆学プロジェクト」及び、「課題設定による先導的人文学・社会科学研究推進事業」学術知共創プログラム、「人間・社会・自然の来歴と未来：「人新世」における人間性の根本を問う」（JPJS00122674991, 代表: 中村靖子）による支援を受けた。

### 参 考 文 献

- [1] K. Ohira, Resonating Delay Equation. *EPL*, 137: 23001 2022.
- [2] N. D. Hayes. Roots of the transcendental equation associated with a certain difference–differential equation. *J. Lond. Math. Soc.*, 25:226–232, 1950.
- [3] R. Bellman and K. Cooke. *Differential–Difference Equations*. Academic Press, New York, 1963.
- [4] 内藤敏機, 原惟行, 日野義之, 宮崎倫子, 『タイムラグをもつ微分方程式』, 牧野書店 2002.